非光滑多体系统动力学LCP方法

富立 著

清华大学出版社

非光滑多体系统动力学LCP方法

富立 著

清华大学出版社
北 京

内容简介

本书主要内容包括经典多刚体系统动力学理论、现代非光滑多体系统动力学理论以及作者在这一领域的主要研究工作。书中将非光滑多体系统动力学模型分为拉格朗日模型和牛顿-欧拉模型，并详细地论述了两种不同类型的非光滑多体系统动力学的LCP建模与数值方法。书中介绍了作者所从事的非光滑力学某些专题研究，如含摩擦双边约束的多体系统动力学建模与数值方法，高阶时间步进算法以及非光滑多体系统最大Lyapunov指数的计算方法等。本书的目标是将现代非光滑力学的基本概念、基础理论与基本方法以及作者在这一领域的研究工作一并呈现给读者。期望能对从事相关领域工作的高年级大学生、研究生、教师和科技人员有一定的参考作用。

图书在版编目(CIP)数据

非光滑多体系统动力学LCP方法/富立著. —北京：清华大学出版社，2016

ISBN 978-7-302-45004-7

Ⅰ. ①非…　Ⅱ. ①富…　Ⅲ. ①多体动力学—系统建模 ②多体动力学—计算方法 ③系统动态学—系统建模 ④系统动态学—计算方法　Ⅳ. ①O313.7 ②N941.3

中国版本图书馆CIP数据核字(2016)第208311号

责任编辑：付弘宇　柴文强
封面设计：何凤霞
责任校对：焦丽丽
责任印制：宋　林

出版发行：清华大学出版社
　　网　址：http://www.tup.com.cn，http://www.wqbook.com
　　地　址：北京清华大学学研大厦A座　　**邮　编**：100084
　　社总机：010-62770175　　**邮　购**：010-62786544
　　投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
　　质量反馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
　　课件下载：http://www.tup.com.cn，010-62795954
印 刷 者：三河市君旺印务有限公司
装 订 者：三河市新茂装订有限公司
经　　销：全国新华书店
开　　本：170mm×230mm　　**印　张**：14.25　　**字　数**：207千字
版　　次：2016年7月第1版　　**印　次**：2016年7月第1次印刷
印　　数：1～1000
定　　价：49.80元

产品编号：063894-01

前　言

力学是数学通往工程实际的桥梁，也是最古老的科学之一。许许多多杰出的科学家已经或者将要在这个神奇的领域留下他们奋斗的足迹。其中最著名的科学家是牛顿，牛顿运动定律开启了用微分方程描述力学系统运动的先河。

计算机技术的日益强大以及微分方程数值方法的不断发展，使得世界各地的工程师可以通过简便快捷的数值计算预测他们所关心的物理系统的行为。不只是力学，计算机仿真的潮流汹涌澎湃，横扫了几乎所有的科学分支。尽管数值仿真可能不能直接解决现实中的工程问题，但它有助于更好地理解力学系统运动的特征，是最终解决实际工程问题的重要环节之一。根据实际问题的不同，用计算机解决问题的方式亦有不同，对于复杂大型的实际工程问题，更多地采用专业软件进行计算求解。同样也有大量的问题，只需简单编程即可得到问题的数值解。这种方法即节约成本，又方便快捷。本书中求解问题的方法属于后一种方法。

计算机技术对力学建模方法也提出了新的要求。“前计算机”时代的力学致力于适合于手工计算的精练的数学模型。例如用最少数目坐标建立系统运动微分方程的拉格朗日模型。“后计算机”时代的力学考虑如何建立适合于计算机计算的简单通用的数学模型。例如采用最大数目坐标建立系统运动微分方程的牛顿-欧拉模型。计算机适于处理大规模数据但智能有限，而人类恰恰相反。随之产生的问题是如何更好地使人类和计算机两种不同的工作方式相互促进并互为补充。多体系统中的牛顿-欧拉模型便是适合这种变化的例子。牛顿-欧拉模型中的代数微分方程不适用于手工计算，却适用于计算机建立约束多体系统通用模型，它是多体系统动力学的主要建模方法之一。拉格朗日模型除适用于简单系统的手工计算之外，同样地适用

