

论可计算数

【美】克里斯·伯恩哈特 (Chris Bernhardt) 著 雪曼译

图灵与现代计算的诞生

深度解读人工智能领域奠基之作、图灵一生中最重要的论文
《论可计算数及其在判定问题上的应用》 解开现代计算诞生背后的秘密



中信出版集团 CHINA CITI PRESS

THE BIRTH OF
COMPUTER SCIENCE

TURING'S
VISION
THE BIRTH OF
COMPUTER SCIENCE

论可计算数

图灵与现代计算的诞生

【美】克里斯·伯恩哈特 (Chris Bernhardt) 著

雪曼 译

图书在版编目 (CIP) 数据

论可计算数: 图灵与现代计算的诞生 / (美) 伯恩

哈特著; 雪曼译. -- 北京: 中信出版社, 2016.9

书名原文: Turing's Vision: The Birth of

Computer Science

ISBN 978-7-5086-6610-5

I. ①论… II. ①伯… ②雪… III. ①可计算性—研

究 IV. ① O141.3

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2016) 第 202037 号

Turing's Vision: The Birth of Computer Science by Chris Bernhardt

Copyright © 2016 Massachusetts Institute of Technology

Simplified Chinese translation copyright © 2016 by CITIC Press Corporation

ALL RIGHTS RESERVED

本书仅限中国大陆地区发行销售

论可计算数

著 者: [美] 克里斯·伯恩哈特

译 者: 雪 曼

策划推广: 中信出版社 (China CITIC Press)

出版发行: 中信出版集团股份有限公司

(北京市朝阳区惠新东街甲 4 号富盛大厦 2 座 邮编 100029)

(CITIC Publishing Group)

承 印 者: 北京通州皇家印刷厂

开 本: 880mm×1230mm 1/32

印 张: 8.25 字 数: 156 千字

版 次: 2016 年 9 月第 1 版

印 次: 2016 年 9 月第 1 次印刷

京权图字: 01-2016-6022

广告经营许可证: 京朝工商广字第 8087 号

书 号: ISBN 978-7-5086-6610-5

定 价: 49.00 元

版权所有·侵权必究

凡购本社图书, 如有缺页、倒页、脱页, 由销售部门负责退换。

服务热线: 400-600-8099

投稿邮箱: author@citicpub.com

市面上的图灵传记不胜枚举。英国演员德里克·雅各比（Derek Jacobi）将他的形象带上舞台，本尼迪克特·康伯巴奇（Benedict Cumberbatch）又在电影中进行了重新演绎。艾伦·图灵即便算不上家喻户晓的名人，也算得上众所周知的人物。很多人都知道，他在第二次世界大战期间进行的密码破译工作对盟军最终战胜德军起到了关键作用。人们可能听说过，图灵的一生以氰化物中毒悲惨而终，也有人听说过他为判断“计算机是否可以思考”而设计的测试。或许并不那么有名的事实是计算机科学界的最高奖项叫图灵奖（A. M. Turing Award）。这一奖项被奉为计算界的诺贝尔奖。每年国际计算机协会（Association for Computing Machinery，简称ACM）都会向在计算机领域有杰出贡献的人颁发图灵奖，并送上100万美元的奖金。ACM以图灵的名字命名了这一奖项，

是因为图灵被视作计算机科学的奠基人之一。他做了哪些帮助人类构建计算机科学的事情？答案就是 1936 年图灵发表的一篇引人注目的论文，那时他只有 24 岁。这篇论文是图灵最重要的知识贡献。然而论文本身以及蕴藏其中的开创性观点却并没有广泛流传。本书的内容就围绕这篇论文展开。

这篇论文的题目看起来有些无趣：论可计算数及其在判定问题上的应用（*On Computable Numbers, with an Application to the Entscheidungsproblem*）。不要因为这个题目而太过沮丧，论文中包含了很多优雅而强大的结论和出色美妙的论证。图灵希望通过自己的论文证明当时一位顶尖数学家的观点是错误的。为了实现这一目标，他需要研究计算：什么是计算？我们该如何定义它？是否存在无法用计算解决的问题？他用令人眼花缭乱的技巧、别出心裁的创意回答了这些问题。

