全新升级版

全国十二大考研辅导机构指定用书

2013王式安·李永乐考研数学系列

数学复习全书

数学三

SHUXUE FUXI QUANSHU (SHUXUESAN)

主编 李永乐 王式安

编委 "高数"：武忠祥 蔡燧林
"线代"：李永乐 胡金德 "概率论"：王式安

DVD 超值赠送

1. 考研数学基础导学课程视频
2. 《数学复习全书习题全解》

强强联手／最具实力辅导名师、考研出版专业大社、金榜品牌鼎力合作
全新升级／体例结构科学合理、内容讲解精准到位、导学视频超值赠送

西安交通大学出版社
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY PRESS

全国十二大考研辅导机构指定用书

2013王式安·李永乐考研数学系列

数学复习全书

数学三

SHUXUE FUXI QUANSHU (SHUXUESAN)

主编 李永乐 王式安

编委：北京理工大学 王式安
清 华 大 学 李永乐
西安交通大学 武忠祥
清 华 大 学 胡金德
浙 遂林
(按姓

西安交通大学出版社
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

数学复习全书.数学.3/李永乐,王式安主编.—
西安:西安交通大学出版社,2011.4
ISBN 978-7-5605-3895-2

Ⅰ.①数… Ⅱ.①李… ②王… Ⅲ.①高等数学—研
究生—入学考试—自学参考资料 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2011)第057758号

敬告读者

本书封面粘有专用防伪标识,凡有防伪标识的为正版图书,敬请读者识别。

数学复习全书(数学三)

主　　编:李永乐　王式安
策　　划:张伟　陈丽
责任编辑:邹林　田华　李佳
装帧设计:金榜图文设计室
出版发行:西安交通大学出版社
地　　址:西安市兴庆南路10号(邮编:710049)
电　　话:(029)82668315　82669096(总编办)
　　　　　(029)82668357　82667874(发行部)
印　　刷:保定市中画美凯印刷有限公司
开　　本:787mm×1092mm　1/16
印　　张:30.5
字　　数:723千字
版　　次:2012年2月第2版
印　　次:2012年2月第1次印刷
书　　号:ISBN 978-7-5605-3895-2/O·357
定　　价:58.00元

图书如有印装质量问题,请与印刷厂联系调换　电话:(010)82570560

前言

为了帮助广大考生能够在较短的时间内，准确理解和熟练掌握考试大纲知识点的内容，全面提高解题能力和应试水平，本书编写团队依据15年的命题与阅卷经验，并结合10多年的考研辅导和研究精华，精心编写了本书，真正起到帮助同学们提高综合分析和综合解题的能力。

一、本书的编排结构

1. **考点与要求**　设置本部分的目的是使考生明白考试内容和考试要求，从而在复习时有明确的目标和重点。

2. **内容精讲**　本部分对考试大纲所要求的知识点进行全面阐述，并对考试重点、难点以及常考知识点进行深度剖析。

3. **例题分析**　本部分对历年真题中常见的题型进行归纳分类，总结各种题型的解题方法，注重一题多解，以便能够开阔考生的解题思路，使所学知识融会贯通，并能灵活地解决问题。针对以往考生在解题过程中普遍存在的问题及常犯的错误，给出相应的注意事项，对有难度的例题给出解题思路的分析，以便加强考生对基本概念、公式和定理等内容的理解和正确运用。

4. **自测题**　只有适量的练习才能巩固所学的知识，数学复习离不开做题。为了使考生更好地巩固所学知识，提高实际解题能力，本书作者精心优化设计了一定数量的与真题难度相近的题目作为练习题，供考生练习，以便使考生在熟练掌握基本知识的基础上，达到轻松解答真题的水平。同时，本书精选的练习题，都配备了详细的参考答案和解题提示，为考生解答疑难问题给出详细的指导，真正达到一书在手，犹如名师在侧的境界。

