变分不等式问题与算法

方长杰　陈胜兰　著

科学出版社

变分不等式问题与算法

方长杰　陈胜兰　著

科 学 出 版 社

北 京

内 容 简 介

本书内容大部分来源于作者近五年发表的学术研究论文. 本书主要介绍了变分不等式的若干迭代算法、变分不等式与不动点问题、集值变分不等式的投影算法、与集合序列相关的几类变分不等式的投影算法、Hadamard 流形上向量变分不等式与向量优化问题、Hadamard流形上变分不等式的投影算法、集值变分不等式的 Gap-泛函、半变分不等式等内容. 为阅读方便起见, 本书提供了非线性分析、黎曼流形、Sobolev 空间等阅读本书所需的一些背景知识.

本书适合于对变分不等式算法感兴趣的高年级本科生、研究生及相关科研人员阅读.

图书在版编目(CIP)数据

变分不等式问题与算法/方长杰, 陈胜兰著. —北京: 科学出版社, 2016.12

ISBN 978-7-03-050995-6

Ⅰ. ①变… Ⅱ. ①方… ②陈… Ⅲ. ①变分不等式-研究 Ⅳ. ①O178

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2016) 第 299617 号

责任编辑: 李 欣 / 责任校对: 李 影
责任印制: 张 伟 / 封面设计: 陈 敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码: 100717
http://www.sciencep.com

北京教图印刷有限公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2017 年 1 月第 一 版 开本: 720 × 1000 B5
2017 年 1 月第一次印刷 印张: 12 1/4
字数: 236 000

定价: 78.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

序　言

变分不等式问题是现代优化理论和非线性分析的重要组成部分，它与力学、热学、微分方程、线性与非线性规划、最优化理论与控制等理论和应用学科有着密切的联系，并广泛地应用于解决产生于上述领域的大量实际问题. 变分不等式始于人们对力学问题的研究. 1964 年, Fichera 在研究线性弹性体与刚性地基的无摩擦接触问题 (即 Signorini 问题) 的解时首次提出了"变分不等式"一词. 随后, 有关变分不等式的数学理论逐步建立并形成了专门的数学学科.

在实际问题中, 需要满足给定精度的变分不等式的近似解, 因此, 变分不等式问题的算法研究就成为一个非常重要的课题, 如牛顿算法、近似点方法等. 1964 年, Goldstein 在凸规划问题的研究中首先提出了投影算法, 投影算法因其计算比较简单, 吸引了许多学者借助其来研究变分不等式问题.

本书主要介绍变分不等式的投影算法, 同时讨论了与变分不等式相关的一些问题, 如 Hadamard 流形上的向量优化、Gap-泛函和正规映射等, 共分为 8 章. 第 1 章介绍了非线性分析、黎曼流形、Sobolev 空间等本书所需的一些背景知识, 该章中的大部分结果均未给出证明, 当然我们给出了主要的参考文献, 感兴趣的读者可以在其中找到详细的证明; 第 2 章主要介绍求解变分不等式的预测-校正迭代算法、近似点-投影算法和辅助函数法等三种迭代法; 第 3 章主要针对三种不同的非扩张型映射, 给出了寻找变分不等式问题的解集与非扩张映射的不动点集合公共元素的投影算法; 第 4 章通过 Armijo 线性搜索程序和超平面的不同选择, 给出了集值变分不等式的超梯度算法、二次投影算法、修正超梯度算法、次梯度算法等四种不同的投影算法, 并提供了相应的数值实验结果; 第 5 章讨论了求解单值、集值和广义等三种不同类型变分不等式与集合序列相关的投影算法, 是第 4 章部分结果的延伸和推广; 第 6 章给出了 Hadamard 流形上的向量变分不等式与不可微非凸向量优化问题的等价性, 并建立了向量优化问题解的存在性结果, 同时提出了 Hadamard 流形上集值变分不等式的投影算法; 第 7 章首先介绍了集值变分不等式的 Gap-泛函, 并建立了变分不等式解的误差界, 其次讨论了混合变分不等式的正规映射与不动点映射的相关概念和性质; 第 8 章主要介绍了 Navier-Stokes 型半变分不等式, 并建立了其解的存在性、唯一性和解对初始数据的连续依赖性等结果.

