国家科学技术学术著作出版基金
NFAPST

模糊偏好关系及其应用

王绪柱　武彩萍　薛　娜　著

科学出版社

国家科学技术学术著作出版基金资助出版

模糊偏好关系及其应用

王绪柱　武彩萍　薛　娜　著

科学出版社

北　京

内 容 简 介

本书系统讨论了模糊偏好关系的基本理论及其应用. 首先对普通偏好关系以及模糊逻辑联结运算等工具进行系统的介绍; 然后讨论模糊偏好关系理论, 主要集中于模糊关系的各种性质及其度量以及模糊偏好结构理论; 应用方面, 介绍了模糊选择函数以及基于模糊关系的模糊量排序.

模糊偏好关系理论是模糊决策的重要理论基础及工具. 本书可供应用数学、运筹学、经济学、决策理论及应用等相关学科的研究生以及科研人员参考.

图书在版编目(CIP)数据

模糊偏好关系及其应用/王绪柱, 武彩萍, 薛娜著. —北京: 科学出版社, 2016.6

ISBN 978-7-03-049337-8

Ⅰ. ①模… Ⅱ. ①王… ②武… ③薛… Ⅲ. ①模糊数学—研究 Ⅳ. ①O159

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016) 第 152180 号

责任编辑: 王 静 / 责任校对: 张凤琴
责任印制: 白 洋 / 封面设计: 迷底书装

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码: 100717
http://www.sciencep.com

文林印务有限公司印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2016 年 7 月第 一 版 开本: 720 × 1000 1/16
2016 年 7 月第一次印刷 印张: 16 1/2
字数: 333 000

定价: 49.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

前　言

一般而言, 决策分析研究备择对象的选择与排序问题, 为此, 必须对备择对象进行适当的比较以确定其优劣. 比较备择对象可能有多种方法, 如两两比较、一个与多个进行比较、一部分与另一部分进行比较等, 而两两 (逐对) 比较 (pairwise comparisons) 则是人们最为常用的比较方法之一. 数学上, 常用关系来描述这种比较, 由于决策中关系都是定义在全体备择对象集上, 实际上反映了决策者对备择对象的偏好 (preference), 所以常称为偏好关系. 现实中, 存在各种各样的偏好, 如大偏好、严格偏好、无区别关系等. 所以, 偏好关系现已渗入决策分析方方面面, 形成了一些别具特色的决策分支, 而偏好构模 (preference modeling) 理论则是它们的典型代表. 1965 年, L.A. Zadeh 提出模糊集的概念之后, 模糊思想很快深入决策领域, 形成了模糊决策. 模糊决策主要研究模糊环境下备择对象的选择与排序问题, 其中同样涉及备择对象的两两比较. 由于环境的模糊性以及考虑到决策者的主观因素, Orlovsky 认为: 决策者们在确定 "A 好于 B" 还是 "B 好于 A" 时显得左右为难, 此时更为适合的方法是用 [0,1] 中的数来描述 "A 好于 B" 以及 "B 好于 A" 的程度, 这就是 "赋值偏好 (valued preference)" 或者 "模糊偏好 (fuzzy preference)". 由于模糊偏好实际上是备择对象集上的模糊关系, 它反映决策者确定备择对象偏好时的模糊不确定性, 所以常称为模糊偏好关系. 本书即为模糊偏好关系及其在模糊量排序以及模糊选择函数的应用方面的一本专著, 它在总结了作者们多年来研究成果的同时, 也汇集了研究模糊偏好关系所需要的一些基础知识以及国际上有关模糊偏好的最新研究成果.

