



“十三五”移动学习型规划教材

# 高等数学教程

上册

第2版

范周田 张汉林 编著



机械工业出版社  
CHINA MACHINE PRESS



“十三五”移动学习型规划教材

# 高等数学教程

上册

第2版

范周田 张汉林 编著



机械工业出版社

本书的编写汲取国内外众多优秀教材之长,在透彻研究的基础上,以尽可能简单的方式来呈现微积分知识.

本书是课本与网络(手机)相结合的立体教材.网络(手机)支持重点知识讲解、图形演示、习题答案或提示、扩展阅读、讨论等移动学习功能.

本套教材分为上、下册,并配有《高等数学教程例题与习题集》.本书是上册,内容包括:函数、极限与连续、导数与微分、微分中值定理及其应用、不定积分、定积分及其应用.

本书各节末均配有分层习题,各章末还配有综合习题.书后附录的“研究与参考”,对若干重点问题进行了细致的分析.

本书为高等院校理工科类各专业学生的教材,也可作为自学或考研的参考书.

## 图书在版编目(CIP)数据

高等数学教程.上册/范周田,张汉林编著.—2版.—北京:机械工业出版社,2015.12

“十三五”移动学习型规划教材

ISBN 978-7-111-52229-4

I. ①高… II. ①范… ②张… III. ①高等数学—高等学校—教材 IV. ①O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2015)第280536号

机械工业出版社(北京市百万庄大街22号 邮政编码100037)

策划编辑:李永联 责任编辑:李永联 陈崇昱

版式设计:霍永明 责任校对:张征

封面设计:陈沛 责任印制:乔宇

保定市中华美凯印刷有限公司印刷

2016年4月第2版第1次印刷

169mm×239mm·16印张·305千字

标准书号:ISBN 978-7-111-52229-4

定价:33.50元

凡购本书,如有缺页、倒页、脱页,由本社发行部调换

电话服务

服务咨询热线:010-88379833

读者购书热线:010-88379649

网络服务

机工官网:www.cmpbook.com

机工官博:weibo.com/cmp1952

教育服务网:www.cmpedu.com

金书网:www.golden-book.com

封面无防伪标均为盗版

本书第 1 版在 2013 年被评为

**北京高等教育精品教材**

# 序

本书是北京工业大学数理学院的范周田、张汉林等教师经过数年总结探索，结合自身教学实践而编写出来的公共数学教材，在概念和方法上都很有创新。

高等数学几乎是所有大学生的必上之课，恐怕也是最重要的一门基础课了。现在的高等数学教材种类繁多，内容大同小异，那么选什么教材就变得尤为关键，而本书确实是一本内容翔实，易教易学的高等数学教材。

本书从无到有，由浅入深，抓住了微积分的牛鼻子，从无穷小入手，进而引入极限的一般概念，循序渐进地将学生引入微积分的殿堂。书中有很多评注和要点总结，这是学生最希望看到的。

值得一提的是，在第2章中引入无穷小时，书中话语通俗易懂、平易直观，摆脱了以往教材生硬、古板、上来就是 $\varepsilon$ - $\delta$ 语言的讲法，而是一语中的，抓住了“无穷小”的本质。生动之后又将其数学化，老师易教，学生也易学。将复杂的内容，抓住实质讲得明白，使学生觉得自然亲切，真正是以一个例子说清了最不易说清楚而又不得不说的无穷小问题。

微积分的教学改革既举足轻重，又颇具难度。本书对微积分的教学改革是一个很大的推动。应该说，微积分的教学改革是一场攻坚战，我们仍需努力，将它进行到底！

中国科学院 院士

林 群



## 第2版前言

高等数学(微积分)是学习如何解决问题的一门课程. 尽管有些人可能在工作之后再也不用到微积分, 但是他们仍然可以从微积分的学习中受益, 因为学习微积分的好处不仅体现在专业上, 而且还体现在智力上. 我们编写本书的目的正是期望读者能够更顺利地完微积分的学习.