本书的阅读对象是本科高年级学生、研究生以及相关科研人员. 本书内容主要来自作者近年来发表的科研论文, 其中部分内容是近年来的热点研究课题, 如 Hadamard 流形上的变分不等式的相关理论与算法、用 Rothe 方法求解 Navier-

Stokes 型半变分不等式等. 希望本书能够对变分不等式算法感兴趣的读者有所帮助.

本书在编写过程中难免有不妥之处, 希望读者诚恳地提出建议并给予指正. 最后, 本书能够顺利出版, 还要感谢重庆邮电大学出版基金、重庆市自然科学基金 (CSTC, 2010BB9401) 和重庆市教委科学技术研究项目 (KJ110509) 的资助.

方长杰 陈胜兰

2016 年 8 月

目　　录

第1章　预备知识

本章主要介绍了非线性分析、黎曼流形、Sobolev 空间等本书所需要的一些背景知识. 1.1 节主要介绍了泛函分析、非光滑分析等方面的内容, 如 Michael 选择定理在证明集值变分不等式解的存在性方面、满射性定理在证明半变分不等式解的存在性方面等均起着关键的作用. 1.2 节回顾了黎曼流形尤其是 Hadamard 流形方面的一些概念和定理, 如 Hadamard 流形上局部连续性、伪单调性、上 (下) 半连续性等概念以及 Lebourg 中值定理、三角形比较定理等定理, 它们是本书第 6 章的主要研究工具. 1.3 节简要地列举了 Sobolev 空间尤其是 Bochner-Lebesgue 空间 (定义在 $[0, T]$ 上) 的一些结果, 如紧嵌入定理、Lebesgue 控制收敛定理等, 它们在第 8 章的研究中起着本质的作用. 有关泛函分析、非光滑分析、黎曼流形、Sobolev 空间等方面的背景知识的证明和详细讨论, 可参考相关文献, 如文献 [1]、[32]、[36]、[128]、[155].

1.1　非线性分析

设 H 为 Hilbert 空间, 其内积和范数分别记为 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 和 $\|\cdot\|$, $\mathrm{CB}(H)$ 表示 H 的一切非空有界闭子集族. 我们用 $x_i \rightharpoonup x$ 表示序列 $\{x_i\}$ 弱收敛到 x, 用 $x_i \to x$ 表示序列 $\{x_i\}$ 强收敛到 x. 用 $\omega_w(x_i)$ 表示 $\{x_i\}$ 的弱聚点全体组成的集合, 即 $\omega_w(x_i) = \{x \in H : \{x_{i_j}\}$ 弱收敛到 x, 其中 $\{i_j\}$ 是 $\{i\}$ 的某个子序列$\}$. 对赋范空间 X, 我们用 $\|\cdot\|_X$ 表示它的范数, 用 X^* 表示它的对偶, 用 $\langle\cdot,\cdot\rangle_{X^*\times X}$ 表示 X^* 和 X 之间的对偶配对. 我们分别用 X_w 和 X^*_w 表示空间 X 赋予弱拓扑和它的对偶空间 X^* 赋予弱 * 拓扑, 有时我们也用 X 表示赋予强拓扑. 用符号 2^{X^*} 表示 X^* 的所有子集的全体所组成的集合. 用 a.e. 表示“几乎处处”. 若无特别说明, 我们总假定 X 是 Banach 空间.

设 K 为 Hilbert 空间 H 的非空闭凸子集, $\forall\, x \in H$, $\mathcal{P}_K(x)$ 表示 x 到 K 上的投影, 即

$$\mathcal{P}_K(x) = \mathrm{argmin}\{\|z - x\| : z \in K\}$$

其中, $\mathrm{argmin}\{F(x) : x \in K\}$ 表示 F 在 K 上的极小值点.

下面的三个引理给出了投影算子的一些性质.

引理 1.1[156] 给定 $z\in H, u\in K$ 满足变分不等式

$$\langle u-z, v-u\rangle \geqslant 0, \quad \forall v\in K \tag{1.1}$$

当且仅当

$$u=\mathcal{P}_K(z)$$

其中, $\mathcal{P}_K$ 是 H 到 K 上的投影算子, 而且 $\mathcal{P}_K$ 是非扩张的, 即

$$\|\mathcal{P}_K(x)-\mathcal{P}_K(y)\| \leqslant \|x-y\|, \quad \forall x,y\in H$$

引理 1.2 假设 K 是一个非空闭凸集合, $z\in K, x\in \mathrm{R}^n$. 那么下面的结论等价:

(i) $\|z-y\|^2 \leqslant \|x-y\|^2-\|z-x\|^2, \forall y\in K$;

(ii) $z=\mathcal{P}_K(x)$.

