考研数学命题人土豪金系列丛书

2017

分类归纳+紧贴大纲+考点全覆盖+真题精析+习题精练

考研数学命题人复习全书

（数学二）

全国硕士研究生入学考试辅导用书编委会　编著

北京大学　尤承业　教授　清华大学　徐荣　教授

北京大学　刘德荫　教授　首都师范大学　童武　教授

北京航空航天大学出版社

BEIHANG UNIVERSITY PRESS

考研数学命题人士豪金系列丛书

2017

分类归纳+紧贴大纲+考点全覆盖+真题精析+习题精练

考研数学命题人复习全书

（数学二）

全国硕士研究生入学考试辅导用书编委会　编著

北京大学　尤承业　教授　清华大学　徐荣　教授

北京大学　刘德荫　教授　首都师范大学　童武　教授

北京航空航天大学出版社
BEIHANG UNIVERSITY PRESS

内容简介

作者根据教育部最新的全国硕士研究生招生考试数学考试大纲的要求，深入研究考研命题的特点及动态，结合多年数学命题、阅卷以及全国考研数学辅导班的经验，编写了这本复习全书。

本书详解大纲规定的所有考点，每章涵盖大纲基本要求；详解基本概念、重要定理与方法，精辟分析典型例题。每章后都有历年真题链接，对历年统考中常见题型进行了归纳分类，注重一题多解，以期开阔考生的解题思路；精选了适量的同步辅导习题，并附有参考答案与解析。考生可以通过习题的演练将基本考点融会贯通，把握每章的命题特点与思路，从而从容应考，轻取高分。

本书适用于参加研究生入学数学考试的广大考生。

图书在版编目（CIP）数据

2017考研数学命题人复习全书. 数学二 / 全国硕士研究生入学考试辅导用书编委会编著. -- 北京：北京航空航天大学出版社，2016.4

ISBN 978-7-5124-2071-7

Ⅰ.①2… Ⅱ.①全… Ⅲ.①高等数学—研究生—入学考试—自学参考资料 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆CIP数据核字（2016）第049344号

2017考研数学命题人复习全书（数学二）

全国硕士研究生入学考试辅导用书编委会 编著

责任编辑 王 实

*

北京航空航天大学出版社出版发行

北京市海淀区学院路37号（邮编100191） http://www.buaapress.com.cn

发行部电话：(010)82317024 传真：(010)82328026

读者信箱：bhpress@263.net 邮购电话：(010)82316936

涿州市新华印刷有限公司印装 各地书店经销

*

开本：787×1 092 1/16 印张：31.5 字数：802千字

2016年4月第1版 2016年4月第1次印刷

ISBN 978-7-5124-2071-7 定价：45.80元

编 委 会

前 言

考研整体形势分析

众所周知,“考研热”从兴起到如今的愈演愈烈已是不争的事实.我国每年报考硕士研究生的人数持续快速增长,考研的激烈竞争在不断升温.事实上,成功之路有多条,毕竟条条大路通罗马,但为什么我国的青年一代会把目光聚焦在考研这条路上呢?笔者认为,其中的原因是多方面的,但最根本的原因在于,考研这条路是将广大青年学子的个人发展与国家、社会的发展趋势紧密有机地联系在一起的,有着高度的内在统一性.我国自20世纪70年代后期改革开放以来,对内以经济建设为中心,对外学习西方先进的科学技术,至今已逾30年.我国经济发展所取得的成就已为世界瞩目.中国为什么能成功?关键的因素就在于人才.国家的发展需要大量高素质、高学历的人才,这就为当代大学生提供了一个鲜明的导向.而从每个青年人渴望成功、实现自我价值的角度讲,将个人的前途命运与国家、人民的需要结合起来,无疑是明智的选择.由此,考研成为广大青年学生的首选之路就不足为奇了.