二、本书的主要特色

1. **权威打造**　命题专家和阅卷专家联袂打造，站在命题专家的角度命题，站在阅卷专家的角度解题，为考生提供最权威的复习指导。

2. **综合提升**　与其他同类图书相比，本书加强了考查知识点交叉出题的综合性，真正起到帮助考生提高综合分析和综合解题的能力。

3. **分析透彻**　本书既从宏观上把握考研对知识的要求，又从微观层面对重要知识点进行深入细致的剖析，让考生思路清晰、顺畅。

4. **一题多解**　对于常考热点题型，均给出巧妙、新颖、简便的几种解法，拓展考生思维，锻炼考生知识应用的灵活性。这些解法均来自各位专家多年教学实践总结和长期命题阅卷经验。

5. **解析全面**　本书附赠送《数学复习全书习题全解》，以便于考生迅速浏览答案，检验学习效果，并且明确解题过程，学习多种解题方法。

建议考生在使用本书时不要就题论题，而是要多动脑，通过对题目的练习、比较、思考，总结并发现题目设置和解答的规律性，真正掌握应试解题的金钥匙，从而迅速提高知识水平和应试能力，取得理想分数。

另外，为了更好地帮助同学们进行复习，“李永乐考研数学辅导团队”特在网络上开设答疑专区，同学们在考研数学复习中，如若遇到任何问题，即可在线留言，团队老师将尽心为你解答。详情见“金榜教育网”首页(www.jinbangjiaoyu.com)。

最后，本书的成稿还要感谢考研数学原命题组组长单立波老师和中国人民大学师潭老师在编校过程中所付出的努力。

希望本书能对同学们的复习备考带来更大的帮助。对书中的不足和疏漏之处，恳请读者批评指正。

祝同学们复习顺利，心想事成，考研成功！

编 者

2012 年 2 月

目录

第六章 二次型

第三篇 概率论与数理统计

第一章 随机事件与概率

第二章 随机变量及其概率分布

第三章 多维随机变量及其分布

第一篇　微积分

第一章　函数　极限　连续

考点与要求

理解　掌握　函数的概念及其表示法，复合函数与分段函数，基本初等函数的性质及其图形，极限的概念与左、右极限的概念以及它们之间的关系，极限的性质及其运算法则，极限存在的两个准则与两个重要极限，无穷小与无穷大的概念以及它们之间的关系，无穷小的比较的概念并会用等价无穷小替换定理求极限，几个重要的等价无穷小，洛必达法则，函数的连续与左、右连续，闭区间上连续函数的性质（有界性，最大最小值定理，介值定理，零点定理）.

会求　了解　函数的单调性、奇偶性、周期性与有界性，建立简单应用问题的函数关系，反函数与隐函数的概念，初等函数的概念，佩亚诺余项泰勒公式并用它求某些极限，判别函数的间断点及其类型，基本初等函数的连续性及初等函数的连续性.

§1　函　数

内容精讲

一、定义

定义 1.1.1（邻域）　设 $\delta>0$，实数集 $U_\delta(x_0)=\{x \mid |x-x_0|<\delta\}$ 称为 x_0 的 δ 邻域，如果不必说及邻域半径 δ 的大小，则简记为 $U(x_0)$，称为 x_0 的某邻域，$\mathring{U}_\delta(x_0)=\{x \mid 0<|x-x_0|<\delta\}$ 称为 x_0 的去心 δ 邻域，类似地有记号 $\mathring{U}(x_0)$ 及相应的名称.

此外还有 x_0 的左（右）半 δ 邻域与 x_0 的左（右）半去心 δ 邻域等概念.

引入 ∞ 的（去心）邻域一词在今后的叙述上会带来一些方便. 这是指 $U=\{x \mid |x|>X\}$，其中 X 为充分大的正数.

定义 1.1.2（函数）　设有两个变量 x 与 y，X 是一个非空的实数集. 若存在一个对应规

则 f,使得对于每一个 $x \in X$,按照这个规则,y 有唯一确定的实数值与之对应,则称 f 是定义在 X 上的一个函数,x 称为自变量,X 称为函数 f 的定义域,y 称为因变量. 函数 f 在 $x \in X$ 对应的

$$y = f(x), \quad x \in X$$

的函数值所成的集合,常记为 Y,$Y = \{y \mid y = f(x), x \in X\}$ 称为函数的值域,以后"实数"的实字常省去,习惯上,也称 y 或 $f(x)$ 为 x 的函数.

在定义域的不同部分用不同的解析式表示的函数称为分段函数.

【注】 分段函数是一个函数,不能认为每一段是一个函数、是多个函数.