证明 对任意的 $y\in K$, 因为

$$\|x-y\|^2=\|x-z\|^2+\|z-y\|^2+2\langle x-z, z-y\rangle$$

根据引理 1.1, 我们立即得到结论.

引理 1.3[156] 设 $\mathcal{P}_K$ 表示 H 到 K 上的投影算子. 则

(i) $\langle z-\mathcal{P}_K(z), \mathcal{P}_K(z)-v\rangle \geqslant 0, \forall\ z\in H, v\in K$;

(ii) $\|\mathcal{P}_K(x)-\mathcal{P}_K(y)\|^2 \leqslant \langle \mathcal{P}_K(x)-\mathcal{P}_K(y), x-y\rangle, \forall\ x,y\in H$;

(iii) $\|\mathcal{P}_K(x)-y\|^2 \leqslant |x-y\|^2-\|x-\mathcal{P}_K(x)\|^2, \forall\, x\in H, \forall\, y\in K$;

(iv) $\|\mathcal{P}_K(x)-\mathcal{P}_K(y)\|^2 \leqslant \|x-y\|^2-\|\mathcal{P}_K(x)-x+y-\mathcal{P}_K(y)\|^2, \forall\, x, y\in H$.

下面我们介绍 η 算子单调性和 Lipschitz 连续性的概念.

定义 1.1 称映射 $\eta: H\times H\to H$ 为

(i) 单调的, 如果

$$\langle x-y, \eta(x,y)\rangle \geqslant 0, \quad \forall\, x,y\in H$$

(ii) 严格单调的, 如果

$$\langle x-y, \eta(x,y)\rangle > 0, \quad \forall\, x,y\in H, x\neq y$$

(iii) σ-强单调的, 如果存在常数 $\sigma>0$ 使得

$$\langle x-y, \eta(x,y)\rangle \geqslant \sigma\|x-y\|^2, \quad \forall\, x,y\in H$$

(iv) δ-Lipschitz 连续的, 如果存在常数 $\delta>0$ 使得

$$\|\eta(x,y)\| \leqslant \delta\|x-y\|, \quad \forall\, x,y\in H$$

注解 1.1 由定义 1.1 的 (iii) 和 (iv) 有 $\sigma \leqslant \delta$.

注解 1.2 由定义 1.1(iii) 可得

$$\|\eta(x,y)\| \geqslant \sigma\|x-y\|, \quad \forall x,y \in H$$

接下来介绍单值算子的单调性、余强制性等概念.

定义 1.2[146] 称映射 $g: H \to H$ 为

(i) μ-Lipschitz 连续的, 如果存在常数 $\mu > 0$ 使得

$$\|g(x)-g(y)\| \leqslant \mu\|x-y\|, \quad \forall x,y \in H$$

(ii) 强单调的, 如果

$$\langle g(x)-g(y), x-y\rangle \geqslant 0, \quad \forall x,y \in H$$

(iii) α-强单调的, 如果存在常数 $\alpha > 0$ 使得

$$\langle g(x)-g(y), x-y\rangle \geqslant \alpha\|x-y\|^2, \quad \forall x,y \in H$$

(iv) α-余强制的, 如果存在常数$\alpha > 0$使得

$$\langle g(x)-g(y), x-y\rangle \geqslant \alpha\|g(x)-g(y)\|^2, \quad \forall\, x,y \in H$$

(v) 松弛 (γ, r)-余强制的, 如果存在常数 $\gamma > 0, r > 0$ 使得

$$\langle g(x)-g(y), x-y\rangle \geqslant -\gamma\|g(x)-g(y)\|^2 + r\|x-y\|^2, \quad \forall x,y \in H$$

注解 1.3 由定义 1.2(iii) 可得 $\|g(x)-g(y)\| \geqslant \alpha\|x-y\|, \forall\, x,y \in H$, 这蕴含了 g 的可逆性. 容易看出, 强单调性蕴含单调性, 但反之不真.

定义 1.3 设 $T, A: H \to \mathrm{CB}(H)$ 是集值映射, $N, \eta: H \times H \to H$ 和 $g: H \to H$ 是单值映射.

