现代统计学系列丛书

# 应用随机过程

肖宇谷　张景肖

# Applied Stochastic Processes

高等教育出版社

现代统计学系列丛书

# 应用随机过程

# Applied Stochastic Processes

肖宇谷　张景肖

高等教育出版社·北京

## 内容提要

本书的基本目标是在初等概率论的基础上，扩展和加强读者面向应用的随机数学基础。一方面希望能加深读者对概率知识的理解，增强对实际问题的数学建模能力，特别是对随机现象的概率描述和求解；另一方面使读者初步了解各种随机过程的性质，为后续课程的学习建立扎实的数理基础。

本书属随机数学的基础读物，介绍了常见的几种随机过程的基本性质，适合具有微积分和初等概率论知识的读者学习和参考。本书的主要内容包括6个部分：泊松过程、更新过程、马尔可夫过程、鞅过程、布朗运动、随机微积分和伊藤公式。

本书可作为高等院校统计、经济、金融、管理专业的本科生教材，也可作为其他相关专业的研究生教材和教学参考书，对广大从事与随机现象相关工作的实际工作者也极具参考价值。

**图书在版编目(CIP)数据**

应用随机过程/肖宇谷，张景肖编.--北京：高等教育出版社，2017.1
(现代统计学系列丛书)
ISBN 978-7-04-046875-5

Ⅰ.①应… Ⅱ.①肖… ②张… Ⅲ.①随机过程-高等学校-教材 Ⅳ.①O211.6

中国版本图书馆CIP数据核字(2016)第283115号

策划编辑 张晓丽　责任编辑 田　玲　封面设计 赵　阳　版式设计 张　杰
插图绘制 杜晓丹　责任校对 刁丽丽　责任印制 尤　静

| | | | |
|---|---|---|---|
| 出版发行 | 高等教育出版社 | 网　址 | http://www.hep.edu.cn |
| 社　址 | 北京市西城区德外大街4号 | | http://www.hep.com.cn |
| 邮政编码 | 100120 | 网上订购 | http://www.hepmall.com.cn |
| 印　刷 | 北京印刷一厂 | | http://www.hepmall.com |
| 开　本 | 787mm×960mm　1/16 | | http://www.hepmall.cn |
| 印　张 | 11.5 | | |
| 字　数 | 200千字 | 版　次 | 2017年1月第1版 |
| 购书热线 | 010-58581118 | 印　次 | 2017年1月第1次印刷 |
| 咨询电话 | 400-810-0598 | 定　价 | 22.00元 |

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换

物 料 号　46875-00

# 总序

统计学是一门收集、整理和分析数据的科学和艺术。这里的"数据"通指"信息的载体",涵盖了大千世界中的文本、图像、视频、时空数据、基因数据等。统计学是一门独立的学科,在历史上曾隶属于数学,但统计学与数学有着本质的区别,因此统计学教育有其自身的特点和要求,这些特点表现为:(1) 统计学研究的是随机现象,而数学研究的是确定性的规律;(2) 统计学是一门应用性很强的学科,许多概念和原理来自于实际的需要,不是数理逻辑的产物;(3) 数据在统计学中扮演了重要的角色。目前,统计学已被列为一级学科。

在过去的30年中,随着生命科学、信息科学、物质科学、资源环境、认知科学、工程技术、经济金融和人文科学等众多学科的发展,产生了许多新的统计学分支,如风险管理、数据挖掘、基因芯片分析等。此外,计算机及其有关软件在统计教育和应用中扮演了越来越重要的角色,它们提供了越来越多的图形表达和分析的方法,使得许多原来教科书中重要的内容,现在已变得无足轻重。统计教育必须改革才能适应高速发展的形势。

大学的统计教育可分为两大类,一类是非统计学专业的课程,另一类是统计学专业的教学设计。非统计学专业的学生学习统计的目的是为了应用,在大学阶段,课程不多,主要是学习基础的统计概念和方法,学会使用统计软件,培养其解决实际问题的能力。统计学专业的课程设置十分重要,应向国际靠拢,对教师队伍的要求也较高。虽然这两类学生的教育有很多共同点,但在课程设置中必须加以区分。