本书延续了第1版逻辑简约, 语言科学、平易的优点, 取国内外众多优秀教材之长, 秉承透彻研究、简单呈现的原则, 对微积分的内容及叙述方式做了进一步的梳理.

本次修订的最大变化是增加了网络支持功能, 这是传统教材与现代化教育手段有机结合的一次尝试. 网络(手机)视频、音频或文本支持重点知识讲解、图形演示、习题答案或提示、扩展阅读、讨论等, 实现移动学习的功能, 并将不断升级、扩展和完善.

本次修订得到了众多支持与帮助. 感谢吴斌副校长、郭福处长, 感谢黄秋梅、邢秀侠、韩敏、彭娟、张真宁、杨蓉老师及大数数学教育教学研究中心的所有同事. 北京服装学院谢伟献、董庆华、刘蓉、侯志萍老师提出了习题分级及其他有益的建议, 并完成了习题分级工作, 在此表示感谢.

对关心并支持我们的朋友和出版社的朋友们一并表示感谢!

由于编者水平所限, 对书中不妥之处, 敬请广大读者批评指正.

编 者

2016年春于北京工业大学



# 第1版前言

高等数学(微积分)是大学各工科专业最重要的公共基础课程,具有周期长、课时多、内容多、难点多等特点.一套好的教材应该用科学、平易的语言阐明微积分的主要内容,并且应该易教易学.

为了实现这一目标,我们长期致力于高等数学教材的建设工作,先后有范周田、张汉林、平艳茹、杨晓华、丁津、唐兢、王术、田鑫、张方、李贵斌、胡京兴、徐大川等十余位教师参与其中.

在教材的写作过程中,我们有幸得到了林群院士的指导.林群院士指出:“擒贼先擒王,无穷小就是微积分的王.抓住了无穷小就可以学会微积分.”同时,我们学习了张景中院士的教育数学理论,即要“通过对数学本身的研究来化解数学的难点”,知识的结构与表达要做到“逻辑结构尽可能简单,概念引入要平易直观,要建立有力而通用的解题工具”.《高等数学教程》的写作充分借鉴了这些思想和理论.

《高等数学教程》具有以下特点:

1. 化解障碍,平易衔接.极限理论是微积分理论的重要基础,也是微积分入门的主要障碍.我们首先从自变量的变化趋势出发,直观地介绍了三个基本的无穷小,然后用极限的 $\varepsilon$ - $\delta$ 定义证明了无穷小的比较定理.以此为基础,我们从正面诠释极限理论,避开了极限定义中“颠倒因果关系”造成的学习困难.这样既能表达极限 $\varepsilon$ - $\delta$ 语言的意境和作用,又和初学者已有的知识水平和思维习惯相适应,在一定程度上降低了极限理论的学习难度.

2. 重点突出,难点分散.例如,中值定理是导数应用的理论基础,也是一元微积分教学的重点和难点,我们从便于学习者加深理解并掌握的角度对其进行了重新设计.每一节都只有一个重点或难点,从定理证明、思想方法、应用等多侧面由易到难进行介绍.

3. 对重点概念或定理的表述更加科学,更加平易直观.例如,函数、不定积分和曲率等概念的表述,以及复合函数的导数公式、积分换元法、牛顿-莱布尼兹公式的证明等.

4. 突出数学的思想方法,用数学思想解决实际问题.例如,教材中借助求解常微分方程过程中经常使用的变量替换的思想,简化了二阶常系数线性微分方程的求解过程.又如,对坐标的曲面积分是为解决物理中的场论问题产生的,我们从物理问题出发建立对坐标的曲面积分的概念,并从概念中产生了计算



方法.