(i) 称 $N(\cdot,\cdot)$ 在第一变元关于 T 为 α-g-部分松弛 η-强单调的, 如果存在常数 $\alpha > 0$ 使得

$$\langle N(u_1,\cdot) - N(u_2,\cdot), \eta(g(z), g(y))\rangle \geqslant -\alpha\|g(x)-g(z)\|^2$$

$$\forall\, x,y,z \in H, \quad u_1 \in T(x), u_2 \in T(y)$$

类似可定义 $N(\cdot,\cdot)$ 在第二变元关于 A 的 g-部分松弛 η-强单调性.

(ii) 称映射 $N: H\times H\to H$ 在第一变元关于 T 为 β-强单调的, 如果存在常数 $\beta>0$ 使得

$$\langle N(T(x_1),\cdot)-N(T(x_2),\cdot),x_1-x_2\rangle\geqslant\beta\|x_1-x_2\|^2,\quad\forall x_1,x_2\in H$$

(iii) 称映射 $N: H\times H\to H$ 关于第一变元为 λ-Lipschitz 连续的, 如果存在常数 $\lambda>0$ 使得

$$\|N(u_1,\cdot)-N(u_2,\cdot)\|\leqslant\lambda\|u_1-u_2\|,\quad\forall u_1,u_2\in H$$

类似可定义 $N(\cdot,\cdot)$ 在第二变元关于 A 的强单调性和 Lipschitz 连续性.

(iv) 称 T 是 D-连续的, 如果由 $\{x_n\}\in H$ 和 $x_n\to x$ 可推出 $T(x_n)\to T(x)$, 其中 D 是 Hausdorff 度量, 即

$$D(A,B)=\max\left\{\sup_{x\in A}\inf_{y\in B}d(x,y),\sup_{y\in B}\inf_{x\in A}d(x,y)\right\},\quad A,B\subset H$$

注解 1.4 当 g 为恒等映射时, 定义 1.3(i) 变为 $N(\cdot,\cdot)$ 在第一变元关于 T 的 α-部分松弛 η-强单调性; 当 $\eta(y,x)=y-x$ 时, 定义 (i) 变为 $N(\cdot,\cdot)$ 在第一变元关于 T 的 α-g-部分松弛强单调性.

定义 1.4[112] 称泛函 $\varphi(\cdot,\cdot): H\times H\to(-\infty,+\infty]$ 是斜对称的, 如果

$$\varphi(x,x)-\varphi(x,y)-\varphi(y,x)+\varphi(y,y)\geqslant 0,\quad\forall x,y\in H$$

定义 1.5 设 $F(\cdot,\cdot,\cdot): K\times K\times K\to \mathrm{CB}(H)$ 是三元算子, $T,A: H\to\mathrm{CB}(H)$ 是两个多值映射, $g: K\to K$ 为单值映射, $\varphi(\cdot,\cdot): H\times H\to(-\infty,+\infty]$ 是二元泛函. 称 $F(\cdot,\cdot,\cdot)$ 与映射 T 及 A 关于二元泛函 $\varphi(\cdot,\cdot)$ 为 g-联合伪单调的, 对任意 $x,y\in K,\mu\in A(x),\nu\in T(x),s\in A(y),t\in T(y)$, 若

$$F(\mu,\nu,g(y))+\varphi(g(y),g(x))-\varphi(g(x),g(x))\geqslant 0$$

则

$$-F(s,t,g(x))+\varphi(g(y),g(x))-\varphi(g(x),g(x))\geqslant 0$$

根据定义 1.5 可知, 当 A,g 均为恒等映射时, 定义 1.1(i) 变为 $F(\cdot,\cdot,\cdot)$ 与 T 关于 $\varphi(\cdot,\cdot)$ 的联合伪单调性.

给定映射 $T: K\to K$. 在本节中, 除非特别说明, 我们用 $F(T)$ 表示映射 T 的不动点全体组成的集合.

下面我们给出非扩张映射以及严格伪压缩映射的定义.

定义 1.6[98] 设 $S: K \to K$ 为单值映射.

(i) 称 S 为非扩张的, 如果

$$\|Sx - Sy\| \leqslant \|x - y\|, \quad \forall\, x, y \in K$$

(ii) 称 $S: K \to K$ 为 θ-严格伪压缩的, 如果存在常数 $\theta \in [0, 1)$ 使得

$$\|Sx - Sy\|^2 \leqslant \|x - y\|^2 + \theta\|(I - S)x - (I - S)y\|^2, \quad \forall x, y \in K$$

其中, I 为恒等映射. 易见, 映射是非扩张的, 当且仅当它是 0-严格伪压缩的.