常见的几种分段函数:

绝对值函数(其图像如图 1-1)

$$y = |x| = \begin{cases} x, & x > 0; \\ 0, & x = 0; \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

符号函数(其图像如图 1-2)

$$y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0; \\ 0, & x = 0; \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

它表示 x 的符号. 显然有 $|x| = x\operatorname{sgn} x, \quad x \in (-\infty, +\infty)$.

取整函数$[x]$,它表示不超过x的最大整数. 例如,$[3.2] = 3$,$[4] = 4$,$[-\pi] = -4$. 一般地,$[x] = n$,当 $n \leqslant x < n+1$,$n = \cdots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots$.

$y = [x]$ 的图像如(图 1-3),显然有性质:

对于 $x \in (-\infty, +\infty)$,有$[x] \leqslant x < [x] + 1$,且$[x+1] = [x] + 1$.

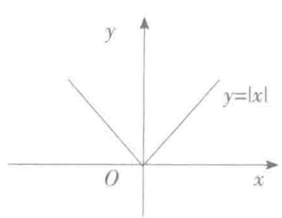

图 1-1

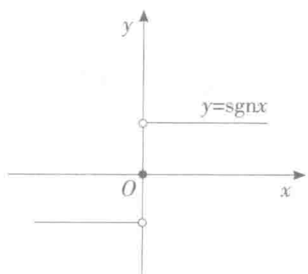

图 1-2

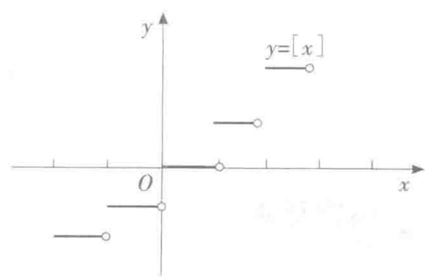

图 1-3

定义 1.1.3(隐函数) 设 x 在某数集 X 内每取一个值时,由方程 $F(x,y) = 0$ 可唯一确定一个 y 的值,则称由 $F(x,y) = 0$ 确定一个隐函数 y,虽然不一定能将 y 明显地解出来.

定义 1.1.4(函数的单调性) 设函数 $f(x)$ 在数集 X 上有定义,如果对于任意的 $x_1 \in X, x_2 \in X, x_1 < x_2$,就一定有

$$f(x_1) \leqslant f(x_2) \ (f(x_1) \geqslant f(x_2))$$

则称 $f(x)$ 在 X 上是单调增加(减少)的. 如果一定有

$$f(x_1) < f(x_2), (f(x_1) > f(x_2))$$

则称 $f(x)$ 在 X 上是严格单调增加(减少)的.

定义 1.1.5(函数的奇偶性)　设函数 $f(x)$ 在对称于原点的某数集 X 上有定义,并且对于任意 $x \in X$,必有 $f(-x) = f(x)$($f(-x) = -f(x)$),则称 $f(x)$ 在 X 上是偶(奇)函数.

在直角坐标系 xOy 中,偶函数的图像关于 y 轴对称,奇函数的图像关于坐标原点 O 对称.

定义 1.1.6(函数的周期性)　设 $f(x)$ 的定义域是数集 X,如果存在常数 $T>0$,当 $x \in X$ 时,有 $x \pm T \in X$,并且 $f(x+T) = f(x)$,则称 $f(x)$ 为周期函数,T 称为它的一个周期.通常称的周期是指使 $f(x+T) = f(x)$ 成立的最小正数 T(如果存在的话).

在直角坐标系中,将 $f(x)$ 的图像向左、右按周期平移,便得 $f(x)$ 的整个图像.

定义 1.1.7(函数的有界性)　设函数 $f(x)$ 在数集 X 上有定义,如果存在常数 M,当 $x \in X$ 时 $f(x) \leqslant M$,则称 $f(x)$ 在 X 上有上界;如果存在 m,当 $x \in X$ 时 $f(x) \geqslant m$,则称 $f(x)$ 在 X 上有下界;如果 $f(x)$ 在 X 上既有上界又有下界,则称 $f(x)$ 在 X 上有界.

有界函数的图象位于节域 $m \leqslant y \leqslant M$ 之中.