本书的主要内容如下: 第 1 章是关于普通 (偏好) 关系的一些预备知识, 包括关系的运算、偏好关系所可能具有的一些决策性质以及普通偏好结构, 所涉及的内容及相关结果是我们模糊化的基础. 第 2 章系统整理了模糊逻辑联结运算的相关内容, 主要包括模糊非、t-模、t-余模、模糊蕴涵、模糊等价等五类模糊联结算子. 第 3 章讨论模糊关系, 详细介绍了模糊关系的运算、迹、性质、闭包及内部, 其中模糊偏好关系的性质是本章讨论的重点, 这些性质包括了非对称、完全、传递、弱传递、负传递、半传递、一致、非循环以及 Ferrers 性等, 在讨论了它们之间关系的同时, 给出了它们的度量研究, 从而将相关结果推广到指标层面上. 第 4 章为模糊偏好结构, 其内容包括可加的 φ-模糊偏好结构及其性质、无不可比关系的可加的 φ-模糊偏好结构及一些常见的偏好结构 (如模糊弱序、模糊全区间序以及模糊全半序结构), 本章在参照大量文献资料的基础上, 选取可加偏好结构作为讨论的主线, 将国

际上有关模糊偏好结构的研究与我们的研究结果统一起来, 系统地整理并完善了有关模糊偏好结构的主要研究成果. 第 5 章是模糊数排序, 涉及在已知模糊偏好关系作为排序指标的情况下, 模糊量最终序关系的确定问题、典型的排序指标的传递性以及序关系的合理性等重要研究内容. 第 6 章为模糊选择函数, 我们以 Bernerjee 模糊选择函数为基础, 主要对选择函数与模糊偏好有关的课题进行了深入的研究, 内容涉及模糊选择函数及其导出的模糊偏好、模糊选择函数的合理性研究以及基于模糊偏好的模糊选择函数等. 本书的主要特点如下:

(1) 本书汇集了作者们及其研究小组多年来的研究结果, 除第 5 章和第 6 章完全是我们自己的研究成果以外, 也收入了我们关于 t-模的旋转不变性、模糊蕴涵、基于 (S,n)-蕴涵的模糊等价、模糊关系性质之间关系、性质度量以及模糊偏好结构方面的最新研究结果.

(2) 书稿的内容自成体系, 基本概念都有严格的定义、详细的讨论, 除个别结果以及模糊数学基础理论外, 所有用到的结论都给出了严格的证明.

(3) 在一些章节或概念之后, 介绍了与本章节或概念有关的更进一步的研究或其他形式, 为感兴趣的读者进一步阅读或研究提供一些线索.

模糊偏好关系理论是模糊决策的重要理论基础及工具, 是国际上从事模糊决策理论及应用研究的学者所关注的一个热门领域, 我们希望书稿的出版能为国内的相关研究人员提供模糊偏好关系主要研究成果的系统介绍, 并借此推动该研究在国内的开展.

本书的写作过程中得到了研究生们的大力帮助, 科学出版社王静编辑及其他编辑们也为书稿的出版付出了辛勤的劳动, 在此一并致谢! 另外, 本书得到了国家科学技术学术著作出版基金、山西省高等学校哲学社会科学研究项目 (2014314)、山西省研究生教育改革研究课题 (20142028) 的资助.

由于作者的水平限制, 不当之处在所难免, 还望指正.

作 者

2016 年 5 月

目　录

第1章　关　　系

在数学中, 存在各种各样的关系, 如实数的大于关系, 矩阵的等价、合同以及相似关系, 线性空间的同构关系等. 甚至有人说, 数学就是研究关系. 在日常生活中, 关系也随处可见, 例如: 亲戚关系、师生关系、上下级关系等. 直观上来看, 关系表达客体之间的联系. 那么如何从数学上描述这种联系呢? 我们从关系的概念开始.

1.1　关系的概念与运算

1.1.1　关系的基本概念

对任意集合 X, $P(X)$ 表示 X 的幂集, 即 X 的所有子集的集合.

定义 1.1　设 A 和 B 是两个集合, $R \subseteq A \times B$, 称 R 是从 A 到 B 的一个二元关系, 简称一个关系 (relation). 若 $(a,b) \in R$, 则称 A 与 B 具有关系 R, 简记为 aRb.

由定义可知, 从 A 到 B 的关系 R 是 $A \times B$ 的一个子集, 所以也可以用符号表示为 $R \in P(A \times B)$. 如果这个子集是空集, 则 R 称为空关系, 记为 $\varnothing$. 如果这个子集是 $A \times B$ 本身, 则 R 称为全关系. 特别地, 当 $A = B$ 时, R 称为 A 上的关系. 本书所涉及的关系均为 A 上的关系. A 上的一个特殊的关系为 $I_A = \{(a,a) | a \in A\}$, 该关系称为 A 上的恒等关系.