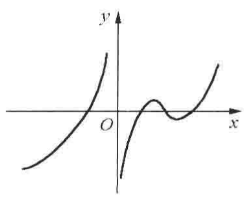
考研数学(数学二)考点分析与复习备考策略

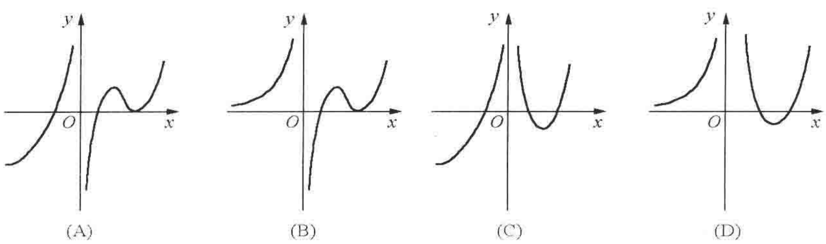
一、考研数学(数学二)考点分析

(一) 考查基本概念、基本理论、基本方法

从原则上讲,试卷中的选择题、填空题基本上都是反映出题者考查考生“三基”的意图的.

例1 设函数 $f(x)$ 在定义域内可导,$y=f(x)$ 的图形如右图所示,则导函数 $y=f'(x)$ 的图形为(　　).





【解析】 本题考查考生对于函数及其导数的性态,包括单调性、极值点等的理解掌握情况. 考生需熟悉以下结论：$f(x)$可导,则$f'(x)>0\Longrightarrow f(x)$单调上升;$f'(x)\geqslant 0\Longrightarrow f(x)$单调上升不减;反之,$f(x)$在某区间可导并单调上升,则$f'(x)>0$. 本题中,当$x<0$时,$f(x)$单调上升,则显然$f'(x)\geqslant 0\ (x<0)$,可排除(A),(C);当$x>0$时,$f(x)$的变化情况是先升后降再升,所以$f'(x)$相应的变化情况是正→负→正,所以(B)也可排除,综上知正确选项为(D).

【点评】 要求考生深刻理解函数及其导数的定义,以及各种性质之间的关系. 这一部分内容属于较基础的范畴,但在考研试题中出现的频率较高,应予以重视.

例 2 设$z=\dfrac{1}{x}f(xy)+y\varphi(x+y)$, f,φ具有二阶连续导数,则$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=$________.

【解析】 本题考查求复合函数的二阶混合偏导数的知识,求解步骤是常规性的,原则上本题为送分题,但仍有部分考生因概念不清而失分. 根据混合偏导数在连续的条件下与求导次序无关,可先求$\dfrac{\partial z}{\partial x}$或$\dfrac{\partial z}{\partial y}$,选择标准是计算繁简程度. 若先求$\dfrac{\partial z}{\partial x}$,则

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{1}{x^2}f(xy)+\frac{1}{x}f'(xy)y+y\varphi'(x+y).$$

再求$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$,则有

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}&=-\frac{1}{x^2}f'(xy)x+\frac{1}{x}f''(xy)xy+\frac{1}{x}f'(xy)+\varphi'(x+y)+y\varphi''(x+y)\\&=f''(xy)y+\varphi'(x+y)+y\varphi''(x+y).\end{aligned}$$

【点评】 关于复合函数求导的题目是比较基本的题型,要注意分清中间变量与自变量,对哪个自变量求导,尤其是注意不要漏项.

例 3 已知方程组

$$\begin{bmatrix}1&2&1\\2&3&a+2\\1&a&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\3\\0\end{bmatrix}$$

无解,则$a=$________.

【解析】 本题考查线性非齐次代数方程组无解的充分必要条件及增广矩阵,以及初等行变换等知识点,亦属于“三基”类题目. 先对增广矩阵做初等行变换：

$$\left[\begin{array}{ccc:c}1&2&1&1\\2&3&a+2&3\\1&a&-2&0\end{array}\right]\longrightarrow\left[\begin{array}{ccc:c}1&2&1&1\\0&-1&a&1\\0&a-2&-3&-1\end{array}\right]\longrightarrow\left[\begin{array}{ccc:c}1&2&1&1\\0&-1&a&1\\0&0&a^2-2a-3&a-3\end{array}\right].$$

若$a=-1$,则增广矩阵成为$\left[\begin{array}{ccc:c}1&2&1&1\\0&-1&-1&1\\0&0&0&4\end{array}\right]$,此时$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=2$,$\mathrm{r}(\overline{\boldsymbol{A}})=3$,显然方程组无解,即正确答案为$a=-1$. 本题较易让考生出错之处在于,当$|\boldsymbol{A}|=0$时,$a=-1$或$a=3$,但却忽视了当$|\boldsymbol{A}|=0$时,方程组可能无解或可能有无穷解. 这一点要牢记.