定义中的 m 与 M 分别为 $f(x)$ 在 X 上的下界与上界.显然,如果 $m(M)$ 是 $f(x)$ 在 X 上的下(上)界,则比 m 小(比 M 大)的任何数,都是 $f(x)$ 在 X 上的下(上)界.

如果不论 M 多么大,总有 $x \in X$ 使 $f(x) > M$,则称 $f(x)$ 在 X 上无上界;类似地可以定义无下界.

定义 1.1.8(反函数)　设函数 $y = f(x)$ 的定义域是 X,值域是 Y.如果对于 Y 内的每一个 y,由 $y = f(x)$ 可以确定唯一的 $x \in X$.这样在 Y 上定义了一个函数,称为 $y = f(x)$ 的反函数,记为 $x = f^{-1}(y)$ 或 $x = \varphi(y)$,$y \in Y$.

由反函数的定义,有

$$y \equiv f(f^{-1}(y)),y \in Y; \quad x \equiv f^{-1}(f(x)),x \in X$$

有时,也常将 $y = f(x)$ 的反函数 $x = f^{-1}(y)$ 写成 $y = f^{-1}(x)$.

在同一坐标系中,$y = f(x)$ 与它的反函数 $x = f^{-1}(y)$ 的图形是一致的,而 $y = f(x)$ 与它的反函数 $y = f^{-1}(x)$ 的图形关于直线 $y = x$ 对称.

定义 1.1.9(复合函数)　设函数 $y = f(u)$ 的定义域是 D_f,函数 $u = \varphi(x)$ 的定义域是 D_φ,值域是 R_φ.若 $D_f \cap R_\varphi \neq \varnothing$($\varnothing$ 表示空集),则称函数 $y = f(\varphi(x))$ 为复合函数,它的定义域是 $\{x \mid x \in D_\varphi$ 且 $\varphi(x) \in D_f\}$.u 称为中间变量,x 称为自变量.

定义 1.1.10(基本初等函数)　下列一些函数称为基本初等函数:

① 常值函数:C(C 为常数),$x \in \mathbf{R}$.

② 幂函数:x^a(a 为常数),其定义域由 a 确定,但不论 a 如何,在 $(0,+\infty)$ 内总有定义.

③ 指数函数:a^x(常数 $a>0, a \neq 1$),$x \in \mathbf{R}$.

④ 对数函数:$\log_a x$(常数 $a>0, a \neq 1$),$x \in (0,+\infty)$.

⑤ 三角函数:$\sin x, x \in (-\infty,+\infty)$;$\cos x, x \in (-\infty,+\infty)$;$\tan x, x \in \left(k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2}\right), k \in \mathbf{Z}$;$\cot x, x \in (k\pi,(k+1)\pi), k \in \mathbf{Z}$.

⑥ 反三角函数:$\arcsin x, x \in [-1,1]$;$\arccos x, x \in [-1,1]$;$\arctan x, x \in \mathbf{R}$;$\operatorname{arccot} x$,

$x \in \mathbf{R}$.

定义 1.1.11(初等函数) 由基本初等函数经有限次加、减、乘、除及复合而成并用一个式子表示的函数称初等函数.

二、重要性质、定理、公式

1. 关于奇偶性

定理 1.1.1(关于函数的奇、偶性)

(1) 设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在数集 X 上为奇函数,$\varphi(x)$ 与 $\psi(x)$ 在 X 上为偶函数,则

①$f(x) \pm g(x)$,$f(x)\varphi(x)$ 在 X 上均为奇函数;

②$\varphi(x) \pm \psi(x)$,$f(x)g(x)$,$\varphi(x)\psi(x)$ 在 X 上均为偶函数;

③$f(g(x))$ 为奇函数,$f(\varphi(x))$,$\varphi(f(x))$,$\varphi(\psi(x))$ 均为偶函数(这里设可以构成复合函数).

(2) 设 $f(x)$ 为可导的奇(偶)函数,则 $f'(x)$ 为偶(奇)函数;

(3) 设 $f(x)$ 为连续的奇函数,则它的一切原函数为偶函数;

(4) 设 $f(x)$ 为连续的偶函数,则它有且仅有一个原函数为奇函数,此唯一奇函数是 $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$.