(iii) 称 $S: K \to K$ 是 δ-拟严格伪压缩的, 如果 $F(S) \neq \varnothing$ 且存在 $\delta \in [0, 1)$ 使得

$$\|Sx - p\|^2 \leqslant \|x - p\|^2 + \delta\|x - Sx\|^2, \quad \forall x \in K, p \in F(S)$$

易见, 如果 $F(S) \neq \varnothing$, 则严格伪压缩蕴含拟严格伪压缩.

严格伪压缩映射具有如下两个性质.

引理 1.4[98] 设 K 是 H 的非空闭凸子集. 如果 $S: K \to K$ 是 θ-严格伪压缩映射且 $F(S) \neq \varnothing$, 则 $F(S)$ 是闭凸集.

引理 1.5[82] 设 K 是实 Hilbert 空间 H 的非空闭凸子集. 如果 $S: K \to K$ 是 θ-严格伪压缩映射, 则映射 $I - S$ 在 0 点是次闭的, 即

$$x_i \rightharpoonup x, \quad Sx_i - x_i \to 0 \Rightarrow Sx = x$$

下面介绍集值映射单调性和连续性的概念.

定义 1.7 称集值映射 $F: H \to 2^H$ 为

(i) 单调的, 如果

$$\langle u - v, x - y\rangle \geqslant 0, \quad \forall u \in Fx, v \in Fy$$

(ii) 极大单调的, 如果 F 是单调的, 且其图没有真包含在任何其他单调映射的图中. 或等价地, 单调映射 F 是极大的, 当且仅当

$$(x, u) \in H \times H, \langle u - v, x - y\rangle \geqslant 0, \quad \forall\, v \in Fy \Rightarrow u \in Fx$$

定义 1.8[10] 设 X, Y 为拓扑空间, F 是从 X 到 Y 的集值映射.

(i) F 称为在 $x \in X$ 处上半连续, 如果对 $F(x)$ 的任一给定的邻域 $V \subset Y$, 存在 x 的邻域 U, 使得 $F(U) \subset V$.

(ii) F 称为在 $x \in X$ 处下半连续, 如果对任给的与 $F(x)$ 相交的开集 $V \subset Y$, 存在 x 的邻域 U, 使得当 $x \in U$ 时, 就有 $F(x) \cap V \neq \varnothing$. 等价地, 对任一收敛于 x 的序列 x_k 和任意 $y \in F(x)$, 均存在序列 $y_k \in F(x_k)$ 收敛于 y.

(iii) 如果 F 在 $x \in X$ 处既上半连续又下半连续, 则称 F 在 x 处连续.

(iv) 如果 F 是从 X 到 Y 的单值映射, 则 F 的上半连续性和下半连续性变为 F 的连续性.

下面介绍 η-次微分的概念.

定义 1.9 [87]　设 $\eta : H \times H \to H, \varphi : H \to R \cup \{+\infty\}$.

(i) 如果

$$\langle \omega, \eta(y, x) \rangle \leqslant \varphi(y) - \varphi(x), \quad \forall y \in H$$

则 $\omega \in H$ 称为 φ 在 $x \in \mathrm{dom}\varphi$ 的 η-次梯度.

(ii) 集合

$$\partial_\eta \varphi(x) = \begin{cases} \{\omega \in H : \langle \omega, \eta(y, x) \rangle \leqslant \varphi(y) - \varphi(x), \forall y \in H\}, & x \in \mathrm{dom}\varphi \\ \varnothing, & x \notin \mathrm{dom}\varphi \end{cases}$$

称为 φ 在 $x \in \mathrm{dom}\varphi$ 的 η-次微分.

下面是集值映射 η-单调性的定义.

定义 1.10　设 $\eta : H \times H \to H$. 集值映射 $Q : H \to 2^H$ 称为

(i) η-单调的, 如果

$$\langle u - v, \eta(x, y) \rangle \geqslant 0, \quad \forall x, y \in H, u \in Q(x), v \in Q(y)$$

(ii) η-极大单调的, 如果 Q 是 η-单调的, 且没有任何其他 η-单调映射的图严格包含 Q 的图, 其中 Q 的图 $\mathrm{Graph}(Q) := \{(x, y) \in H \times H : y \in Q(x)\}$.