【点评】 线性代数方程组解的存在情况与系数矩阵、增广矩阵之间的关系要熟练

掌握.

例 4 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵, $\boldsymbol{B}$ 是 $n\times m$ 矩阵,则(　　).

(A) 当 $m>n$ 时,必有行列式 $|\boldsymbol{AB}|\neq 0$　　(B) 当 $m>n$ 时,必有行列式 $|\boldsymbol{AB}|=0$

(C) 当 $n>m$ 时,必有行列式 $|\boldsymbol{AB}|\neq 0$　　(D) 当 $n>m$ 时,必有行列式 $|\boldsymbol{AB}|=0$

【解析】 本题考查矩阵的秩、行列式的值等知识点. 由题设知, $\boldsymbol{AB}$ 是 $m\times m$ 矩阵. 方阵行列式为 0 的充分必要条件是其秩小于方阵阶数,此处即 $\mathrm{r}(\boldsymbol{AB})<m$. 由于

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{AB})\leqslant \mathrm{r}(\boldsymbol{B})\leqslant \min(m,n),$$

可见当 $m>n$ 时,必有 $\mathrm{r}(\boldsymbol{AB})\leqslant n<m$,从而可得出结论(B).

【点评】 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式 $|\boldsymbol{A}|=0\Longleftrightarrow$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 不可逆 $\Longleftrightarrow \mathrm{r}(\boldsymbol{A})<n\Longleftrightarrow \boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 有非 0 解 $\Longleftrightarrow 0$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 $\Longleftrightarrow \boldsymbol{A}$ 的行或列向量线性相关.

(二) 考查重要定理、重要公式

数学中有不少重要定理和公式,考生必须在正确理解的基础上加以灵活运用.

例 5 设函数 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上连续,且 $\int_0^\pi f(x)\,\mathrm{d}x=0$, $\int_0^\pi f(x)\cos x\,\mathrm{d}x=0$. 试证:在 $(0,\pi)$ 内至少存在两个不同的点 ξ_1,ξ_2,使 $f(\xi_1)=f(\xi_2)=0$.

【解析】 本题考查考生对零点定理、积分中值定理、罗尔定理等的灵活运用. 有以下两种较常见的解法:

解法 1　令 $F(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\ (0\leqslant x\leqslant \pi)$,显然 $F(0)=F(\pi)=0$. 由题设知

$$\int_0^\pi f(x)\cos x\,\mathrm{d}x=0,\quad 即\quad \int_0^\pi \cos x\,\mathrm{d}F(x)=0,$$

从而

$$F(x)\cos x\Big|_0^\pi+\int_0^\pi F(x)\sin x\,\mathrm{d}x=\int_0^\pi F(x)\sin x\,\mathrm{d}x=0.$$

由积分中值定理知,存在 $0<\alpha<\pi$ 使 $\pi F(\alpha)\sin\alpha=0$,而 $\sin\alpha\neq 0$,所以 $F(\alpha)=0$. 综上可知 $F(0)=F(\alpha)=F(\pi)=0$,由罗尔定理知, $\exists\xi_1\in(0,\alpha)$, $\xi_2\in(\alpha,\pi)$,使 $F'(\xi_1)=F'(\xi_2)=0$,即 $f(\xi_1)=f(\xi_2)=0$,证毕.