《高等数学教程》整套教材的写作得到了韩云瑞教授、李心灿教授、郭镜明教授等多位专家的热心支持与无私帮助,其中韩云瑞教授认真审阅了本书的全部书稿,李心灿教授审阅了部分书稿,并提出了许多宝贵意见.专家们广博深厚的知识、严谨治学的风范以及乐于助人的美德深刻地影响了我们.正是在他们的帮助和鼓励下本书才得以顺利完成,在此向他们表示崇高的敬意!

在《高等数学教程》成书之际,诚挚感谢林群院士和张景中院士!

感谢我校蒋毅坚副校长、教务处及数理学院的相关领导们长期以来对我们的关心和支持!

对我们的同事,关心并支持我们的朋友和出版社的朋友们一并表示感谢!

由于编者水平和时间所限,书中难免有不妥之处,敬请广大读者批评指正.

编 者

2011 年春于北京工业大学





# 目 录

序

第2版前言

第1版前言

第1章 函数..... 1

1.1 函数的概念..... 1

1.2 几种具有特殊性质的函数..... 3

1.3 反函数..... 5

1.4 函数的表示..... 6

1.5 基本初等函数..... 9

1.6 复合函数..... 14

1.7 极坐标系与极坐标方程..... 15

1.8 常用符号..... 17

1.9 关于命题..... 18

综合习题1..... 19

第2章 极限与连续..... 21

2.1 数列无穷小与极限..... 21

习题2.1..... 25

2.2 函数无穷小与极限..... 26

2.2.1 函数在一点的极限..... 26

2.2.2 函数在无穷远的极限..... 28

2.2.3 极限的性质..... 30

2.2.4 无穷大..... 30

习题2.2..... 31

2.3 极限的运算法则..... 33

习题2.3..... 36

2.4 极限存在准则与两个重要极限..... 39

习题2.4..... 45

2.5 函数的连续性..... 47



|                               |           |
|-------------------------------|-----------|
| 2.5.1 函数连续性的概念 .....          | 47        |
| 2.5.2 函数的间断点 .....            | 50        |
| 2.5.3 闭区间上连续函数的性质 .....       | 52        |
| 习题 2.5 .....                  | 53        |
| 2.6 无穷小的比较 .....              | 56        |
| 习题 2.6 .....                  | 59        |
| 综合习题 2 .....                  | 60        |
| <b>第 3 章 导数与微分</b> .....      | <b>62</b> |
| 3.1 导数的概念 .....               | 62        |
| 习题 3.1 .....                  | 70        |
| 3.2 导数的计算 .....               | 72        |
| 3.2.1 导数的四则运算法则 .....         | 72        |
| 3.2.2 反函数的求导法则 .....          | 74        |
| 3.2.3 复合函数的求导法则 .....         | 75        |
| 3.2.4 高阶导数 .....              | 79        |
| 3.2.5 几种特殊的求导法 .....          | 82        |
| 3.2.6 函数的相关变化率 .....          | 87        |
| 习题 3.2 .....                  | 88        |
| 3.3 微分 .....                  | 91        |
| 3.3.1 微分的定义 .....             | 91        |
| 3.3.2 微分的运算法则 .....           | 92        |
| 3.3.3 微分在近似计算中的应用 .....       | 94        |
| 习题 3.3 .....                  | 96        |
| 综合习题 3 .....                  | 97        |
| <b>第 4 章 微分中值定理及其应用</b> ..... | <b>99</b> |
| 4.1 费马引理与函数最值 .....           | 99        |
| 习题 4.1 .....                  | 103       |
| 4.2 罗尔中值定理及其应用 .....          | 104       |
| 习题 4.2 .....                  | 107       |
| 4.3 拉格朗日中值定理及其应用 .....        | 109       |
| 4.3.1 拉格朗日中值定理 .....          | 109       |
| 4.3.2 函数的单调性 .....            | 111       |
| 习题 4.3 .....                  | 113       |