接下来我们给出 η-次微分的两个性质.

引理 1.6 [87]　设 $\eta : H \times H \to H$ 满足

$$\eta(x, y) + \eta(y, x) = 0, \quad \forall x, y \in H$$

且 $\varphi : H \to R \cup \{+\infty\}$ 是真泛函, 则集值映射 $\partial_\eta \varphi : H \to 2^H$ 是 η-单调的.

引理 1.7 [87]　设 $\eta : H \times H \to H$ 是严格单调的, $Q : H \to 2^H$ 是 η-单调的, 且满足 $R(I + \rho \partial_\eta \varphi) = H$, 其中 $R(\cdot)$ 表示值域, $\rho > 0$ 是常数, I 为恒等映射. 则 Q 是 η-极大单调的, 而且 $(I + \rho Q)^{-1}$ 是单值的.

由引理 1.6 和引理 1.7 可以得到下面的结论.

引理 1.8 设 $\eta: H\times H\to H$ 和 $\varphi: H\to R\cup\{+\infty\}$ 满足

(i) $\eta(x,y)+\eta(y,x)=0, \forall\, x,y\in H$;

(ii) $\eta: H\times H\to H$ 是严格单调的;

(iii) $R(I+\rho\partial_\eta\varphi)=H$, 其中, $R(\cdot)$ 表示值域, $\rho>0$ 是常数, I 为恒等映射.

则映射

$$J_\rho^\varphi(x):=(I+\rho\partial_\eta\varphi)^{-1}(x),\quad \forall\, x\in H$$

是单值的.

下面的引理表明, 在适当的假定下, 算子 J_ρ^φ 是 Lipschtiz 连续的.

引理 1.9 设 $\eta: H\times H\to H$ 是 σ-强单调和 δ-Lipschitz 连续的且满足

$$\eta(x,y)+\eta(y,x)=0,\quad \forall\, x,y\in H$$

则

$$\|J_\rho^\varphi(x)-J_\rho^\varphi(y)\|\leqslant\tau\|x-y\|,\quad \forall\, x,y\in H$$

其中, $\tau=\delta/\sigma$, $\sigma>0$, $\delta>0$ 是常数.

注解 1.5 由注解 1.1 知, $\tau\geqslant 1$.

定义 1.11 集合

$$\partial\varphi(x)=\{\xi\in H:\varphi(y)-\varphi(x)\geqslant\langle\xi,y-x\rangle,\forall\, y\in H\}$$

称为 φ 在 $x\in\mathrm{dom}\varphi$ 的次微分.

容易证明, $\partial\varphi(\cdot)$ 是极大单调映射, 且 $(I+\rho\partial\varphi)^{-1}: H\to H$ 是单值映射, 其中 $\rho>0$ 是常数, I 是恒等映射.

引理 1.10[21] 给定 $z\in H$, $x\in H$ 满足变分不等式

$$\langle x-z,y-x\rangle+\rho\varphi(y)-\rho\varphi(x)\geqslant 0,\quad \forall y\in H$$

当且仅当

$$x=J_\varphi(z)$$

其中, $J_\varphi:=(I+\rho\partial\varphi)^{-1}$ 为近似点映射, 而且 J_φ 是非扩张的, 即

$$\|J_\varphi x-J_\varphi y\|\leqslant\|x-y\|,\quad \forall x,y\in H$$

引理 1.11[151] 设 $\{\delta_n\}_{n=0}^\infty$ 是非负实序列, 满足

$$\delta_{n+1}\leqslant(1-\lambda_n)\delta_n+\sigma_n,\quad n\geqslant 0$$

其中, $\lambda_n \in [0,1], \sigma_n$ 是实序列, 且满足

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n = \infty$;

(ii) $\limsup_{n\to\infty} \sigma_n/\lambda_n \leqslant 0$ 或 $\sum_{n=1}^{\infty} |\sigma_n| < \infty$.

则 $\lim_{n\to\infty} \delta_n = 0$.

现在我们回顾几种收敛的概念.

定义 1.12　设 X 为赋范线性空间, X^* 为其对偶空间, $\|\cdot\|_X$ 表示 X 的范数, $\{x_n\} \subset X, x \in X, \{l_n\} \subset X^*, l \in X^*$.