(5) 任一定义在对称于原点的数集 X 上的函数 $f(x)$,必可分解成一奇一偶函数之和:

$$f(x) = \frac{1}{2}[f(x) - f(-x)] + \frac{1}{2}[f(x) + f(-x)].$$

以上(2) 的证明见第二章,(3) 与(4) 的证明见第三章.

2. 关于周期性

定理 1.1.2(关于函数的周期性)

(1) 设 $f(x)$ 具有周期 T 的可导函数,则 $f'(x)$ 亦具周期 T;

(2) 设 $f(x)$ 具有周期 T 的连续函数,它的原函数也具有周期 T 的充要条件是 $\int_0^T f(x)\mathrm{d}x = 0$. 当此条件满足时,$f(x)$ 的一切原函数都具有周期 T.

以上(1) 的证明见第二章,(2) 的证明见第三章.

3. 关于有界性、无界性的若干充分条件

关于函数有界、无界的判定,散见于教科书的不同章节,较常用的有下述一些充分条件,但都不是必要条件.

定理 1.1.3(关于有界、无界的充分条件)

(1) 设 $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$ 存在,则存在 $\delta > 0$,当 $-\delta < x - x_0 < 0$ 时,$f(x)$ 有界;对 $x \to x_0^+$,$x \to x_0$ 有类似的结论.

(2) 设 $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$ 存在,则存在 $X > 0$,当 $|x| > X$ 时,$f(x)$ 有界;对 $x \to +\infty$,$x \to -\infty$ 有

类似的结论.

(3) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界.

(4) 设 $f(x)$ 在数集 U 上有最大值(最小值),则 $f(x)$ 在 U 上有上(下)界.

(5) 有界函数与有界函数之和、积均为有界函数.

以上均为充分条件,其逆均不成立.

(6) 设 $\lim\limits_{x\to\square} f(x)=\infty$,则 $f(x)$ 在 $\square$ 的去心邻域内无界. 但其逆不成立. 这里的 $\square$ 可以是 $x_0, x_0^-, x_0^+, \infty, -\infty, +\infty$, 6 种情形中的任一种.

到第二章中还将讨论在有限区间域无限区间上 $f(x)$ 与 $f'(x)$ 的有界、无界的关系.

例题分析

$-1\le\frac{3x}{x^2+2}\le 1$

$\frac{3x}{x^2+2}-1\le 0$

$\frac{3x}{x^2+2}+1\ge 0$

取交集保证分母不为0.

一、求复合函数的定义域

【例 1】 函数 $y=\arccos\dfrac{3x}{x^2+2}$ 的定义域是______

$(-\infty,-2]\cup[-1,1]\cup[2,+\infty)$

> **解题思路**　由外层函数的定义域限制内层函数的取值范围,再由此确定复合函数的定义域. 如果有多层复合,就按此层层由外向内推. 如果该函数是由若干有限个函数经四则运算而成,那么应先求出这有限个函数的定义域取其交集,并去掉分母为零的集合.

【解】 应填 $(-\infty,-2]\cup[-1,1]\cup[2,+\infty)$.

由 $y=\arccos u$ 的定义域知 $-1\leqslant u\leqslant 1$. 从而 $-1\leqslant\dfrac{3x}{x^2+2}\leqslant 1$,解此不等式,得 x 的范围如上所填.

整体代换思想

【例 2】 设 $f(x)=\sin x, f(y(x))=1-x^2$,则函数 $y(x)$ 的定义域为______.

> **解题思路**　与例 1 略有不同的是,本题是求作为中间变量的函数 $y=y(x)$ 的定义域,即求由 $\sin y=1-x^2$ 确定的函数 $y=y(x)$ 的定义域,亦即求 $x^2=1-\sin y$ 的 x 的取值范围.

$f(y(x))=\sin y=1-x^2$

这里的x为sin中x 看成整体

【解】 应填 $-\sqrt{2}\leqslant x\leqslant\sqrt{2}$.

由 $f(x)=\sin x$,有 $f(y(x))=\sin y(x)$. 由题设知 $\sin y(x)=1-x^2$,有

$$x^2=1-\sin y(x).$$

于是 $0\leqslant x^2\leqslant 2$. 所以 $-\sqrt{2}\leqslant x\leqslant\sqrt{2}$.