于计算机建立多体系统的通用模型，它是多体系统动力学的另一种基本建模方法。本书以上述两种模型为主线介绍经典多体系统以及现代非光滑多体系统动力学的主要内容。

计算机技术的日益发展也将新的问题带入力学。优秀的理论体系已经建立，但将其应用于求解实际问题时却遇到艰难的挑战。现代非光滑力学就是这样的领域之一。不同于经典力学，非光滑力学系统的时间演化不再是连续、光滑的。这样的系统，比如带有摩擦、碰撞的力学系统，在现实世界中无所不在，但人类对该类系统的建模与计算方法还知之甚少。对非光滑力学最重要的贡献要追溯到 20 世纪 80 年代末法国应用数学家 Jean Jacques Moreau 的开创性工作。在理论上，Moreau 用含不等式的测度微分方程替代了经典力学中的运动微分方程和约束方程。测度微分方程不仅能求解光滑的经典力学问题，还可以处理运动过程中的滞滑转换和碰撞等非光滑事件。因此，Moreau 的工作不仅仅是将经典力学理论推广到了非光滑的特殊情形，它真正的意义是建立了涵盖经典力学的全新的理论。除了以上杰出的理论工作之外，Moreau 还给出了相应的数值积分方法，将他建立的数学理论与实际应用联系在一起。本书内容是将 Moreau 理论在多体力学中的应用。

我在北京航空航天大学攻读一般力学博士学位期间走进现代非光滑力学领域，至今已在这一领域耕耘了十余年。将本人的相关研究工作进行整理归纳，努力将艰深的非光滑力学理论通俗化，便构成了本书的主要内容。感谢北京航空航天大学王琪教授、陆启韶教授等在学术上给予的指导和启发。感谢华北理工大学刘保相教授的支持和鼓励，感谢河北省自然科学基金、华北理工大学重点学科资金的资助。感谢刘云川、李志华、郑玉、孙舒、李丽红等各位老师对本书稿的审阅和建议。

富　立

2016 年 4 月河北唐山

目　录

第0章 引 论

1. 现代非光滑力学简介

人类对带有摩擦、碰撞等非光滑因素的力学问题的探索有着十分悠久的历史。一方面,该领域的研究在实际中获得了广泛的应用,而另一方面,该领域的研究却一直缺乏严格的数学基础。最近二十多年以来,这种状况得到了根本性的改变。1988 年,被称为非光滑力学之父的 J. J. Moreau 发表了他的代表性论文[1],将凸分析的理论与测度微分包含理论相结合用于求解含摩擦、碰撞的刚体动力学问题,奠定了非光滑力学的数学与力学基础,Panagiotopoulos 引入非凸变分不等式完善了这一新理论[2,3]。F. Pffeifer、Ch. Glocker 等成功地将多体系统动力学与非光滑力学理论相结合,奠定了非光滑多体系统动力学的理论基础[4]。在这样的背景之下,一门历史悠久而又崭新的学科——非光滑力学(Nonsmooth Mechanics)应运而生。非光滑力学理论同非线性动力学理论一起被认为是 20 世纪对经典力学产生重要而深远影响的两个新兴理论。在创建描述非光滑演化过程的理论方面,古老的力学学科又一次站在了科学的前沿扮演了领跑者的角色。

近三十年来,非光滑多体系统动力学在基础理论及应用研究等方面均取得显著进展并成为力学研究的热门领域之一。非光滑多体系统动力学研究包含摩擦、碰撞等非光滑因素在内的多体系统的运动规律。目前非光滑多体系统动力学的应用领域十分广泛,其中包括:计算机图形学[5,6],航空航天技术(如空间机械臂的控制[7],飞机起落架的受力分析[7],航天器的对接与分离问题等),机车车辆的设计与动力学分析[8],复杂机械和机器人的设计与控制(如涡轮叶片的减振[7],机械碰振分析[9,10]与避碰优化设计[11],机械

中轴孔装配问题[12]，含间隙铰链的机械运动[13,14]，行走机器人步态分析[15,16]，干摩擦引起的振颤现象[17-20]），建筑结构动力学及控制[21]，颗粒物质动力学[22-24]等等。

2. 国内外研究进展

目前，非光滑力学是力学科学研究的热点领域之一，相关文献涉猎内容广泛，观点众多。以下仅就与非光滑多体系统动力学相关的基础理论及数值方法两个方面以及国内相关的研究文献做简要回顾。