解法 2　反证法. 首先由积分中值定理知, $\exists\xi_1\in(0,\pi)$,使 $f(\xi_1)=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi f(x)\,\mathrm{d}x=0$. 然后假设 ξ_1 是 $f(x)$ 在 $(0,\pi)$ 内的唯一零点,则 $f(x)$ 在 $(0,\xi_1)$ 与 (ξ_1,π) 内不变号. 而由 $\int_0^\pi f(x)\,\mathrm{d}x=0$ 知 $f(x)$ 在 $(0,\xi_1)$ 与 (ξ_1,π) 内异号. 不失一般性,设 $(0,\xi_1)$ 内 $f(x)>0$,则 (ξ_1,π) 内 $f(x)<0$. 由已知 $\int_0^\pi f(x)\cos x\,\mathrm{d}x=0$, $\int_0^\pi f(x)\,\mathrm{d}x=0$ 及 $\cos x$ 在 $[0,\pi]$ 内单调递减得

$$\begin{aligned}0&=\int_0^\pi f(x)(\cos x-\cos\xi_1)\,\mathrm{d}x\\&=\int_0^{\xi_1} f(x)(\cos x-\cos\xi_1)\,\mathrm{d}x+\int_{\xi_1}^\pi f(x)(\cos x-\cos\xi_1)\,\mathrm{d}x>0,\end{aligned}$$

虽然矛盾. 由此在 $(0,\pi)$ 内除 ξ_1 外 $f(x)$ 至少还存在一个零点 ξ_2. 结论得证.

【点评】 高等数学中零点定理、积分中值定理等的运用,概念性、技巧性都很强,需经过大量练习才能掌握并灵活运用.

例 6 设 $e<a<b<e^2$,证明 $\ln^2 b-\ln^2 a>\frac{4}{e^2}(b-a)$.

【解析】 本题是求证函数不等式的问题,有以下两种基本证明方法:

证法 1 将待证不等式化为 $\frac{\ln^2 b-\ln^2 a}{b-a}>\frac{4}{e^2}$ 的形式. 观察此结构形式,可知是适用于拉格朗日中值定理的形式,所以令 $f(x)=\ln^2 x$,在 $[a,b]$ 区间上由拉格朗日中值定理得

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{\ln^2 b-\ln^2 a}{b-a}=f'(\xi)=2\frac{\ln\xi}{\xi},$$

其中 $\xi\in(a,b)\subset(e,e^2)$. 引入辅助函数 $\varphi(x)=\frac{\ln x}{x}$,则 $\varphi'(x)=\frac{1-\ln x}{x}$,当 $x>e$ 时 $\varphi'(x)<0$,从而 $\varphi(x)$ 在 $(e,+\infty)$ 内单调下降,因此 $\varphi(\xi)=\frac{\ln\xi}{\xi}>\varphi(e^2)=\frac{\ln e^2}{e^2}=\frac{2}{e^2}$,因此 $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=2\frac{\ln\xi}{\xi}>\frac{4}{e^2}$. 综上得出结论

$$\frac{\ln^2 b-\ln^2 a}{b-a}>\frac{4}{e^2}.$$

证毕.

证法 2 引入辅助函数 $F(x)=\ln^2 x-\ln^2 a-\frac{4}{e^2}(x-a)$,显然

$$F'(x)=\frac{2\ln x}{x}-\frac{4}{e^2},\quad F''(x)=\frac{2(1-\ln x)}{x^2}.$$

当 $x>e$ 时,$F''(x)<0$,则 $F'(x)$ 在 $(e,+\infty)$ 内单调下降.

当 $e<x<e^2$ 时,$F'(x)>F'(e^2)$,而 $F'(e^2)=0$,所以 $F'(x)>0$,$(x\in(e,e^2))$.

由此知 $F(x)$ 在 (e,e^2) 内单调上升,所以 $F(b)>F(a)=0$,即 $\ln^2 b-\ln^2 a-\frac{4}{e^2}(b-a)>0$,证毕.

【点评】 证明函数不等式问题的实质是利用导数性质判断函数正负号的问题,常用思路是利用单调性、极值点或中值定理加以证明.