|                         |     |
|-------------------------|-----|
| 4.4 极值与凹凸性 .....        | 115 |
| 4.4.1 函数的极值及其求法 .....   | 115 |
| 4.4.2 曲线的凹凸性及拐点 .....   | 118 |
| 4.4.3 函数图形的描绘 .....     | 121 |
| 习题 4.4 .....            | 123 |
| 4.5 单调性与不等式 .....       | 125 |
| 习题 4.5 .....            | 129 |
| 4.6 柯西中值定理与洛必达法则 .....  | 131 |
| 习题 4.6 .....            | 136 |
| 4.7 泰勒公式 .....          | 138 |
| 习题 4.7 .....            | 145 |
| 4.8 曲率 .....            | 146 |
| 4.8.1 弧长的微分 .....       | 146 |
| 4.8.2 曲率及其计算公式 .....    | 147 |
| 4.8.3 曲率圆与曲率半径 .....    | 149 |
| 习题 4.8 .....            | 151 |
| 综合习题 4 .....            | 151 |
| 第 5 章 不定积分 .....        | 154 |
| 5.1 不定积分的概念和性质 .....    | 154 |
| 习题 5.1 .....            | 160 |
| 5.2 换元积分法 .....         | 161 |
| 习题 5.2 .....            | 168 |
| 5.3 分部积分法 .....         | 171 |
| 习题 5.3 .....            | 174 |
| 5.4 几种特殊类型函数的不定积分 ..... | 176 |
| 5.4.1 有理函数的积分 .....     | 176 |
| 5.4.2 简单无理函数的积分 .....   | 179 |
| 5.4.3 三角函数有理式的积分 .....  | 180 |
| 习题 5.4 .....            | 182 |
| 综合习题 5 .....            | 183 |
| 第 6 章 定积分及其应用 .....     | 184 |
| 6.1 定积分的概念与性质 .....     | 184 |



|                           |     |
|---------------------------|-----|
| 6.1.1 定积分的概念 .....        | 184 |
| 6.1.2 定积分的几何意义 .....      | 188 |
| 6.1.3 定积分的性质 .....        | 190 |
| 习题 6.1 .....              | 193 |
| 6.2 微积分基本定理 .....         | 195 |
| 习题 6.2 .....              | 200 |
| 6.3 定积分的换元积分法和分部积分法 ..... | 203 |
| 6.3.1 定积分的换元积分法 .....     | 203 |
| 6.3.2 定积分的分部积分法 .....     | 206 |
| 习题 6.3 .....              | 209 |
| 6.4 广义积分 .....            | 211 |
| 6.4.1 无穷限的广义积分 .....      | 211 |
| 6.4.2 无界函数的广义积分 .....     | 213 |
| * 6.4.3 广义积分的审敛法 .....    | 215 |
| 习题 6.4 .....              | 217 |
| 6.5 定积分的几何应用 .....        | 218 |
| 6.5.1 平面图形的面积 .....       | 218 |
| 6.5.2 体积问题 .....          | 222 |
| 6.5.3 平面曲线的弧长 .....       | 225 |
| 习题 6.5 .....              | 225 |
| 6.6 定积分的物理应用 .....        | 227 |
| 6.6.1 变力沿直线所做的功 .....     | 227 |
| 6.6.2 液体的静压力 .....        | 228 |
| 6.6.3 引力 .....            | 229 |
| 习题 6.6 .....              | 229 |
| 综合习题 6 .....              | 230 |
| 附录 研究与参考 .....            | 233 |
| 参考文献 .....                | 241 |



# 第 1 章

## 函 数

为了方便阅读本书，我们把初等数学已经涉及但又和微积分密切相关的一些知识进行罗列或重新叙述，如函数的概念、某些特殊形式的函数，以及基本初等函数的图像与性质等，以备读者参考、查阅。