图灵仔细思考了人们完成计算的方法。他意识到，任何计算都可以拆分成一系列简单的步骤。接下来，他制造了能够完成其中每一个步骤的理论机器。这些机器就是我们现在所说的图灵机，它们能够完成任何计算¹。而在这之后，他指出我们并不需要为每种不同算法设计各自的专属机器，只需设计一个可以运行任意算法的机器。在这一过程中，他提出了存储程序（*stored-program*）的概念，我们将会看到这对现代计算机的发展是至关重要的。最后，他证明了有一些特定的问题超出了计算机的能力范畴。

这些图灵机是现代计算机的理论模型。计算机能够执行的所有任务都能够由图灵机进行计算。因此，他的论文不只具有历史价值，他告诉我们计算机能完成哪些任务，不能完成哪些任务。他告诉我们计算的限制乍看起来似乎直接明了，可想要做出正确回答，却超出了任何一台计算机的能力范畴。

这篇论文中包含的观点出现在很多大学的本科课程中，课程名称通常是计算理论（Theory of Computation）。由于大多数大学生没有选修这门课程，所以多数人并未接触过图灵的工作。总体来说，在全球庞大的人口数量中，只有很小一部分人知道图灵论文的内容。这篇论文不仅包含了很多非凡的想法，也与当代生活有着紧密联系，考虑到这些，不能不说这种陌生是一个遗憾。

广义相对论与量子力学都诞生于 20 世纪上半叶。对于这两大理论，大多数人脑海中都有些概念。这两大理论都建立在非常复杂的数学基础上，所以理解起来有一定的难度。不过，理解图灵的论文并没有这种压力。正如马文·明斯基（Marvin Minsky）所说：“这一理论的纯粹与简明赋予其数学的美感，这种美感确保其在计算机理论中拥有永恒的地位。”²

我们将从图灵理论的基础开始，逐步延伸到那些惊人的结论。同时，我们也会尽可能补充图灵研究的背景和相关信息。为此，我们将介绍一些图灵论文发表前后的历史。

对于计算，不同人可能有不同的见解，这些观点并无对

错之分。不同观点背后的景色迥然不同。在本书中，我们会在必要的时候稍作停留，深入探讨其中的一些观点。特别是普林斯顿大学逻辑学家阿隆佐·邱奇（Alonzo Church）的观点，它采用了一种完全不同的方式来探索计算。邱奇和图灵都曾为解答德国数学家戴维·希尔伯特（David Hilbert）提出的问题而努力研究。两人得出了一样的结论：希尔伯特做出的假设是错误的，不过邱奇先于图灵发表了自己的结论。

看到邱奇的论文时，图灵还在撰写自己的论文——知道有人已经抢先一步得出与自己一致的结论，当时图灵的心中势必满是苦涩与失望。

不过两人解决这一问题的方式却很不同，论证过程也因此大相径庭。图灵的论证要简明优雅得多。他的论文并非为了结论而发表，而是为了结论的证明过程而发表。

数学家经常会用“美丽”来形容一些出色的证明过程。在进行数学研究的时候，会有一种美学的指引。每当你做出证明却感觉过程稍显笨拙时，一定还有更好的论证有待开发。匈牙利数学家保罗·厄多斯（Paul Erdős）在谈及《圣经》时指出，上帝在一本书中写就了所有最简捷、最美妙的论证。厄多斯说过这样一句著名的话：“你不一定要信仰上帝，但是你应该信仰《圣经》。”据此来看，图灵证明以及他参考的库尔特·哥德尔（Kurt Gödel）和格奥尔格·康托尔（Georg Cantor）的理论，一定都能被收录在《圣经》中。

本书主要服务那些希望了解这些想法的读者。我们将从基础开始，徐徐展开整幅画卷。读者只需具备高中数学知识。本书需要认真阅读，有些章节、段落需要反复研读。因为图灵讲述的并不是计算领域一些无关紧要的细枝末节，而是一些深层次的、并不直观的内容。也就是说，很多人可能会觉得这些想法相当有趣，自己的付出也是值得的。

以下是本书中一些重要观点的概述，依据它们在本书中的出现顺序排列。

第一章

本章将关注 19 世纪下半叶至 20 世纪初的数学发展历史，介绍当时的数学基础如何摇摇欲坠，各类学者如何纷纷试图捍卫数学的基础。一位名叫戴维·希尔伯特的数学家在自己的研究项目中阐述了“判定问题”，即寻找算法来判定数学中的某些一般陈述正确与否。希尔伯特确信，这种算法一定存在。