例 1.1　设 $A = \{1,2,3,4,5,6\}$, R 定义为 “整除关系”, 即

$$
\begin{aligned}
R =& \{(a,b) \mid a \mid b,\ a,b \in A\} \\
=& \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,2), \\
& (2,4),(2,6),(3,3),(3,6),(4,4),(5,5),(6,6)\},
\end{aligned}
$$

则 R 是 A 上的一个关系.

设 R_1 和 R_2 是 A 上的关系, 定义 R_2 包含 R_1 为: $\forall a,b \in A$, $aR_1b \Longrightarrow aR_2b$, 记为 $R_1 \subseteq R_2$. 若 $R_1 \subseteq R_2$ 且 $R_2 \subseteq R_1$, 则称 R_1 与 R_2 相等, 记为 $R_1 = R_2$.

1.1.2　关系的基本运算

因为关系即为集合, 故关系的许多运算和集合的运算相同. 如关系存在一元运

算余及二元运算并、交, 除这些运算外, 关系也有其特有的运算, 如逆运算、对偶运算以及合成运算等, 下面是这些运算的具体定义.

定义 1.2　设 R, R_1 和 R_2 是 A 上的关系, 定义

(1) R 的余 (complement) $R^c = \{(a,b)|(a,b) \notin R\}$;

(2) R 的逆 (inverse) $R^{-1} = \{(a,b) \mid (b,a) \in R\}$;

(3) R 的对偶 (dual) $R^d = \{(a,b)|(b,a) \notin R\}$;

(4) R_1 与 R_2 的交 (intersection) $R_1 \cap R_2 = \{(a,b)|aR_1b\text{且}aR_2b\}$;

(5) R_1 与 R_2 的并 (union) $R_1 \cup R_2 = \{(a,b)|aR_1b\text{或}aR_2b\}$;

(6) R_1 与 R_2 的合成 (composition) $R_1 \circ R_2 = \{(a,c)|\exists b \in A, aR_1b \text{ 且 } bR_2c\}$.

我们规定 $R^1 = R$, 对 $n \geqslant 2$ 的正整数, R^n 递归地定义为 $R^{n-1} \circ R$.

例 1.2　设 $A = \{a,b,c,d\}$, $R = \{(a,a),(a,c),(b,c),(c,b),(c,d),(d,a),(d,d)\}$, 则

$$R^{-1} = \{(a,a),(c,a),(b,c),(c,b),(d,c),(a,d),(d,d)\};$$

$$R^c = \{(a,b),(a,d),(b,a),(b,b),(b,d),(c,a),(c,c),(d,b),(d,c)\};$$

$$R^d = \{(b,a),(d,a),(a,b),(b,b),(d,b),(a,c),(c,c),(b,d),(c,d)\};$$

$$R^2 = \{(a,a),(a,b),(a,c),(a,d),(b,b),(b,d),(c,a),(c,c),(c,d),(d,a),(d,c),(d,d)\}.$$

注 1.1　逻辑上, 并、交分别表示两个关系的“或”及“与”, 余表示一个关系的“非”. 而其他运算也有其自己的实际意义, 例如: 若 R 表示“好于”关系的话, R^{-1} 可理解为“差于”关系. 另外, 由定义容易验证: “叔侄”关系是“弟兄”关系与“父子”关系的合成, “堂兄弟”关系可表示为“(父子$^{-1}$ $\circ$ 弟兄)$\circ$ 父子”.

下列命题给出了关系运算的性质.