我国的统计教育在过去受苏联的影响很深,把统计学作为数学的一个分支,在内容上偏理论,少应用,过于强调概率论在统计中的作用。统计学是一门应用性很强的学科,应从实际问题、从数据出发,通过统计的工具来揭示数据内部的规律。用"建模"的思路来教统计,使学生能更加容易理解统计的概念和方法,知道如何将实际问题抽象为统计模型,反过来又指导实践。对非统计学专业的学生,要强调统计的应用。学生要能熟练地使用至少一个统计软件包。对于统计学专业的学生,要培养学生对实际问题的建模能力。有些实际问题可直接应用现有的统计方法来解决,如问卷调查的统计分析。有些问题在初次接触时并不像一个统计问题,必须有坚实的统计基础和对实际问题的洞察力,才能从中发

掘出统计模型。要培养学生的这种能力及统计思想(统计思想是统计文化的一部分,是用统计学的逻辑思考问题)。教师在授课中要结合较多的应用例子,要求学生做案例研究,鼓励学生参加建模比赛,参加企业的实际项目。

为满足我国统计教育发展的需要,我们计划编写一套面向高校本科生、特别是一般院校,适用于统计学专业和非统计学专业的系列教材。系列教材的编写宗旨是:突出教学内容的现代化,重视统计思想的介绍,适应现代统计教育的特点及时代发展的新要求;以统计软件为支撑,注重统计知识的应用;内容简明扼要,生动活泼,通俗易懂。编写原则为:(1) 从数据出发,不是从假设、定理出发;(2) 从归纳出发,不是从演绎出发;(3) 强调案例分析;(4) 重统计思想的阐述,弱化数学证明的推导。系列教材分为两个方向,一个面对统计学专业,另一个面对非统计学专业和应用统计工作者。

系列教材是适应形势的要求,由高等教育出版社邀请专家组成“现代统计学系列丛书编委会”负责选题、审稿,由高等教育出版社出版。

以上是我们编写这套教材的背景和理念,希望得到读者的支持,特别是高校领导和教学一线教师的支持。我们希望使用这套教材的师生和读者多提宝贵意见,使教材不断完善。

现代统计学系列丛书编委会

扫描二维码,获取更多丛书信息

# 前　言

本书的基本目标是在初等概率论的基础上,扩展和加强读者面向应用的随机数学基础。本书主要是承上启下,希望能加深读者对概率知识的理解,增强对实际问题的数学建模能力,特别是对随机现象的概率描述和求解;同时,使读者初步了解各种随机过程的性质,为后续课程的学习建立扎实的数理基础。

本书属随机数学的基础读物,适合具有微积分和初等概率论知识的读者学习和参考。随机过程的教材很多,但读者经常会碰到几个问题:一是专业领域不同,内容差异较大;二是部分著作需要测度论或高等概率论为基础;三是内容跳跃很大,缺少过渡,经常需要补充很多额外的理论知识。本书以统计学专业大二学生的基础为参照,不使用测度论知识,注意问题的直观概率描述;在内容上,主要体现随机过程的应用,特别是在经济学领域内的应用,选择了泊松过程、更新过程、马尔可夫过程、鞅过程、布朗运动和随机微积分等方面的内容。随机过程的知识从应用到理论都非常丰富,本书涉及的内容只是其中很小的一部分,但希望能将这些最有代表性、最基础、最典型的内容讲清楚。

全书共有八章,包括预备知识、随机过程的基本概念和基本类型、泊松过程、更新过程、马尔可夫过程、鞅过程、布朗运动、随机微积分和伊藤公式。其中预备知识包含了一些衔接性的内容,尽管不成体系,但对后面内容的理解可能有很大好处,建议先浏览主要结果。本书每章后面都有小结,主要是概括了需要掌握的基础内容。

本书的编写得到孟生旺老师的鼓励和支持;罗欢、幺曈宣、孙舟、刘素、陈森、颜淑莹、陈卓等同学参与了本书初稿的录入与校对,并绘制了部分图形。在此谨表衷心感谢!