这种观点导致了一个问题：执行一个计算，到底意味着什么？计算一直是数学的组成部分。实际上，几个世纪以来，数学和计算本质上是同义词，然而现在情况发生了转变。计算已经发展为一个独立的研究领域。图灵撰写论文的目的，就是证明希尔伯特关于计算能力的观点是错误的。

第二章

图灵希望证明存在一些超出计算机解决问题的能力问题。具体来说，他想要找到一个能够被证明为不可判定的判定问题。本章的目标就是解释“判定问题”和“不可判定”的含义以及它们为何重要。

我们会讨论三个著名的判定问题，这三个问题已经被证明是不可判定的。我们还会分析不可判定在这些情况中有何意义。

第三章

图灵用理论计算机器定义了计算。我们将以有限自动机为切入点研究自动机（即理论计算机器）。有限自动机比图灵机简单，并且易于描述和使用。我们会讨论有限自动机可以计算哪些问题，还会给出超越它们计算能力的例子并证明。此外，我们还会考虑如何将这些自动机执行的运算与波斯特的对应问题联系起来。

本章还会介绍正则表达式，证明它们与所说明的有限自动机的等价性。我们看到，拥有不止一种计算描述方法将十分有益。

第四章

本章介绍了图灵机。图灵机看起来并不比有限自动机复

杂很多，但却被证明更加强大。上一章中的超越有限自动机计算能力的问题，被证明可以使用这些新机器解决。

本章还介绍了邱奇—图灵论题，即任意可由图灵机实现的算法。我们还将看到，这些机器带来了一种新的重要现象。一些机器永远不会停止输入，会一直运行下去。

第五章

除了图灵的方法，还有几种研究计算的不同方法。在本章，我们将讨论其中三种方法。首先是阿隆佐·邱奇的 λ 积分，接下来是标签系统，最后是元胞自动机。

这些计算观点看似截然不同，但每种观点都具有自身的优势。 λ 积分孕育了编程语言；标签系统在证明不同系统的等价性时非常有用；元胞自动机给出了计算全过程的图形表示。之后，我们将回归图灵的论证。

第六章

在之前几章中，我们一直用图形描述机器。在本章，我们将展示如何使用有限数字序列描述有限自动机和图灵机，即编码（encodings）。这与将高级语言转换为机器语言类似。编码导致了通用图灵机（Universal Turing machines）概念的产生——一个能够输入程序和数据，并在数据上运行程序的机器。我们会看到，现代计算机是通用机器。

第七章

上一章的最后一个话题讨论了在与机器描述对应的有限数字序列上运行机器，即在机器自己的编码上运行机器。这种自我引用概念相当重要。我们将详细分析并证明这个概念能够帮助我们证明某些问题是不可判定的。

本书并未假设读者具有相当强的数学知识。本章和下一章都会用到矛盾证明法。本章首先会解释这种证明方法——详细介绍“ $\sqrt{2}$ 不是有理数”的经典证明。随后，我们会介绍罗素的理发师悖论（**Barber Paradox**）。

介绍完这些概念后，我们将回归自动机的论证。我们证明了一些有限自动机可以接纳自己的编码，一些有限自动机则不能，但是不存在能够区分这两种情况的有限自动机。

之后，这种观点被拓展到图灵机：存在一些图灵机可以接纳自己的编码，一些图灵机则不可以，但是不存在能够区分这两种情况的图灵机。反过来，这个事实使我们可以证明某些判定问题是不可判定的。具体来说，我们证明了停机问题（**Halting Problem**）和接纳问题（**Acceptance Problem**）都是不可判定的。

第八章

图灵的论文题目为“论可计算数及其在判定问题上的应

用”。我们已经介绍了判定问题，但是并未介绍可计算数。本章，我们会讨论这些数字的含义以及与它们相关的基本结论。

本章首先会介绍康托尔的基数（cardinality）概念。我们会讨论一些基本的、令人惊讶的关于无限基数的事实，还会介绍用于证明两个集合拥有不同基数的康托尔对角论证法和一般论证法。然后，我们会再次回归图灵的论文。我们还会解释有效可枚举（effectively enumerable）的含义。最后，我们会解释图灵证明可计算数并不是有效可枚举的过程。