命题 1.1　设 R, R_1, R_2 是 A 上的关系, 则

(1) $R^d = (R^c)^{-1} = (R^{-1})^c$;

(2) $(R^{-1})^{-1} = R$, $(R^c)^c = R$;

(3) $R_1 \subseteq R_2 \iff R_1^{-1} \subseteq R_2^{-1}$;

(4) $(R_1 \cap R_2)^c = (R_1)^c \cup (R_2)^c$, $(R_1 \cup R_2)^c = (R_1)^c \cap (R_2)^c$;

(5) $(R_1 \cup R_2)^{-1} = R_1^{-1} \cup R_2^{-1}$, $(R_1 \cap R_2)^{-1} = R_1^{-1} \cap R_2^{-1}$;

(6) $(R_1 \circ R_2) \circ R_3 = R_1 \circ (R_2 \circ R_3)$;

(7) $(R_1 \circ R_2)^{-1} = R_2^{-1} \circ R_1^{-1}$;

(8) $R \circ (R_1 \cup R_2) = (R \circ R_1) \cup (R \circ R_2)$, $(R_1 \cup R_2) \circ R = (R_1 \circ R) \cup (R_2 \circ R)$;

(9) 当 l, m, n 是任意的正整数时, $R^l \circ R^m = R^{l+m}$, $(R^l)^m = R^{lm}$.

证明　我们证明 (1), (6) 及 (9), 其余证明留给读者.

(1) 对任意 $a, b \in A$,

$$(a,b) \in R^d \iff (b,a) \notin R \iff (b,a) \in R^c \iff (a,b) \in (R^c)^{-1}.$$

所以, $R^d=(R^c)^{-1}$. 类似可得 $R^d=(R^{-1})^c$.

(6) 对任意 $a,b\in A$,

$$\begin{aligned}(a,b)\in(R_1\circ R_2)\circ R_3 &\Longleftrightarrow \exists c\in A,\ \text{使得}(a,c)\in(R_1\circ R_2)\ \text{且}(c,b)\in R_3\\ &\Longleftrightarrow \exists c,d\in A,\ \text{使得}(a,d)\in R_1\ \text{且}(d,c)\in R_2\ \text{且}(c,b)\in R_3\\ &\Longleftrightarrow \exists d\in A,\ \text{使得}(a,d)\in R_1\ \text{且}(d,b)\in R_2\circ R_3\\ &\Longleftrightarrow (a,b)\in R_1\circ(R_2\circ R_3).\end{aligned}$$

故 $(R_1\circ R_2)\circ R_3=R_1\circ(R_2\circ R_3)$.

(9) 对 m 用数学归纳法证明 $R^l\circ R^m=R^{l+m}$.

$m=1$ 时, $R^l\circ R=R^{l+1}$ 即为定义. 假设 $m=k-1$ 时上述等式成立, 下面考虑 $m=k$ 时的情况, 由 (6) 及归纳假设,

$$R^l\circ R^k=R^l\circ(R^{k-1}\circ R)=(R^l\circ R^{k-1})\circ R=(R^{l+k-1})\circ R=R^{l+k},$$

故 $R^l\circ R^m=R^{l+m}$.

类似可证 $(R^l)^m=R^{lm}$. □

1.1.3 有限集上的关系的矩阵表示法

有限集上的关系除了可以像在例 1.1 中那样用集合表示外, 还可以用只含 0, 1 元的矩阵来描述, 具体做法如下: 设 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$, R 为 A 上的一个二元关系, 则 R 确定一个矩阵 $(r_{ij})_{n\times n}$, 其中

$$r_{ij}=\begin{cases}1, & a_iRa_j,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

以后, 我们就用该矩阵表示关系 R, 即 $R=(r_{ij})_{n\times n}$, 如例 1.2 中所涉及的关系可用矩阵表示为

$$R=\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&0&1&0\\0&1&0&1\\1&0&0&1\end{pmatrix},\quad R^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&0&1&0\\1&1&0&0\\0&0&1&1\end{pmatrix},$$

$$R^c=\begin{pmatrix}0&1&0&1\\1&1&0&1\\1&0&1&0\\0&1&1&0\end{pmatrix},\quad R^d=\begin{pmatrix}0&1&1&0\\1&1&0&1\\0&0&1&1\\1&1&0&0\end{pmatrix}.$$