本书受到中国人民大学"统筹推进世界一流大学的一流学科建设"专项经费的支持。

鉴于作者水平有限,书中肯定存在很多不足,敬请读者批评指正。

编者

2016 年 6 月

# 目　录

# 第一章 预备知识

本章主要是对概率论基本知识作简要的回顾,对少数知识点作适当的补充.

## §1.1 样本空间、随机变量与分布函数

### 1.1.1 样本空间、随机事件与概率

概率是建立在随机试验的基础上的,我们把对某个感兴趣对象的观察过程称为试验,若事先无法预知将要出现的结果,则称这样的试验为随机试验.通常要求随机试验在相同的条件下可以重复进行.虽然我们不能预知会出现什么结果,但随机试验的所有可能出现的结果应该是已知的.研究任何一个随机试验,首要任务就是要弄清楚该试验的所有可能发生的结果.

**定义 1.1** 随机试验每一个可能的结果被称为**随机试验的样本点**或**基本事件**,记为 $\omega$.全体样本点所构成的集合称为**样本空间**,通常用 $\Omega$ 表示.

$\Omega$ 可以是有限集,也可以是无限集.应该指出,这里所说的可能出现的结果将依赖于人们所关心的问题与所使用的解决问题的方法.因此样本空间的选择不是唯一的.

**例 1.1** 如果试验是抛掷一枚硬币,那么样本空间由以下两个样本点组成:

$$\Omega=\{H,T\}$$

此处 $H$ 表示抛掷的结果是正面(Head),而 $T$ 表示抛掷的结果是反面(Tail).

**例 1.2** 如果试验是抛掷两枚硬币,那么样本空间由以下 4 个样本点组成:

$$\Omega=\{(H,H),(H,T),(T,H),(T,T)\}$$

**例 1.3** 如果试验是抛掷 $n$ 枚硬币,那么样本空间由以下 $2^n$ 个样本点组成:

$$\Omega=\{(H,H,\cdots,H),(T,H,H,\cdots,H),\cdots,(T,T,\cdots,T,H),(T,T,\cdots,T,T)\}$$

当我们通过随机试验来研究随机现象时,通常不是关心某一个样本点在试验后是否出现,而是关心满足某些条件的样本点在试验后是否出现,这些样本点

组成了样本空间的一个子集.

**定义 1.2** 样本空间的子集称为随机事件,简称为**事件**.在试验后,如果出现随机事件 $A$ 中所包含的某个样本点,那么,称**事件 $A$ 发生**;否则,就称**事件 $A$ 不发生**.

概率论着重研究随机事件发生的规律,对于较复杂的事件,希望能用若干简单的事件去表示,为此,需要研究事件之间的关系和运算.现在我们是用集合的语言来描述随机试验和随机事件,事件之间的关系与运算自然和集合之间的关系与运算是一致的,也有交、并、补等运算,不过它们在概率论中另有特殊的含义.对事件间的关系和运算的理解,不仅要从集合的角度理解,更重要的是从"事件的发生"这一概率论的角度去理解.

以下设随机试验的样本空间为 $\Omega$,而 $A,B$ 是 $\Omega$ 的子集.

**定义 1.3**(事件的包含关系) 若事件 $A$ 的发生必然导致事件 $B$ 的发生,则称事件 $B$ 包含事件 $A$,记为 $A\subset B$ 或 $B\supset A$.此时 $A$ 是 $B$ 的子集.

**例 1.4** 掷一枚均匀的骰子,设 $A=\{$掷出 6 点$\}$,$B=\{$掷出的点数为偶数$\}$,则事件 $A$ 的发生必然导致事件 $B$ 的发生,故事件 $B$ 包含事件 $A$,即 $A\subset B$.从集合的角度看,集合 $B$ 显然包含了 $A$ 中的元素(样本点).