### 1.1 函数的概念

在微积分中，我们主要研究数值之间的对应关系，即函数。

设  $D$  为实数集  $\mathbf{R}$  的一个非空子集。如果对  $D$  中的任意一个数值  $x$ ，都存在  $\mathbf{R}$  中唯一的一个数值  $y$  与之对应，那么我们称这两个数值之间的对应关系为函数，记为  $f$ ，并记  $y=f(x)$ ，把  $x$  称为自变量，把  $y$  称为因变量，自变量的取值范围称为函数的定义域，因变量的取值范围称为函数的值域，分别记为  $D_f$  和  $R_f$ 。

我们通过一个简单的例子来进行说明。

令  $D=\{1,2,3\}$ ， $D$  到  $\mathbf{R}$  的对应关系是：1 对应 5，2 对应 10，3 对应 15。

这个对应方式满足唯一性的要求，因此是一个函数，记之为  $f$ 。函数  $f$  可以描述为： $D$  中的每个数值都对应其自身的 5 倍。

把集合  $D$  内的数值用  $x$  表示，即  $x$  取值可以是 1，2，3 这三个数值中的任意一个，则函数  $f$  可以描述为： $x$  对应  $5x$ ，记为  $y=f(x)=5x$ 。定义域



$D_f = \{1, 2, 3\}$ , 值域  $R_f = \{5, 10, 15\}$ .

需要注意的是,  $f$  与  $f(x)$  是有所不同的:  $f$  是对应关系, 即函数, 而  $f(x)$  则表示函数  $f$  在  $x$  处的值. 一般情况下不做严格区分, 我们说函数  $f$ , 也说函数  $f(x)$  或者说函数  $y = f(x)$ . 另外, 函数的表示与自变量和因变量所使用的字母是无关的, 也不一定有表达式.

如果函数用于表达实际问题, 那么它的定义域也由实际问题确定. 例如, 设半径为  $r$  的圆的面积为  $S$ , 则有函数关系

$$S = \pi r^2$$

由于  $r$  表示半径, 因此有  $r > 0$ .

微积分中许多时候不涉及函数的实际意义, 只讨论函数的表达式. 在这种情况下, 函数的定义域是使表达式有意义的所有值构成的集合. 例如, 函数  $y = \pi x^2$  的定义域是  $(-\infty, +\infty)$ .

函数  $y = f(x)$  是一元函数. 一般来说, 一个函数可以用来表示一个变量与另外一组变量之间的确定关系, 即当这一组变量的取值都确定后, 这个变量的取值也随之唯一确定, 这一组中有几个变量就称这个函数是几元函数.



## 1.2 几种具有特殊性质的函数

## 1. 单调函数

设函数  $y=f(x)$  的定义域为  $D$ . 如果对任意的  $x_1 > x_2 \in D$ , 都有  $f(x_1) > f(x_2)$ , 就称  $f(x)$  是单调递增函数, 简称单增. 如果对任意的  $x_1 > x_2 \in D$ , 都有  $f(x_1) < f(x_2)$ , 就称  $f(x)$  是单调递减函数, 简称单减. 单调递增函数和单调递减函数统一称为单调函数.

一般而言, 一个函数往往在其定义域内的某些区间上是递增的, 而在另外的区间上是递减的, 这样的区间称为函数的单调区间. 例如, 函数  $y=x^2$  在  $[0, +\infty)$  内单调递增, 在  $(-\infty, 0]$  内单调递减,  $[0, +\infty)$  和  $(-\infty, 0]$  就是函数  $y=x^2$  的单调区间.

## 2. 奇函数与偶函数

设函数  $y=f(x)$  的定义域为  $D$ . 如果对任意  $x \in D$ , 都有  $-x \in D$ , 我们就说  $D$  关于原点对称.

如果函数  $y=f(x)$  的定义域  $D$  关于坐标原点对称, 而且  $y=f(x)$  的图形关于坐标原点对称, 就称函数  $y=f(x)$  为奇函数. 即如果对任意  $x \in D$ , 都有  $f(-x) = -f(x)$ , 则称  $f(x)$  为奇函数.