(i) 称 x_n 强收敛到 x(记作 $x_n \to x$), 如果

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\|_X = 0$$

(ii) 称 x_n 弱收敛到 x(记作 $x_n \rightharpoonup x$), 如果

$$f(x_n) \to f(x), \quad \forall f \in X^*$$

(iii) 称 l_n 弱 * 收敛到 l(记作 $l_n \rightharpoonup^* l$), 如果

$$l_n(x) \to l(x), \quad \forall x \in X$$

赋范线性空间 X 赋予弱收敛所得拓扑, 称为 X 的弱拓扑, 记为 X_w, 而 X^* 赋予弱 * 收敛所得拓扑, 称为 X^* 的弱 * 拓扑, 记为 X^*_w.

下面介绍紧集的概念.

定义 1.13　设 X 为赋范线性空间, $M \subset X$.

(i) 称集合 M 是紧的, 如果 M 中每个序列都包含一个收敛的子序列, 其极限在 M 中;

(ii) 称集合 M 是相对紧的, 如果 $\overline{M}$ 是紧的, 其中 $\overline{M}$ 表示 M 的闭包;

(iii) 称集合 M 是弱紧的, 如果 M 中每个序列都包含一个弱收敛的子序列, 其极限在 M 中.

下面的三个结果是本质的.

命题 1.12　设 $(X, \|\cdot\|_X)$ 和 $(Y, \|\cdot\|_Y)$ 均为赋范线性空间, $F: X \to Y$ 是线性算子, 则 F 连续当且仅当 F 弱连续, 即 F 从 X_w 到 X_w 是连续的.

定理 1.13(Kakutani 定理)　Banach空间 X 是自反的当且仅当闭单位球 $\{x \in X \mid \|x\|_X \leqslant 1\}$ 是弱紧的.

定理 1.14 (Banach-Alaoglu 定理) 赋范线性空间 X 的对偶空间 X^* 中的闭单位球是紧的 (在弱 * 拓扑中).

在迭代法的收敛性证明中, 我们需要下面的两个引理.

引理 1.15[8] 设 $F: H \to \mathrm{CB}(H)$, $x_0 \in H$, 若 $F(x_0)$ 是紧的且对任何 $\varepsilon > 0$, 存在 x_0 的邻域 $N(x_0)$, 使得对任何 $x \in N(x_0)$ 有 $D(F(x), F(x_0)) \leqslant \varepsilon$, 则 F 在点 x_0 上半连续. 其中 D 是 H 上的 Hausdorff 度量.

引理 1.16[20] 设 $E \subset R^m$, $F \subset R^k$, $G: E \to 2^F$. 若 G 是紧值的, 则 G 上半连续当且仅当对任何 $x_n \to x$ 及 $y_n \in G(x_n)$, 序列 $\{y_n\}$ 都存在收敛子序列, 其极限包含于 $G(x)$ 中.

下面几个引理是第 3 章中算法收敛性分析的主要工具.

引理 1.17[22] 设 H 是实的 Hilbert 空间, K 是 H 的非空闭凸子集, $T_i: K \to K (i = 1, 2, \cdots)$ 是非扩张映射且 $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} F(T_i) \neq \varnothing$. 设 $S = \sum\limits_{i=1}^{\infty} k_i T_i$, 其中 $\sum\limits_{i=1}^{\infty} k_i = 1$, $k_i \subset (0, 1)$, 那么 S 是有定义的和非扩张的, 且 $F(S) = \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} F(T_i)$.

引理 1.18[82] 设 K 是 H 的非空闭凸子集, $\{x_i\}$ 是 H 中的一个序列且 $x \in H$. 令 $u = \mathcal{P}_K(x)$, 如果 $\omega_\omega(x_i) \subset K$ 且 $\|x_i - x\| \leqslant \|x - u\|$, $i = 1, 2, \cdots$, 那么 $x_i \to u$.

引理 1.19[117] Hilbert 空间 H 满足 Opial 条件, 即对任何弱收敛于 x 的序列 $\{x_n\}$, 有

$$\liminf_{n \to \infty} \|x_n - x\| < \liminf_{n \to \infty} \|x_n - y\|, \quad \forall y \in H, x \neq y$$

引理 1.20[137] 设 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 均为 Banach 空间 X 中的有界序列, 序列 $\{\beta_n\}$ 满足 $\beta_n \in [0, 1] (n = 0, 1, 2, \cdots)$ 和 $0 < \liminf\limits_{n \to \infty} \beta_n \leqslant \limsup\limits_{n \to \infty} \beta_n < 1$. 假设 $x_{n+1} = (1 - \beta_n) y_n + \beta_n x_n (n \geqslant 0)$ 和 $\limsup\limits_{n \to \infty}(\|y_{n+1} - y_n\| - \|x_{n+1} - x_n\|) \leqslant 0$, 则 $\lim\limits_{n \to \infty} \|y_n - x_n\| = 0$.