在决策分析中, 决策者经常需要对一些备选对象 (方案、人、物等) 之间进行比较, 这些备选的对象称为备择对象 (alternatives). 若我们用 A 表示所有的备择对象集, A 上的关系通常表示决策者在对备择对象进行两两比较时的一种偏好 (preference), 如"好于""不差于""无区别"等都表示决策者的某种偏好, 当它们用关系来表述时, 习惯上称之为偏好关系. 所以, 本书中的偏好关系指的是备择对象集上的二元关系. 例如: 三个备择对象 a, b, c 构成的备择对象集为 $A = \{a, b, c\}$. 若一个决策者认为:"a 好于 b""b 好于 c"且"a 好于 c", 则我们就可以用 A 上的关系 $P = \{(a, b), (a, c), (b, c)\}$ 来表述该"好于"关系, P 实际上反映了该决策者的偏好, 是最典型的一类偏好关系 (严格偏好). 本书以各种偏好关系及其模糊化形式作为研究对象.

1.2　关系的基本性质

1.2.1　基本性质

设 R 是 A 上的一个关系, R 的各种性质定义如下:

(1) 自反性 (reflexivity): $\forall a \in A, aRa$;

(2) 非自反性 (irreflexivity): $\forall a \in A, aR^c a$;

(3) 对称性 (symmetry): $\forall a, b \in A, aRb$ 时, bRa;

(4) 反对称性 (antisymmetry): $\forall a, b \in A, a \neq b, aRb$ 时, $bR^c a$;

(5) 非对称性 (asymmetry): $\forall a, b \in A, aRb$ 时, $bR^c a$;

(6) 完全性 (completeness): $\forall a, b \in A, a \neq b$ 时, aRb 或 bRa;

(7) 强完全性 (strong completeness): $\forall a, b \in A, aRb$ 或 bRa;

(8) 传递性 (transitivity): $\forall a, b, c \in A, aRb$ 且 bRc 时, aRc;

(9) 负传递性 (negative transitivity): $\forall a, b, c \in A, aRc$ 时, aRb 或 bRc;

(10) 半传递性 (semitransitivity): $\forall a, b, c, d \in A, aRb$ 且 bRc 时, aRd 或 dRc;

(11) Ferrers 性质: $\forall a, b, c, d \in A, aRb$ 且 cRd 时, aRd 或 cRb;

(12) 非循环性 (acyclicity):

$$\text{对任意正整数 } n, \text{不存在 } a_1, a_2, \cdots, a_n \text{ 使得 } a_1Ra_2R\cdots Ra_nRa_1.$$

注 1.2　据我们所知, Ferrers 性质以及半传递性分别是 Riguet[1] 以及 Chipman[2] 提出来的. 非循环的定义取自文献 [3], 其他文献中有不同的定义方法[4−8], 例如: 文献 [6], [8] 中 R 的非循环性即为我们的定义下 R 的严格部分 $P_R = R \cap R^d$ 的非循环性, 而文献 [5], [7], [9] 给出的 R 非循环的定义在 R 为强完全的情况下即为我们的定义下 P_R 的非循环性. 我们认为, 本书所采用的定义较为自然.

由定义立得:

(1) R 非对称 $\Longleftrightarrow$ R 非自反且反对称;

(2) R 强完全 $\Longleftrightarrow$ R 自反且完全;

(3) R 非循环 $\Longrightarrow R$ 非自反;

(4) R 传递、非自反 $\Longrightarrow R$ 非循环;

(5) R 传递、非自反 $\Longrightarrow R$ 非对称;

(6) R 传递 $\Longrightarrow P_R$ 非循环.

另外, 就上面所定义的各种性质而言, R 与 R^{-1} 的性质相同, 从而 R^c 与 R^d 的性质相同. 例如: R 自反 $\Longleftrightarrow$ R^{-1} 自反; R^c 自反 $\Longleftrightarrow$ R^d 自反, 等等.

容易证明下列结论.

命题 1.2 设 R 是 A 上的关系.

(1) R 非对称 $\Longleftrightarrow$ $R^{-1}\cap R=\varnothing$;

(2) R 强完全 $\Longleftrightarrow$ $R\cup R^{-1}=A\times A$;

(3) R 对称 $\Longleftrightarrow$ $R^{-1}=R$;

(4) R 反对称 $\Longleftrightarrow$ $R^{-1}\cap R\subseteq I_A$;

(5) R 传递 $\Longleftrightarrow$ $R^2\subseteq R$.