如果函数  $y=f(x)$  的定义域  $D$  关于原点对称, 而且  $y=f(x)$  的图形也关于  $y$  轴对称, 就称函数  $y=f(x)$  为偶函数. 即如果对任意  $x \in D$ , 都有  $f(-x) = f(x)$ , 则称  $f(x)$  为偶函数.

例如,  $y=x^2$ ,  $x \in (-\infty, +\infty)$  是偶函数, 而  $y=x^3$ ,  $x \in (-\infty, +\infty)$  是奇函数.

## 3. 周期函数

设  $y=f(x)$  为函数, 如果存在正数  $T$ , 使得  $f(x) = f(x+T)$  对定义域中的任意  $x$  都成立, 则称  $y=f(x)$  为周期函数,  $T$  是一个周期.

通常情况下, 我们关心周期函数的最小正周期, 简称周期. 例如, 正弦函数  $y=\sin x$  和余弦函数  $y=\cos x$  的周期都是  $2\pi$ , 而正切函数  $y=\tan x$  和余切函数  $y=\cot x$  的周期都是  $\pi$ .

也有例外的情况, 例如常数函数  $y=C$  是周期函数, 任意正数都是它的周期, 因此它没有最小正周期.

## 4. 有界函数

设  $f(x)$  在  $D$  上有定义. 若存在常数  $M > 0$  使得一切  $x \in D$ , 有  $|f(x)| \leq M$ , 则称  $f(x)$  在  $D$  上有界, 也称  $f(x)$  是  $D$  上的有界函数.

例如, 因  $|\sin x| \leq 1$ , 故  $y=\sin x$  在  $(-\infty, +\infty)$  上有界. 有界函数也



可以做如下定义：若存在常数  $m$  和  $M$  使得一切  $x \in D$ ，有  $m \leq f(x) \leq M$ ，则称  $f(x)$  在  $D$  上有界，其中  $m$  称为函数  $f(x)$  的一个下界， $M$  称为函数  $f(x)$  的一个上界.

例如，函数  $y = \frac{1}{x}$  在  $(1, +\infty)$  上有界，因为  $0 < \frac{1}{x} < 1, x \in (1, +\infty)$ .





## 1.3 反 函 数

设 $f$ 为一元函数, 如果对任意的 $y \in R_f$ , 都存在唯一的 $x \in D_f$ , 使得 $y = f(x)$ , 则称函数 $f$ 有反函数,  $f$ 的反函数记为 $f^{-1}$ .

函数 $y = f(x)$ 的反函数可以记为 $x = f^{-1}(y)$ , 也可以记为 $y = f^{-1}(x)$ . 函数 $y = f(x)$ 与 $x = f^{-1}(y)$ 的图像是相同的, 与 $y = f^{-1}(x)$ 的图像关于直线 $y = x$ 对称.

例如,  $y = \sqrt{x}$ 有反函数 $x = y^2$ , 也可以说 $y = \sqrt{x}$ 的反函数是 $y = x^2$ .

一般地, 并不是任意的函数都有反函数. 例如,  $y = x^2, -\infty < x < +\infty$ 就没有反函数.

函数 $y = f(x)$ 存在反函数的充分必要条件是: 对任意的 $x_1, x_2 \in D_f$ , 如果 $x_1 \neq x_2$ , 则 $f(x_1) \neq f(x_2)$ . 特别地, 单调函数有反函数.

例如, 正弦函数 $y = \sin x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有定义但却没有反函数. 对任意给定的整数 $k$ , 函数 $y = \sin x$ 在区间 $\left[k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2}\right]$ 上单调, 因此有反函数.

特别地, 我们把正弦函数 $y = \sin x$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 上的反函数记为

$$y = \arcsin x, x \in [-1, 1], y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

类似地, 反余弦函数、反正切函数和反余切函数见表1-4~表1-6.