第九章

最后一章将介绍在图灵发表论文后的几年时间里，他本人和计算机发生了什么变化。

图灵来到普林斯顿大学，在邱奇的指导下拿到了自己的博士学位。他在这里结识了约翰·冯·诺依曼（John von Neumann）。随后，图灵返回英国，并在第二次世界大战期间研究密码破译。

讲述完这些故事后，我们会简要地介绍在这 40 年间，现代计算机是如何从无到有的。我们将看到从复杂计算器到通用计算机，再到存储程序的通用计算的发展历程。具体来说，我们会提及图灵论文中萌生出的存储程序概念。

1950 年，图灵发表了一篇论文，描述现在所谓的图灵机。我们将会简要介绍图灵机及这个概念的后续发展。

本章结尾部分将谈及杰克·科普兰（Jack Copeland）对图灵之死的研究，以及事实真相——或许图灵之死源于事故，而非谋杀。

最后，我们会谈到戈登·布朗（Gordon Brown）代表英国政府发表的道歉文章。

前 言 // VII

第一章
背景

数学的确定性	// 004
布尔逻辑	// 008
数学逻辑	// 010
逻辑机器	// 011
保卫数学基础	// 012
希尔伯特的方法	// 014
哥德尔结论	// 016
图灵的结论	// 016

第二章
一些不可判定的判定问题

埃米尔·波斯特	// 025
波斯特的对应问题	// 026
一个算法	// 030
含有更多符号的对应问题	// 032
希尔伯特的第 10 个问题	// 034

停机问题	// 036
剑桥的图灵	// 036

第三章 有限自动机

有限自动机	// 043
我们的第一个机器	// 044
字母表和语言	// 046
有限自动机和回答问题	// 049
问题的否定	// 051
忽略图表中的陷阱	// 052
一些基本事实	// 054
正则表达式	// 057
有限自动机的瓶颈	// 062
同样数量的 0 和 1	// 063
平衡括号	// 064
磁带和配置	// 065
联系对应问题	// 067

第四章 图灵机

图灵机的例子	// 079
可计算函数和计算	// 088
邱奇—图灵论题	// 090
计算能力	// 092
多项式时间	// 093
非确定性图灵机	// 095
不会停机的机器	// 097

第五章 其他计算系统

- λ 积分 // 106
- 皮亚诺算术 // 108
- λ 积分和函数 // 109
- 算术 // 110
- 逻辑 // 112
- 标签系统 // 114
- 一维元胞自动机 // 119

第六章 编码和通用机器

- 编码有限自动机的方法 // 129
- 通用机器 // 133
- 设计通用机器 // 136
- 现代计算机是图灵机 // 138
- 冯·诺依曼结构 // 140
- 随机存取机器 // 142
- 图灵机能够模拟 RAM // 145
- 其他通用机器 // 147
- 当我们把 $\langle M \rangle$ 输入 M 的时候会发生什么 // 149

第七章 不可判定的问题

- 矛盾证明法 // 155
- 罗素的理发师 // 158
- 不接纳自己的编码的有限自动机 // 161
- 不接纳自己的编码的图灵机 // 162
- “图灵机是否会在自己的编码上偏离”是不可判定的 // 164
- 接纳、停机和空白磁带问题 // 166
- 一个不可计算函数 // 168
- 图灵的方法 // 170

第八章
康托尔的对角论证法

基数 // 177

有理数的子集拥有相同的基数 // 179

希尔伯特旅馆 // 182

定义不完善的减法 // 184

一般对角论证 // 184

康托尔定理 // 186

实数的基数 // 189

对角论证法 // 193

连续统假设 // 195

计算的基数 // 195

可计算数 // 197

一个非可计算数 // 198

存在可数数量的可计算数 // 199

可计算数无法有效枚举 // 200

第九章
图灵的遗产

图灵在普林斯顿大学 // 206

克劳德·香农 // 208

第二次世界大战 // 209

20 世纪 40 年代的计算机发展 // 213

克兰德·楚泽 // 214

莫奇利和艾克特 // 214

冯·诺依曼 // 215

图灵测试 // 218

陨落 // 221

道歉和赦免 // 223

拓展阅读 // 227

注 释 // 231