1.2.2 基本性质之间的联系

首先, 给出了关系与它的余关系性质之间的联系.

命题 1.3 设 R 是 A 上的关系.

(1) R 自反 $\Longleftrightarrow R^c$ 非自反, R 非自反 $\Longleftrightarrow R^c$ 自反;

(2) R 对称 $\Longleftrightarrow R^c$ 对称;

(3) R 反对称 $\Longleftrightarrow R^c$ 完全, R 完全 $\Longleftrightarrow R^c$ 反对称;

(4) R 非对称 $\Longleftrightarrow R^c$ 强完全, R 强完全 $\Longleftrightarrow$ R^c 非对称;

(5) R 传递 $\Longleftrightarrow R^c$ 负传递, R 负传递 $\Longleftrightarrow R^c$ 传递;

(6) R 半传递 $\Longleftrightarrow R^c$ 半传递;

(7) R 为 Ferrers 关系 $\Longleftrightarrow R^c$ 为 Ferrers 关系.

证明 我们证明 (3) 及 (6), 其余证明留给读者.

(3) 设 R 反对称, $\forall a,b\in A$, $a\neq b$, $a(R^c)^cb$, 则 aRb. 由 R 反对称, bR^ca, 即 R^c 完全. 反之, 设 R^c 完全, $\forall a,b\in A$, $a\neq b$, aRb, 即 $a(R^c)^cb$, 由完全性, bR^ca, 故 R 反对称. 类似可证 R 完全 $\Longleftrightarrow R^c$ 反对称.

(6) 设 $\forall a,b\in A$, aR^cb 且 bR^cc, 此时, 若 $a(R^c)^cd$ 且 $d(R^c)^cc$, 则 aRd 且 dRc, 由 R 的半传递性, aRb 或 bRc, 矛盾. 故 R 半传递 $\Longrightarrow R^c$ 半传递. 由命题 1.1(2) 得 $R=(R^c)^c$, 故 R^c 半传递 $\Longrightarrow R$ 半传递. □

若一个关系 R 具有某个性质 P_1 当且仅当 R^d 具有性质 P_2, 则称 P_1 与 P_2 是对偶性质. 所以, 自反与非自反、R 反 (非) 对称与 (强) 完全、传递与负传递均为对偶性质, 而对称性、半传递性以及 Ferrers 性质由于与自身对偶, 故将它们称为自对偶性质. 接下来, 我们给出传递、负传递、半传递以及 Ferrers 性质之间的关系.

命题 1.4 设 R 是一个 A 上的关系.

(1) 若 R 完全且传递, 则 R 是一个负传递、半传递的 Ferrers 关系;

(2) 若 R 反对称且负传递, 则 R 是一个传递、半传递的 Ferrers 关系;

(3) 若 R 非自反且半传递, 则 R 传递;

(4) 若 R 自反且半传递, 则 R 负传递;

(5) 若 R 非自反、完全且半传递, 则 R 为 Ferrers 关系;

(6) 若 R 是非自反的 Ferrers 关系, 则 R 传递;

(7) 若 R 是自反的 Ferrers 关系, 则 R 负传递;

(8) 若 R 是非自反、完全的 Ferrers 关系, 则 R 半传递;

(9) 若 R 传递且负传递, 则 R 是一个半传递的 Ferrers 关系.

证明 (1) 先证负传递性. 设 aRc, 证明: $\forall b$, aRb 或 bRc.

若 $b = a$, 显然.

若 $b \neq a$, 设 aR^cb, 则由完全性, bRa, 由于 aRc, 根据传递性, bRc.

再证半传递性. 设 aRb 且 bRc, 证明: $\forall d$, aRd 或 dRc.

若 $d = a$, 则 dRb 且 bRc. 由传递性得 dRc.

若 $d \neq a$, 设 aR^cd, 则由完全性得 dRa. 又由 aRb, bRc, 根据传递性得 dRc.