二、考研数学(数学二)复习备考策略

研究生入学考试是选拔性考试,当然重在考查考生的能力高低. 能力是建立在基础之上的,基本功不扎实,一切都无从谈起. 从考试大纲来看,要求考生对基本知识、基本概念的掌握理解要深要透要准,尽管大学期间的期中和期末考试基本反映了这一要求,但从程度上讲,远没有考研的要求高. 因此,狠抓基础是一项必要的工作,虽然很多考生可能会认为基础的东西学起来有点费力不讨好,短期收效不明显,但笔者再三强调,不可轻视基础,必须夯实到理解得入木三分的程度.

总而言之,考研准备工作的第一阶段(当然周期长短因人而异)应落脚于基础知识、基本概念的学习、巩固. 第二阶段的展开要以第一阶段为前提,不可急功近利,跨越第一阶段. 进入第二阶段,主要工作就是训练、提高能力. 能力反映在解答题目的准确性和速度上,反映在思路是否开阔、严密上,这就需要大量练习,认真钻研各种题型. 在开始具体钻研考点、题目、技巧后,注意不必强迫自己将所有遇见的题目都做出来,总会碰到百

思不得其解的问题. 钻研固然是好事,但钻牛角尖则费时费力,得不偿失,此时可以借助于解答,只要彻底弄懂,下次再遇到同样的或同类型的问题可以顺利解决就行了. 尤其要注意的一点是,学习一个阶段后要善于自我归纳总结,不断从各类题目中提炼出最本质、最精髓、最易于自己掌握且应用起来得心应手的东西. 学而不思则罔,进入题海只是手段,不是目的,最终要跳出题海,站在更高角度看待题海。这就需要不断深入和卓有成效的思考.

经过了前两个阶段,考生应该已经有了长足的进步,最后一个阶段当然是冲刺阶段. 此时每个考生都可能会感到疲惫,甚至厌学,出现这样的心理反应并不可怕,可怕的是不能正确对待、自我调整. 临近考试,心理压力增大,体力、精力下降,学会自我调节、自我减负是顺利通过考试的有力保障. 这一阶段应以查缺补漏、归纳总结、实战模拟为主要内容. 其间,效率问题尤为重要,不能再过多投入精力于细枝末节,而要着眼于以点带面,让所有知识点、难点在脑海中以系统化的状态呈现出来. 实战模拟是不可或缺的,最好的模拟题当然就是历年的真题,但真题不仅要求做完、纠错,而且应该作为重点对象反复研究、体会,从中发现规律性的东西. 除此之外,还可多做一些其他的模拟试题,以强化熟练程度、解题技巧.

关于临场应试经验或技巧,笔者认为最重要的是心理素质要过硬. 经过长期准备之后,考生的大体水平已不会在短时间内有大的变化,能否考出好成绩,甚至超水平发挥,基本上取决于临场发挥. 考前最后阶段,一方面考生要学会心理状态调节,另一方面在实战模拟中培养考场应变能力. 题目有难有易,会做的一定要拿分,不会的尽量多答出一些可以拿分的环节,争取结果最优,千万不可患得患失,影响大局. 在实战模拟的每一套模拟题的解答中,学会估计真正应试中自己会遇到哪些困难,思想准备充分了,才能临阵不乱. 实际考试中,预料不到的困难也时有发生. 这大体上分为两种情况:一种是非技术性因素,即与知识水平、考题难易无关的因素,比方说答题时看错题目或漏答题目,考试用具出现差错等,这些虽属于低级失误,却可能造成不堪设想的后果,因此考生应在考前充分考虑周到,坚决杜绝;另一种就是纯技术性因素了,如遇见无从下手的题目或似曾相识但却不知所措的题目时,考生唯一要做的是平心静气,积极思考应对方法,切不可自乱阵脚. 事实上,考试意图中已包含了考查考生应对困难的能力,而不仅仅考查考生的知识水平. 总而言之,知识水平高、应对困难能力强者必然会脱颖而出.

本书是广大数学教师及原考研命题组的专家、教授智慧和劳动的结晶,是一份宝贵的资料. 其中的每一道试题,既反映了数学考试大纲对考生数学知识、能力和水平的要求,又蕴含着命题的指导思想、基本原则和趋势. 因此,对照考试大纲分析、研究这些试题,考生不仅可以了解考研以来数学考试的全貌,而且可以方便地了解有关试题和信息,从中发现规律,归纳出各部分内容的重点、难点,以及常考的题型,进一步把握考试的特点及命题的思路和规律,从而从容应考,轻取高分.