二、由函数的奇偶性与周期性构造函数

【例 3】 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有定义,且是周期为 2 的奇函数. 已知 $x\in(2,3)$ 时 $f(x)=x^2+x+1$,则当 $x\in[-2,0]$ 时 $f(x)=$______.

解题思路　由周期为2，将 $x\in(2,3)$ 时的 $f(x)$ 的图形向左分别移2个单位与4个单位便可分别得到 $x\in(0,1)$ 与 $x\in(-2,-1)$ 时的 $f(x)$ 的图形；再由 $x\in(0,1)$ 时的 $f(x)$ 及奇函数的性质，便得 $x\in(-1,0)$ 时的 $f(x)$. 从而便得到 $x\in(-2,-1)\cup(-1,0)$ 时的 $f(x)$. 再计算出 $f(0)$，$f(-1)$，$f(-2)$ 的值即可. 实际操作时按下述步骤进行.

这步要留意开闭区间

分别端点值代入式中结果不同

【解】 应填
$$f(x)=\begin{cases}x^2+9x+21, & \text{当 } x\in(-2,-1);\\ 0, & \text{当 } x=-2,-1,0;\\ -x^2+5x-7, & \text{当 } x\in(-1,0).\end{cases}$$

易错.

设 $x\in(0,1)$，有 $x+2\in(2,3)$，由周期性有
$$f(x)=f(x+2)=(x+2)^2+(x+2)+1=x^2+5x+7;$$
设 $x\in(-2,-1)$，有 $x+4\in(2,3)$，由周期性有
$$f(x)=f(x+4)=(x+4)^2+(x+4)+1=x^2+9x+21;$$
设 $x\in(-1,0)$，有 $-x\in(0,1)$，由奇函数性质有
$$f(x)=-f(-x)=-[(-x)^2+5(-x)+7]=-x^2+5x-7.$$
又因题设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有定义且为奇函数，故 $f(0)=0$.

周期为2，故 $f(-2)=f(0)=0$，并且 $f(-1)=-f(1)=-[f(1-2)]=-f(-1)$，所以 $f(-1)=0$. 结论如上所填.　这些端点值都是用周期性质推出

三、求分段函数的复合函数的表达式

【例 4】 设 $f(x)=\begin{cases}2, & \text{当 } |x|<1;\\ 0, & \text{当 } |x|\geqslant 1,\end{cases}$ $g(x)=\begin{cases}0, & \text{当 } |x|\leqslant 2;\\ 1, & \text{当 } |x|>1.\end{cases}$ 则 $f(g(x))=$ ________，$g(f(x))=$ ________.

解题思路　求 $f(g(x))$ 时，由外层函数 f 写出复合函数的表达式，并同时写出中间变量(即内层函数 g)的取值范围；然后按内层函数，即 $g(x)$ 的分段表达式，过渡到自变量的变化范围，得到分段表达式，对于求 $g(f(x))$ 亦类似.

【解】 应填
$$f(g(x))=\begin{cases}2, & \text{当 } |x|\leqslant 2;\\ 0, & \text{当 } |x|>2.\end{cases}\quad g(f(x))\equiv 0,\ x\in(-\infty,+\infty).$$
由 $f(x)$ 的表达式，有
$$f(g(x))=\begin{cases}2, & \text{当 } |g(x)|<1;\\ 0, & \text{当 } |g(x)|\geqslant 1.\end{cases}$$
再由 $g(x)$ 的表达式知，

这步是化成用x表示的表达式
$$|g(x)|<1\Leftrightarrow|x|\leqslant 2;\quad |g(x)|\geqslant 1\Leftrightarrow|x|>2.$$
从而得到
$$f(g(x))=\begin{cases}2, & \text{当 } |x|\leqslant 2;\\ 0, & \text{当 } |x|>2.\end{cases}$$
由 $g(x)$ 的表达式，有
$$g(f(x))=\begin{cases}0, & \text{当 } |f(x)|\leqslant 2;\\ 1, & \text{当 } |f(x)|>2.\end{cases}$$
再由 $f(x)$ 的表达式知，
$$|f(x)|\leqslant 2\Leftrightarrow x\in(-\infty,+\infty);\quad |f(x)|>2\Leftrightarrow x\in\varphi.$$
不存在 空集

不存在