最后证 Ferrers 性质. 设 aRb 且 cRd, 证明 $\forall c, d \in A$, aRd 或 cRb.

若 $d = a$, 则由 cRa, aRb 及传递性得 cRb.

若 $d \neq a$, 设 aR^cd, 则由完全性得 dRa. 又 cRd, 由传递性得 cRa. 又 aRb, 再由传递性得 cRb.

(2) 因为 R 反对称且负传递, 由命题 1.3(3), (5) 知 R^c 完全且传递. 由 (1) 知 R^c 是一个负传递、半传递的 Ferrers 关系. 再由命题 1.3(5), (6), (7) 知 R 是一个传递、半传递的 Ferrers 关系.

(3) 对任意 $a, b, c \in A$, 若 aRb, bRc, 由半传递性, aRc 或 cRc, 由于 R 的非自反性, 故 cRc 不可能, 所以 aRc.

(4) 由 R 自反且半传递, 则由命题 1.3(1), (6) 知, R^c 非自反且半传递, 由 (3) 知 R^c 传递, 再由命题 1.3(5) 知 R 负传递.

(5) 因为 R 非自反且半传递, 由 (3) 知 R 传递. 又因为 R 完全, 由 (1) 知 R 为 Ferrers 关系.

(6) 对任意 $a,b,c\in A$, 若 aRb 且 bRc, 由 Ferrers 关系知 aRc 或 bRb(与 R 非自反矛盾). 故 aRc.

(7) 因为 R 是自反的 Ferrers 关系, 由命题 1.3(1), (7) 知, R^c 为非自反的 Ferrers 关系, 由 (6) 知 R^c 传递, 再由命题 1.3(5) 知 R 负传递.

(8) 因为 R 是非自反的 Ferrers 关系, 由 (6) 知 R 传递. 又因为 R 完全, 由 (1) 知 R 半传递.

(9) 先证半传递性. 假设存在 $a,b,c\in A$ 满足 aRb 及 bRc, 由传递性知 aRc. 再由负传递性知, 对任意 $d\in A$, aRd 或 dRc.

再证 Ferrers 性质. 对任意 $a,b,c,d\in A$, aRb 且 cRd, 证明 aRd 或 cRb. 由 aRb 及负传递性, 知 aRc 或 cRb. 若 cRb, 已证. 若 aRc, 由 cRd 及传递性得 aRd. □

当然, 除了上面所给出的关系外, 还有其他一些关系, 如“若 R 非自反、完全且半传递则 R 负传递”“若 R 自反、反对称且半传递, 则 R 是一个传递的 Ferrers 关系”等, 这里就不一一列举了.

1.3 关系的特征函数

1.3.1 特征函数的概念及关系运算的特征函数

我们知道, 一个 A 上的关系 R 是 $A\times A$ 的一个普通子集, 它的特征函数 (也称之为特征关系) 为: 对任意的 $a,b\in A$,

$$\chi_R(a,b)=\begin{cases}1, & aRb,\\ 0, & \text{否则}.\end{cases}$$

显然, 空关系的特征函数的值恒为 0, 全关系的特征函数的值恒为 1.

命题 1.5 设 $R,S\in P(A\times A)$, 则关系的各种运算的特征函数如下:

(1) $\forall a,b\in A,\ \chi_{R\cup S}(a,b)=\max\{\chi_R(a,b),\ \chi_S(a,b)\}$;

(2) $\forall a,b\in A,\ \chi_{R\cap S}(a,b)=\min\{\chi_R(a,b),\ \chi_S(a,b)\}$;

(3) $\forall a,b\in A,\ \chi_{R^c}(a,b)=1-\chi_R(a,b)$;

(4) $\forall a,b\in A,\ \chi_{R^{-1}}(a,b)=\chi_R(b,a)$;

(5) $\forall a,b\in A,\ \chi_{R\circ S}(a,b)=\sup\limits_{c\in A}\min\{\chi_R(a,c),\ \chi_S(c,b)\}$.

证明 这里我们仅给出 (1) 与 (5) 的证明.