编者　于北大燕园

目 录

第一部分 高等数学

第二部分 线性代数

第一部分　高等数学

第1章　函数、极限与连续

第1节　函　数

大纲基本要求

(1) 理解函数的概念,掌握函数的表示法,并会建立应用问题中的函数关系.
(2) 了解函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性.
(3) 理解复合函数及分段函数的概念,了解反函数及隐函数的概念.
(4) 掌握基本初等函数的性质及图形,了解初等函数的概念.

一、基本概念

1. 函数的定义

定义　设 x 和 y 是两个变量,D 是一个给定的数集. 如果对于每个数 $x\in D$,变量 y 按照一定法则总有唯一确定的值和它对应,则称 y 是 x 的**函数**,记做 $y=f(x)$. 数值 D 叫做这个函数的**定义域**,x 叫做**自变量**,y 叫做**因变量**.

当 x 遍取 D 的各个数值时,对应的函数值全体组成的数集 $W=\{y\mid y=f(x),x\in D\}$ 称为函数的**值域**.

确定一个函数的**两要素**:定义域和对应法则.

命题人点拨

当且仅当两个函数的**定义域**和**对应法则**完全相同时,才表示同一函数.

2. 反函数

定义　设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D,值域为 W. 如果对于值域 W 中的任一 y 值,从关系式 $y=f(x)$ 中可确定唯一的一个 x 值,则称变量 x 为变量 y 的函数,记为 $x=\varphi(y)$,$\varphi(y)$ 称为函数 $y=f(x)$ 的反函数,习惯上 $y=f(x)$ 的反函数记为 $y=f^{-1}(x)$.

命题人点拨

(1) $y=f(x)$ 的图像与其反函数 $x=\varphi(y)$ 的图像**重合**;$y=f(x)$ 的图像与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图像关于直线 $y=x$ **对称**.

(2) 只有一一对应的函数才有反函数.

(3) 虽然 $y=f(x)$ 是单值函数,反函数 $x=\varphi(y)$ 却不一定是单值的. 只有 $y=f(x)$ 不仅单值,而且是严格单调的,其反函数 $x=\varphi(y)$ 在 W 上是单值的.

3. 基本初等函数

基本初等函数共有以下六个，其性质和图形必须牢记，在此就不一一复述了.

(1) 常数函数：$y(x)=c$.

(2) 幂函数：$y=x^a$（a 为常数）.

(3) 指数函数：$y=a^x$（a 是常数且 $a>0,a\neq1$）.

(4) 对数函数：$y=\log_a x$（a 是常数且 $a>0,a\neq1$），定义域 $(0,+\infty)$，它是指数函数 $y=a^x$ 的反函数.

(5) 三角函数：

正弦函数 $y=\sin x\ (-\infty<x<+\infty)$.

余弦函数 $y=\cos x\ (-\infty<x<+\infty)$.

正切函数 $y=\tan x$，$D=\left\{x\ \middle|\ x\in\mathbf{R},x\neq(2n+1)\dfrac{\pi}{2},n\in\mathbf{Z}\right\}$.

余切函数 $y=\cot x$，$D=\{x\mid x\in\mathbf{R},x\neq n\pi,n\in\mathbf{Z}\}$.

正割函数 $y=\sec x=\dfrac{1}{\cos x}$，$D=\left\{x\ \middle|\ x\in\mathbf{R},x\neq(2n+1)\dfrac{\pi}{2},n\in\mathbf{Z}\right\}$.

余割函数 $y=\csc x=\dfrac{1}{\sin x}$，$D=\{x\mid x\in\mathbf{R},x\neq n\pi,n\in\mathbf{Z}\}$.

(6) 反三角函数：

反正弦函数 $y=\arcsin x$，$x\in[-1,1]$，值域 $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$.