**定义 1.4**(事件相等或等价) 当事件 $B$ 包含事件 $A$ 且事件 $A$ 也包含事件 $B$ 时,称事件 $A$ 与事件 $B$ 相等(等价),记为 $A=B$.

**定义 1.5**(事件的并) "两事件 $A$ 与 $B$ 中至少有一件发生"这一事件称为事件 $A$ 与 $B$ 的并,记为 $A\cup B$,也即 $A\cup B$ 发生等价于 $A$ 发生或者 $B$ 发生或者两者都发生.

**定义 1.6**(事件的交) "两事件 $A$ 与 $B$ 都发生"这一事件称为事件 $A$ 与 $B$ 的交,记为 $A\cap B$ 或 $AB$.也即 $AB$ 发生等价于 $A$ 发生而且 $B$ 发生.

**定义 1.7** 设一个随机试验的样本空间为 $\Omega$,对它的每一事件 $A$ 赋予一个实数,记为 $P\{A\}$,如果 $P\{\cdot\}$ 满足下列条件:

(1) 非负性:对于每一个事件 $A$,有 $P\{A\}\geqslant 0$;

(2) 规范性:对于必然事件 $\Omega$,有 $P\{\Omega\}=1$;

(3) **可列可加性**:设 $A_1,A_2,\cdots$是两两互不相容的事件,即对于 $A_iA_j=\varnothing,i\neq j,i,j=1,2,\cdots$,有

$$P\left\{\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right\}=\sum_{i=1}^{\infty}P\{A_i\} \tag{1.1}$$

其中 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i$ 表示所有 $A_i$ 的并,$i=1,2,\cdots$,则称 $P\{\cdot\}$是**概率**.

这里定义的概率是一个样本空间的事件上的函数,在同一个样本空间和同一个事件上满足这个定义的概率可以不唯一.由这个定义,可以推得概率的一些

重要性质.

(1)(可减性和单调性) 设 $A,B$ 是两个事件,若 $A\subset B$,则有

$$P\{B-A\}=P\{B\}-P\{A\}$$

$$P\{B\}\geqslant P\{A\}$$

其中 $B-A$ 表示 $B$ 发生但 $A$ 不发生.

(2)(加法公式) 对于任意两事件 $A,B$ 有

$$P\{A\cup B\}=P\{A\}+P\{B\}-P\{AB\}$$

### 1.1.2 随机变量、分布函数

有些随机试验的样本空间本身就是用数值描述的,但也有一些随机试验的样本空间不是用数值表示而是用属性刻画的.如从一批有正品和次品的产品中任取一件,样本空间为{正品,次品}.对于这类试验,通常总可将事件数量化.例如记事件{出现正品}为1,{出现次品}为0.因此,无论什么随机试验,都可用一个变量的不同取值来描述它的全部可能结果.下面给出随机变量的定义:

**定义 1.8** 设 $\Omega=\{\omega\}$ 为一个随机试验的样本空间,若对任意 $\omega\in\Omega$,有唯一实数 $X(\omega)$ 与之对应,且对任意实数 $a\leqslant b$,有 $\{\omega:a<X(\omega)\leqslant b\}$ 为随机事件,则称 $X(\omega)$ 为**随机变量**.

引进随机变量后,事件是通过随机变量的取值来表示的,即用随机变量的各种取值状态和取值范围来表示随机事件.例如"随机变量 $X$ 的取值为 $x$"就是满足等式 $X(\omega)=x$ 的一切 $\omega$ 组成的集合,用"$X=x$"表示,即

$$\text{“}X=x\text{”}=\{\omega:X(\omega)=x\}\subset\Omega$$

**定义 1.9** 设 $X$ 为一个随机变量,对任意实数 $x$,事件"$X\leqslant x$"的概率是 $x$ 的函数,记为

$$F_X(x)=P\{X\leqslant x\}$$

这个函数称为 $X$ 的**累积概率分布函数**,简称为**分布函数**.

根据定义可知

$$P\{a<X\leqslant b\}=F_X(b)-F_X(a),\quad a<b$$

$$P\{X>a\}=1-F_X(a)$$

$$P\{X<a\}=F_X(a-)$$

$$P\{X=a\}=F_X(a)-F_X(a-)$$

其中 $F_X(a-)$ 是函数在点 $a$ 处的左极限.