(1) 基础理论方面

含摩擦及碰撞的非光滑力学问题的本质特征是在运动的描述中出现了不等式约束。由光滑到非光滑最根本的转变就是由等式到不等式的转变。研究非光滑力学的关键是摆脱以往习惯的等式和方程的禁锢，取而代之用不等式或包含的方法去思考和处理问题，这就决定了非光滑力学的创立与发展必须采用新的理论工具以及新的数学方法。

Filippov[25-27]对不连续右端项的常微分方程做了深入研究并首次将微分方程的概念推广为微分包含（Differential Inclusion），因此又将状态变量连续、右端项不连续的微分方程系统称为 Filippov 系统。含库仑摩擦的动力系统是典型的 Filippov 系统，但该理论要求状态变量是连续的，因此不适用于刚体碰撞问题的研究。Schatzman[28-31]将微分包含理论进一步推广为测度微分包含（Measure Differential Inclusion，MDI）理论。该理论可用于研究刚体摩擦及碰撞问题，是非光滑力学的重要理论基础之一。Moreau[1]成功地将测度微分包含理论与凸分析理论应用于单边约束刚体动力学问题，奠定了非光滑力学的数学与力学基础。在 Moreau 工作的基础上，Panagiotopoulos[2,3]引入了非凸变分不等式，丰富与完善了这一新理论。以测度微分包含、凸分析等理论作为基础理论框架，非光滑力学的一些基本问题诸如解的存在与唯一性，数值解的稳定性与收敛性，非光滑控制以及非光滑动力系统等方面均取得突破性进展。这方面的研究进展与文献与本书内容联系不大，故不在此详述。

(2) 数值方法方面

目前非光滑力学的数值方法主要分为两大类，即事件驱动算法(Event-Driven Scheme)以及时间步进算法(Time-Stepping Scheme)。

事件驱动算法以力及加速度为未知量，属高阶算法，在积分过程中，需要对状态转换进行检测。无状态转换时，系统运动是光滑的，可用标准的 ODE (Ordinary Differential Equations)或 DAE(Differential Algebra Equations)方法进行积分。状态转换发生时，积分停止，用 LCP(Linear Complementarity Problem)方法或增广拉格朗日方法(Augmented Lagrangian formulation)计算接触力。代表性的算法有 Baraff 算法，修正的 Moreau 算法以及 Pfeiffer-Glocker 算法等。

Baraff 算法[5,6,32,33]

Baraff 的研究工作是计算机图形与动画中的接触问题，主要研究接触力的计算、提高计算速度的特殊方法以及求解 LCP 及 NLCP 的数值方法等。文献[32]讨论了刚体动力学仿真中诸多方面的问题，如 Painlevé 问题、三维摩擦问题以及 LCP 的算法问题等。早期求解 LCP 的主要方法是 Lemke 转轴算法，Baraff 提出的 Dantzig 算法开辟了 LCP 数值求解的新途径。

修正的 Moreau 算法

在某些工程应用中，基于速度-冲量的步进算法不能满足计算精度要求，这时需要采用基于加速度-力的事件驱动算法。文献[34-37]提出的算法是对 Moreau 算法的修正。修改后的算法可以进行事件检测和接触力的计算。通过实际测试，上述算法得出的结果比基于罚函数的算法更为可靠。

Pfeiffer-Glocker 算法

Pfeiffer，Glocker 等在文献[12]中给出了带单边约束多体系统的基于加速度-力的一般计算公式。文中以凸分析方法作为基本工具推导单边约束互补条件，将含摩擦与碰撞的多体动力学问题转化为 LCP 或 NLCP 问题进行求解。文献[12]只给出含摩擦的二维问题的求解方法。文献[38]将前面的方法推广为三维的情况。文献[13，14]将上述 Pfeiffer-Glocker 算法应用于带有间隙铰链的多体系统。

与事件驱动算法不同，时间步进算法以冲量及速度为未知量，属低阶算法。该方法将系统动力学方程及约束离散化。离散化的方程用于计算下一步运动状态。代表性的算法有 Lötstedt 算法，Moreau 的“sweeping process”方法以及 Steward，Anitescu 等人的速度-冲量方法等。