引理 1.21[143] 设 K 是实 Hilbert 空间 H 的非空闭凸子集. 设 $\{x_i\} \subseteq H$. 假设对所有的 $x \in K$, 有

$$\|x_{i+1} - x\| \leqslant \|x_i - x\|, \quad \forall i \in \mathbb{N}$$

则 $\{\mathcal{P}_K(x_i)\}$ 强收敛到某个 $z \in K$.

引理 1.22[152] 设 X 为实 Banach 空间, 则对 $x, y \in X$ 有

$$\|x + y\|^2 \leqslant \|x\|^2 + 2\langle y, j(x + y)\rangle, \quad \forall j(x + y) \in J(x + y)$$

其中, $J(x) = \{f \in x^* | (f, x) = ||x||^2 = ||f||^2\} (x \in X)$ 为正规对偶映射.

下面两个结果是熟知的, 为完整起见, 我们给出了证明过程.

引理 1.23　设 $T: K \to H$ 为 α-余强制的且 $0 \leqslant \lambda \leqslant 2\alpha$, 则 $I - \lambda T$ 是非扩张的.

证明　对 $\forall u, v \in K$, 有

$$\begin{aligned} & \|(I-\lambda T)u-(I-\lambda T)v\|^2 \\ = & \|(u-v)-\lambda(Tu-Tv)\|^2 \\ = & \|u-v\|^2-2\lambda\langle u-v, Tu-Tv\rangle+\lambda^2\|Tu-Tv\|^2 \\ \leqslant & \|u-v\|^2+\lambda(\lambda-2\alpha)\|Tu-Tv\|^2 \leqslant \|u-v\|^2 \end{aligned} \tag{1.2}$$

引理 1.24　对任意 $x \in H$ 和 $\mu > 0$, 有

$$\min\{1, \mu\}\|r_1(x)\| \leqslant \|r_\mu(x)\| \leqslant \max\{1, \mu\}\|r_1(x)\| \tag{1.3}$$

其中, $r_\mu(x) := x - \mathcal{P}_K(x - \mu T(x))$.

证明　假设 $\mu_2 \geqslant \mu_1 > 0$. 我们首先证明

$$\frac{\mu_1}{\mu_2}\|r_{\mu_2}(x)\| \leqslant \|r_{\mu_1}(x)\| \leqslant \|r_{\mu_2}(x)\| \tag{1.4}$$

令 $c := \dfrac{\|r_{\mu_1}(x)\|}{\|r_{\mu_2}(x)\|}$, 则我们只需证明

$$\frac{\mu_1}{\mu_2} \leqslant c \leqslant 1 \tag{1.5}$$

由于 $x - r_{\mu_1}(x) = \mathcal{P}_K(x - \mu_1 T(x))$, 故从引理 1.3(i) 可得

$$\langle y-(x-r_{\mu_1}(x)), x-\mu_1 T(x)-(x-r_{\mu_1}(x))\rangle \leqslant 0, \quad \forall y \in K \tag{1.6}$$

由于 $x - r_{\mu_2}(x) \in K$, 故根据式 (1.6) 有

$$\langle (x-r_{\mu_2}(x))-(x-r_{\mu_1}(x)), x-\mu_1 T(x)-(x-r_{\mu_1}(x))\rangle \leqslant 0$$

即

$$\langle r_{\mu_1}(x)-r_{\mu_2}(x), r_{\mu_1}(x)-\mu_1 T(x)\rangle \leqslant 0 \tag{1.7}$$

类似地, 有

$$\langle r_{\mu_2}(x)-r_{\mu_1}(x), r_{\mu_2}(x)-\mu_2 T(x)\rangle \leqslant 0 \tag{1.8}$$

分别用 μ_2 和 μ_1 乘以式 (1.7) 和式 (1.8) 的两边并相加可得

$$\langle r_{\mu_1}(x)-r_{\mu_2}(x), \mu_2 r_{\mu_1}(x)-\mu_1 r_{\mu_2}(x)\rangle \leqslant 0$$