**例 1.5** 常用的随机变量类型有:离散型随机变量、连续型随机变量和混合型随机变量.离散型随机变量 $X$ 的概率分布用如下分布列描述:

$$p_i=P\{X=x_i\}\geqslant 0,\quad i=1,2,\cdots$$

其分布函数为阶梯函数：

$$F_X(x)=P\{X\leqslant x\}=\sum_{x_i\leqslant x}p_i,\quad -\infty<x<+\infty$$

连续型随机变量 $X$ 的概率分布用**概率密度函数** $f(x)$ 描述：

$$F_X(x)=P\{X\leqslant x\}=\int_{-\infty}^{x}f(t)\,\mathrm{d}t,\quad -\infty<x<+\infty$$

混合型随机变量 $X$ 可以是既含有离散部分，也含有连续部分的随机变量，即它的分布函数可以表示为

$$F_X(x)=pF_X^{(d)}(x)+(1-p)F_X^{(c)}(x),\quad 0<p<1,-\infty<x<+\infty$$

其中 $F_X^{(d)}(.)$ 是一个离散型概率分布，$F_X^{(c)}(.)$ 是一个连续型概率分布.连续型随机变量取个别值的概率为零，而混合型随机变量取某些个别值的概率可以不为零.

**例 1.6** 设随机变量 $X$ 表示每次车辆碰撞产生的人员医疗费用，则 $X$ 的分布可以分成两部分，多数情况车辆碰撞有财产损失但没有人员伤害，少数情况下伴随人员伤害.有没有人员伤害可以用一个离散型随机变量来刻画，而人员伤害的医疗费用可以用一个连续型随机变量来刻画.若假设没有人员伤害的概率为 $p$，有人员伤害时的医疗费用服从指数分布，则根据离散型的条件概率公式可知随机变量 $X$ 的分布函数为

$$F_X(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ 1-(1-p)\mathrm{e}^{-\lambda x}, & x\geqslant 0,\end{cases}\quad \lambda>0$$

特别地，$P\{X=0\}=F_X(0)-F_X(0-)=p$.$X$ 的分布函数 $F_X(x)$ 可以表示为离散型概率分布与连续型概率分布的组合 $F_X(x)=pF_X^{(d)}(x)+(1-p)F_X^{(c)}(x)$，其中

$$F_X^{(d)}(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ 1, & x\geqslant 0,\end{cases}\quad F_X^{(c)}(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ 1-\mathrm{e}^{-\lambda x}, & x\geqslant 0\end{cases}$$

### 1.1.3 强度函数

强度函数是与分布函数一一对应的函数，在寿险中称为“死亡率强度”，在可靠性研究中称为“失效率”.

**定义 1.10** 若随机变量 $X$ 为连续型随机变量，具有分布函数 $F_X(x)$ 和概率密度函数 $f(x)$，则将

$$\lambda(x)=\frac{f(x)}{1-F_X(x)}$$

称为 $X$ 的**强度函数**.

**例 1.7** 强度函数可以理解为已知某时刻及以前正常，但在紧接着的单位时间内不正常的条件概率.分析过程如下：

首先,因为概率密度函数$f(x)$是分布函数的导数,即

$$f(x)=\lim_{h\to 0}\frac{F_X(x+h)-F_X(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{P\{X\in(x,x+h]\}}{h}$$

所以$P\{X\in(x,x+h]\}=f(x)h+o(h)$,其中$o(h)$是关于$h$的高阶无穷小,即$o(h)$比$h$更快地收敛于0.若$h$很小,则$f(x)h$可以理解为随机变量落在区间$(x,x+h]$里的概率.

其次,

$$P\{X\in(x,x+h]\mid X>x\}=\frac{P\{X\in(x,x+h]\}}{P\{X>x\}}=\frac{f(x)h+o(h)}{1-F_X(x)}=\lambda(x)h+o(h)$$

特别地,如果$X$表示寿命,则强度函数可以表示已知寿命大于某时刻,但在该时刻后的单位时间内死亡的概率.如果取单位时间为一年的话,$f(70)$可以近似理解为寿命在70岁至71岁的概率,而$\lambda(70)$可以近似理解为刚满70岁的人在紧接着的一年内死亡的概率.

## §1.2 数学期望、矩母函数

### 1.2.1 数学期望

为了对离散型和连续型随机变量的数学期望能给出一个统一的表达式,我们定义一个比黎曼(Riemann)积分更广义的积分,即黎曼-斯蒂尔切斯(Riemann-Stieltjes)积分.