Lötstedt 算法

Lötstedt(1982)最早将单边约束问题化为数学规划中的线性互补问题来研究。文献[39,40]采用的时间离散化方法是基于加速度-力的，之所以将其归入时间步进算法是因为 Lötstedt 将动力学方程及速度互补条件离散化，进而推出以接触力为未知量的 LCP 或 NLCP，这种离散化之后推出 LCP 的方法与时间步进算法相同。

Lötstedt 的开拓性工作是 Moreau，Panagiotopoulos 等研究工作的重要基础。

sweeping process 方法

Moreau 的“sweeping process”方法[1,41-43]是对一般形式的 MDI(测度微分包含)进行时间离散化的方法，采用该方法对非光滑多体系统仿真时无须对法向碰撞及切向摩擦进行连续化处理，是真正意义上的非光滑方法。文献[41]利用凸分析工具将抽象的 MDI 离散理论转换为简明直观的形式。

速度-冲量方法

从事这一方法研究的学者有：Stewart，Trinkle，Pang，Anitescu 和 Potra 等。

Stewart[44-47]在 Lötstedt、Moreau 的研究基础上给出了不同的时间离散化方法，该方法可以看做是求解 DAE(微分代数方程)的半隐式欧拉法的一种变形。Anitescu 等在文献[48]中将三维摩擦接触问题化为 LCP 来处理，利用最大耗散原理的 Kuhn-Tuckert 条件引入松弛变量，以多棱锥近似替代摩擦锥使其线性化。由于采用了摩擦锥线性化方法，约束互补条件也随之变化。增加多棱锥的棱数虽然能够减少误差，但在每一步积分中需要求解的 LCP 的数目也会增加，为此 Glocker[49]所提出的方法，将研究目标从近似摩擦锥的方向转到了减少方程个数的方向上。

文献[50]对含有光滑铰链约束,单边约束及库仑摩擦的多体系统给出了基于LCP的时间步进算法公式,同时给出了几何约束的稳定化方法。文献[51]采用类似线性隐式欧拉方法处理摩擦接触问题中的刚性问题。文献[23]采用基于优化的步进方法数值仿真带有摩擦接触及非弹性碰撞的多体系统。该算法在数值积分的每一步需要求解一个严格凸的二次规划问题。文献[52]提出了变步长的步进算法策略。文献[53]、[54]对含大量摩擦接触的多体系统给出相应数值算法并结合并行算法得以实现。

(3) 国内相关研究进展

我国学者刘才山,赵振[24,56-58]等深入研究了由于接触摩擦引起的Painleve疑难问题;多点碰撞动力学问题;具有线、面等协调几何接触外形的含摩擦的接触碰撞等动力学问题。

王琪[10,14,16]等人将非光滑多体系统动力学理论应用于含摩擦滑移铰的运动机构,蛙式打夯机、被动行走器等实际机构的数值仿真与模拟,富立[59-62]对含摩擦的双边约束问题,非光滑多体系统的李指数(Lyapunov指数)计算方法,微分代数方程与LCP混合求解方法等问题开展研究。

洪嘉振[63-65],白争锋[66-67]等对柔性多体系统的接触碰撞问题展开研究。针对工程中常见的柔性多体系统的碰撞过程,基于等效弹簧阻尼模型建立柔性体碰撞模型,分析接触碰撞过程的动力学性能,其研究重点在于分析柔性多体系统在碰撞瞬间的动力学特征。

3. 本书的目标与内容

本书在上述研究背景之下,对现代非光滑多体系统动力学理论进行系统的总结。首次将非光滑多体系统动力学模型分为拉格朗日模型和牛顿-欧拉模型,并详细地论述了两种不同类型的非光滑多体系统动力学的LCP建模与数值方法。在上述基础上进一步研究了某些专题,如含摩擦双边约束的多体系统动力学建模与数值方法,高阶时间步进算法以及非光滑多体系统最大Lyapunov指数的计算方法等。本书的目标是将现代非光滑力学的基本概念、基础理论与基本方法以及作者在这一领域的研究成果一并呈现