(1) 任取 $a,b\in A$,

$$\begin{aligned}\chi_{R\cup S}(a,b)=1 &\Longleftrightarrow (a,b)\in R\cup S\\ &\Longleftrightarrow (a,b)\in R\ \text{或}\ (a,b)\in S\\ &\Longleftrightarrow \chi_R(a,b)=1\ \text{或}\ \chi_S(a,b)=1\\ &\Longleftrightarrow \max\{\chi_R(a,b),\chi_S(a,b)\}=1.\end{aligned}$$

(5) 任取 $a,b \in A$,

$$\begin{aligned}\chi_{R\circ S}(a,b)=1 &\iff (a,b)\in R\circ S\\ &\iff \exists c\in A,(a,c)\in R\text{ 且}(c,b)\in S\\ &\iff \exists c\in A,\chi_R(a,c)=1\text{ 且}\chi_S(c,b)=1\\ &\iff \exists c\in A,\min\{\chi_R(a,c),\chi_S(c,b)\}=1\\ &\iff \sup_{c\in A}\min\{\chi_R(a,c),\chi_S(c,b)\}=1.\end{aligned}$$ □

在有限论域的关系矩阵表示法中, 矩阵中元素的值实际即为特征函数值. 具体来说, 若 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$, R 是 A 上的关系, 其矩阵表示为 $R=(r_{ij})_{n\times n}$, 则 $r_{ij}=\chi_R(a_i,a_j)$ $(i,j=1,2,\cdots,n)$. 设 $R=(r_{ij})_{n\times n}$, $S=(s_{ij})_{n\times n}$, 则由命题 1.5 容易得到:

(1) $R\cup S=(\max\{r_{ij},s_{ij}\})_{n\times n}$;

(2) $R\cap S=(\min\{r_{ij},s_{ij}\})_{n\times n}$;

(3) $R^c=(1-r_{ij})_{n\times n}$;

(4) $R^{-1}=(r'_{ij})_{n\times n}$, 其中 $r'_{ij}=r_{ji}$, 即 R^{-1} 是 R 的转置;

(5) $R\circ S=(t_{ij})_{n\times n}$, 其中 $t_{ij}=\max\{\min\{r_{i1},s_{1j}\},\min\{r_{i2},s_{2j}\},\cdots,\min\{r_{in},s_{nj}\}\}$.

1.3.2 关系性质的特征函数描述

设 R 是 A 上的一个关系, 则 R 的各种性质可以用特征函数来描述.

(1) R 自反 $\iff \forall a\in A,\ \chi_R(a,a)=1$;

(2) R 非自反 $\iff \forall a\in A,\ \chi_R(a,a)=0$;

(3) R 反对称 $\iff \forall a,b\in A,\ a\neq b,\ \min\{\chi_R(a,b),\chi_R(b,a)\}=0$;

(4) R 非对称 $\iff \forall a,b\in A,\ \min\{\chi_R(a,b),\chi_R(b,a)\}=0$;

(5) R 完全 $\iff \forall a,b\in A,\ a\neq b,\ \max\{\chi_R(a,b),\chi_R(b,a)\}=1$;

(6) R 强完全 $\iff \forall a,b\in A,\ \max\{\chi_R(a,b),\chi_R(b,a)\}=1$;

(7) R 传递 $\iff \forall a,b,c\in A,\ \min\{\chi_R(a,b),\chi_R(b,c)\}\leqslant\chi_R(a,c)$;

(8) R 负传递 $\iff \forall a,b,c\in A,\ \chi_R(a,c)\leqslant\max\{\chi_R(a,b),\chi_R(b,c)\}$;

(9) R 半传递 $\iff \forall a,b,c,d\in A,\ \min\{\chi_R(a,b),\chi_R(b,c)\}\leqslant\max\{\chi_R(a,d),\chi_R(d,c)\}$;

(10) R 是一个 Ferrers 关系当且仅当

$$\forall a,b,c,d\in A,\quad \min\{\chi_R(a,b),\chi_R(c,d)\}\leqslant\max\{\chi_R(a,d),\chi_R(c,b)\}.$$

证明 我们给出 (1) 与 (4) 的证明, 其余证明留给读者.