**定义1.11** 设$h(x)$,$g(x)$为区间$[a,b]$上的实值函数,$a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$为$[a,b]$的一个分割,令$\Delta=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{x_i-x_{i-1}\}$,任取$\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$,记$\xi=(\xi_1,\cdots,\xi_n)$,作黎曼-斯蒂尔切斯和:

$$S_\Delta=S_\Delta(h,\xi,g)=\sum_{i=1}^{n}h(\xi_i)[g(x_i)-g(x_{i-1})]$$

如果$\lim\limits_{\Delta\to 0}S_\Delta$存在,且与分割的选择以及$\xi$的取法无关,则称该极限为函数$h(x)$关于$g(x)$在$[a,b]$上的**黎曼-斯蒂尔切斯积分**,记为$\int_a^b h(x)\mathrm{d}g(x)$.

当$g(x)=x$时,黎曼-斯蒂尔切斯积分即为黎曼积分.当$g(x)$为一个阶梯函数时,黎曼-斯蒂尔切斯积分为一个求和级数.当$g(x)$是离散型随机变量的概率分布函数$F_X(x)$时,有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}x\mathrm{d}F_X(x)=\lim_{\Delta\to 0}\sum_{i=1}^{n}x_i[F_X(x_i)-F_X(x_{i-1})]=\sum_i x_ip_i$$

其中 $p_i=P\{X=x_i\}$，也就是可以将离散型随机变量的期望表示为积分形式.

对黎曼-斯蒂尔切斯积分的存在性在这里不做进一步讨论，只给出一个简单的充分条件：若函数 $h(x)$ 为连续函数，$g(x)$ 为单调函数，则黎曼-斯蒂尔切斯积分存在.黎曼-斯蒂尔切斯积分存在的详细条件可参考徐森林(2002)[14]，其在随机微积分中的应用可参考 Mikosch(1998)[10].

如果 $g(x)$ 有导数 $g'(x)$，且 $\int_a^b h(x)\,|g'(x)|\,dx<+\infty$，则黎曼-斯蒂尔切斯积分就可以转化为普通的定积分，即

$$\int_a^b h(x)\,dg(x)=\int_a^b h(x)g'(x)\,dx$$

如果 $h(x)$ 连续可微，$g(x)$ 为连续函数，则黎曼-斯蒂尔切斯积分就可以转化为普通的分部积分计算，即

$$\int_a^b h(x)\,dg(x)=[h(b)g(b)-h(a)g(a)]-\int_a^b g(x)h'(x)\,dx$$

根据黎曼-斯蒂尔切斯积分的定义，离散型和连续型随机变量的数学期望可以用一个统一的积分形式表达.更一般的随机变量的数学期望也可以由这个统一的积分形式表达，但这需要一些测度论中关于勒贝格-斯蒂尔切斯(Lebesgue-Stieltjes)积分的知识，本书在这里不做进一步讨论.

**定义 1.12** 设 $X$ 是一个随机变量.$X$ 的**数学期望**，记为 $E(X)$，定义为

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x\,dF(x)=\begin{cases}\sum_i x_i p_i, & \text{离散情形}\\ \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,dx, & \text{连续情形}\end{cases}\tag{1.2}$$

其中 $p_i=P\{X=x_i\}$，$F(x)$ 为分布函数，$f(x)$ 为概率密度函数.

如果式(1.2)右边的级数或积分绝对收敛，即：

离散情形时 $\sum_i |x_i|\,p_i<+\infty$；

连续情形时 $\int_{-\infty}^{+\infty}|x|\,f(x)\,dx<+\infty$，

那么称 $E(X)$ 存在，否则称 $E(X)$ 不存在.

对于非负随机变量，还有一种比较常用的数学期望计算方法，即将数学期望表达为尾部概率的积分.

**定理 1.1** 设 $X$ 是一个非负连续型随机变量，分布函数为 $F(x)$，则

$$E(X)=\int_0^{+\infty}[1-F(x)]\,dx=\int_0^{+\infty}P\{X>x\}\,dx$$

**证明**：根据富比尼(Fubini)定理，