给读者。期望能对从事相关领域工作的硕士研究生、博士研究生及研究人员有一定的参考作用。

第 1 章简单介绍非光滑多体系统动力学相关的基础知识。该章的重点内容是介绍为什么要引入 LCP 方法(1.2 节)以及非光滑分析的若干基本概念(1.4 节)。

第 2 章介绍了经典的多刚体系统运动学理论。介绍了多刚体系统位置分析、速度分析和加速度分析的基本方法,包括经典分析方法以及计算机分析方法。

第 3 章介绍了经典多刚体系统动力学方法。该章主要介绍经典多刚体系统动力学的两类建模与计算方法。一类是拉格朗日方法,该方法选取最少数目的独立广义坐标,系统运动由一组常微分方程来描述;另一类是牛顿-欧拉方法,该方法选取最大数目的非独立广义坐标,系统运动由一组微分-代数方程来描述。

第 4 章介绍接触运动学以及接触定律。接触运动学的目的是建立精简的几何接触方程。本章分两种情况推导接触运动学方程,一种是平面接触的情况,一种是空间接触的情况。要研究接触动力学问题除了接触运动学知识之外,还要考虑接触运动中力与运动的本构关系——即接触定律。该章介绍接触定律的互补形式和凸数学形式。

第 5 章介绍非光滑多体系统的拉格朗日模型及其数值算法。拉格朗日模型首先以基本系统的独立广义坐标建立基本系统的动力学方程。然后借助约束雅可比矩阵在基本动力学方程中添加切向摩擦力及相应的法向接触力,即可得到系统全局运动的拉格朗日动力学方程。数值方法有事件驱动算法和时间步进算法两大类。

第 6 章介绍非光滑多体系统的牛顿-欧拉模型及其数值算法。牛顿-欧拉模型首先以基本系统的绝对笛卡儿坐标建立基本系统的动力学方程。然后借助约束雅可比矩阵在基本动力学方程中添加切向摩擦力及相应的法向接触力,即可得到系统全局运动的牛顿-欧拉动力学方程。数值方法同样分为事件驱动算法和时间步进算法两大类。

第 7 章介绍作者本人所做的一些专题研究，包括含摩擦双边约束的多体系统动力学建模与数值方法，高阶时间步进算法以及非光滑多体系统最大 Lyapunov 指数的计算方法等。

本书中的算例均采用 MATLAB 程序指令编写。第 5、第 6 和第 7 章的算例中，求解 LCP 的指令 LCP 不是 MATLAB 的自建函数，该指令对应的 MATLAB 函数参见本书附录。

第 1 章 基础知识

在介绍本书的主要内容之前，先简单介绍一下相关的基础知识，主要是非光滑多体系统动力学相关的基础知识。本章内容的主要参考文献为[12,68,69]。

1.1 刚性接触与柔性接触

不论对刚体还是柔性体，我们均采用刚性接触模型。刚性接触模型在建立系统动力学方程时无须考虑物体内的波动效应。物体之间的碰撞以及接触中的触离转换、滞滑转换均被视为是瞬间完成的，这种瞬态变化规律可以通过第 4 章的接触定律来描述。法向上的碰撞定律采用牛顿定律或泊松定律。牛顿定律通过牛顿恢复系数表示碰撞前后的速度关系。泊松定律将碰撞分为压缩阶段与解压缩阶段，用泊松恢复系数表示压缩阶段储存的动量与解压缩阶段释放的动量之间的关系。切向上的接触定律采用经典的库仑摩擦定律，即摩擦力方向与相对滑动或相对滑动趋势方向相反，大小与法向压力成正比。碰撞系数和摩擦系数均可以通过实验测得。刚性接触模型避开了柔性接触模型遇到的数值求解刚性微分方程的困难，但付出的代价是引入了更复杂的数学理论。多点摩擦、碰撞问题中，当一点接触状态改变时，如触离状态的改变、滞滑状态的改变或发生碰撞，都会影响到其他所有点的接触状态，为此必须搜寻系统在下一时刻新的接触状态。搜寻新接触状态的一个严格方法是将问题化为一个线性互补问题（Linear Complementarity Problem，LCP）来处理，通过标准的数值算法进行求解。而柔性接触模型，一般采用较复杂的摩擦定律，在状态转换时间较长的情况下采用。柔性接触模型需要采用偏微分方程理论研究波动效应，通过有限