反余弦函数 $y=\arccos x$，$x\in[-1,1]$，值域 $[0,\pi]$.

反正切函数 $y=\arctan x$，$x\in(-\infty,+\infty)$，值域 $\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$.

反余切函数 $y=\operatorname{arccot} x$，$x\in(-\infty,+\infty)$，值域 $(0,\pi)$.

4. 复合函数

定义　设函数 $y=f(u)$ 的定义域为 D_f，$u=\varphi(x)$ 的定义域为 D_φ，$D=\{x\mid x\in D_\varphi$ 且 $\varphi(x)\in D_f\}\neq\varnothing$，则当 $x\in D$ 时，由 $y=f[\varphi(x)]$ 确定的函数称为 f 与 φ 的**复合函数**，而 u 称为**中间变量**.

5. 初等函数

由基本初等函数及其复合函数，以及由这些函数的四则运算组成的函数称为**初等函数**.

6. 其他常用函数

(1) 双曲函数：

双曲正弦：$\operatorname{sh}x=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$，定义域 $(-\infty,+\infty)$，奇函数.

双曲余弦：$\operatorname{ch}x=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$，定义域 $(-\infty,+\infty)$，偶函数.

双曲正切：$\operatorname{th}x=\dfrac{\operatorname{sh}x}{\operatorname{ch}x}=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$，定义域 $(-\infty,+\infty)$，奇函数.

(2) 符号函数：$y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0.\end{cases}$

（3）取整函数：$y=[x]$，y 是 x 的最大整数部分.

（4）狄利克雷函数：$y=f(x)=\begin{cases}1, & 当 x 为有理数时,\\ 0, & 当 x 为无理数时.\end{cases}$

命题人点拨

符号函数、取整函数与狄利克雷函数都是分段函数，一般的分段函数不是初等函数.

二、函数的基本特性

1. 有界性

定义　若存在 $M>0$，使得对任意 $x\in I\subset D$，都有 $|f(x)|\leqslant M$ ($f(x)\leqslant M$ 或 $f(x)\geqslant -M$)，则称 $f(x)$ 在 I 上**有界**（有**上界**或**下界**）；若不存在这样的 $M>0$，则称 $f(x)$ 在区间 I 上**无界**.

命题人点拨

无穷大与无界函数的区别：在一定变化趋势下 $f(x)$ 为无穷大，则 $f(x)$ 一定无界；若 $f(x)$ 在某个区间上无界，则 $f(x)$ 不一定是无穷大.

2. 单调性

定义　若对于任意的 $x_1,x_2\in(a,b)$，当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 上**单调增加**；若对于任意的 $x_1,x_2\in(a,b)$，当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在区间 (a,b) 上**单调减少**.

命题人点拨

不是所有函数都有单调性. 例如狄利克雷函数就没有单调性.

3. 函数的奇偶性

定义　设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点**对称**（即若 $x\in D$，则必有 $-x\in D$）. 如果对于任一 $x\in D$，有 $f(-x)=f(x)$ 恒成立，则称 $f(x)$ 为**偶函数**. 如果对于任意 $-x\in D$，$f(-x)=-f(x)$ 恒成立，则称 $f(x)$ 为**奇函数**.

命题人点拨

（1）奇函数图形关于原点对称，偶函数图形关于 y 轴对称.

（2）奇函数满足 $f(x)+f(-x)=0$.

（3）定义域一定要对称.

（4）奇函数或偶函数运算具有以下结论：

奇函数 ± 奇函数 = 奇函数；偶函数 ± 偶函数 = 偶函数；奇函数 ×（÷）奇函数 = 偶函数；偶函数 ×（÷）偶函数 = 偶函数；奇函数 ×（÷）偶函数 = 奇函数.

4. 周期性

定义　设函数 $f(x)$ 的定义域为 D. 如果存在一个不为零的数 l，使得对于任意 $x\in D$ 有 $(x\pm l)\in D$，且 $f(x+l)=f(x)$ 恒成立，则称 $f(x)$ 为周期函数，l 称为 $f(x)$ 的**周期**，通常我们说周期函数的周期是指最小正周期.