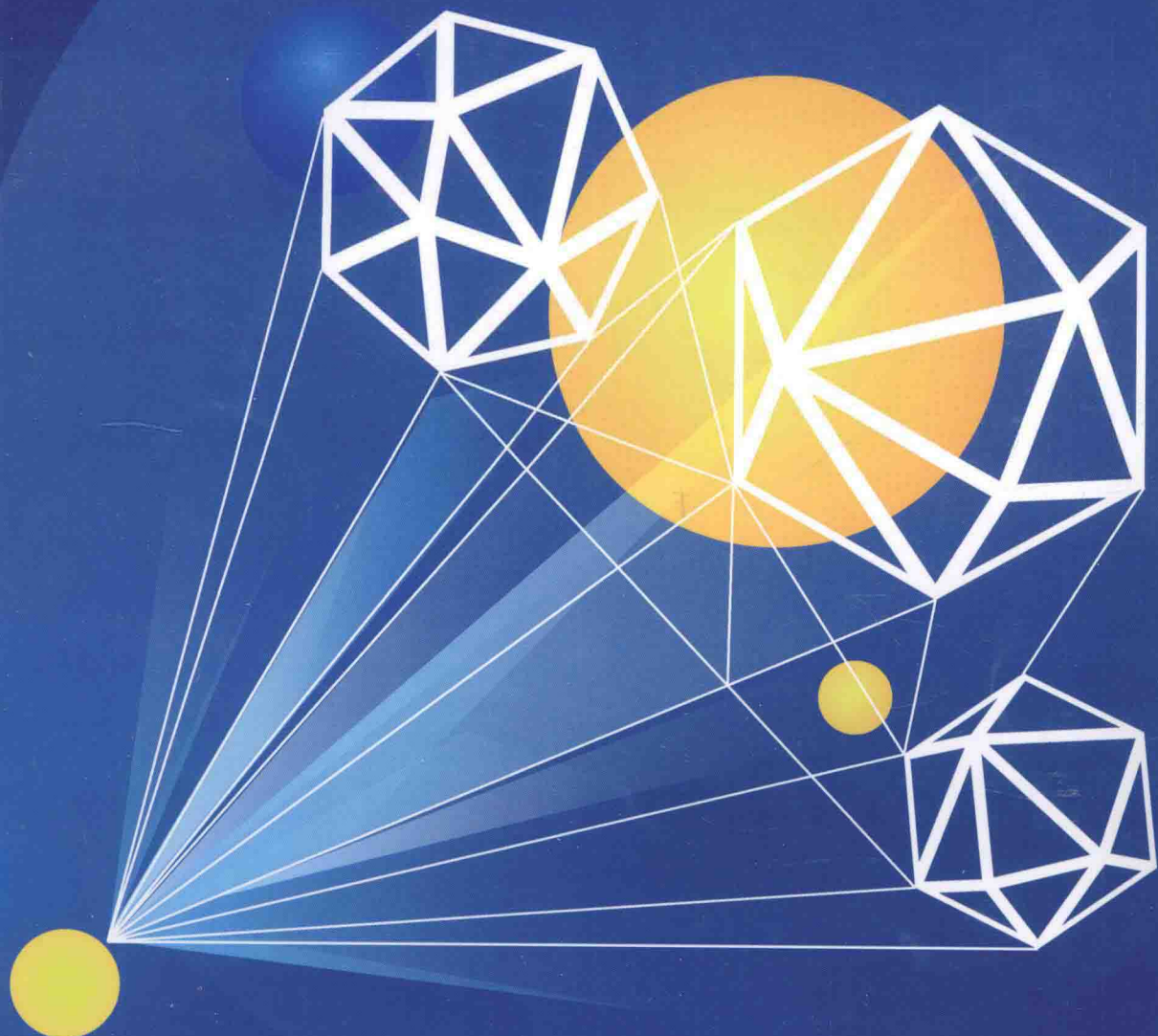




高等数学学习与应用

主 编 刘瑞芹 王 清 文小艳
副主编 刘 艳 王 昕 许 璐 韩元良
主 审 魏丽侠



北京航空航天大学出版社
BEIHANG UNIVERSITY PRESS

高等数学学习与应用

主 编 刘瑞芹 王 清 文小艳
副主编 刘 艳 王 昕 许 璐 韩元良
主 审 魏丽侠

北京航空航天大学出版社

内 容 简 介

《高等数学学习与应用》在总结一线教师多年教学经验的基础上,按章节以知识点为主线进行编排。全书共 12 章,内容包括:函数与极限、导数与微分、微分中值定理与导数的应用、不定积分、定积分、定积分应用、常微分方程、向量代数与空间解析几何、多元函数微分法及其应用、重积分、曲线积分与曲面积分、无穷级数。每章包括知识结构图、疑难问题解答、典型例题分析、应用案例模型、自测题及答案五个模块的内容。

本书可作为理工类院校非数学专业学生学习高等数学的辅助教材,也可作为考研复习的指导用书,同时也可供高等院校相关课程的教师参考。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学学习与应用 / 刘瑞芹,王清,文小艳主编

. -- 北京:北京航空航天大学出版社,2016.9

ISBN 978-7-5124-2229-2

I. ①高… II. ①刘… ②王… ③文… III. ①高等数学—高等学校—教学参考资料 IV. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 200997 号

版权所有,侵权必究。

高等数学学习与应用

主 编 刘瑞芹 王 清 文小艳

副主编 刘 艳 王 昕 许 璐 韩元良

主 审 魏丽侠

责任编辑 张艳学

*

北京航空航天大学出版社出版发行

北京市海淀区学院路 37 号(邮编 100191) <http://www.buaapress.com.cn>

发行部电话:(010)82317024 传真:(010)82328026

读者信箱:goodtextbook@126.com 邮购电话:(010)82316936

北京时代华都印刷有限公司印装 各地书店经销

*

开本:787×1 092 1/16 印张:16.25 字数:416 千字

2016 年 9 月第 1 版 2016 年 9 月第 1 次印刷 印数:3 000 册

ISBN 978-7-5124-2229-2 定价:35.00 元

若本书有倒页、脱页、缺页等印装质量问题,请与本社发行部联系调换。联系电话:(010)82317024

前 言

高等数学是理工类院校一门重要的通识必修课,它不仅是学习后继课程的基础,更是将来从事理论和实际工作的基础,数学已渗透并深入到自然科学和社会科学的各个领域。随着社会的发展,对教学质量和人才培养也提出了更高的要求。如何进一步提高数学教学质量,为后继课程和培养人才打下坚实基础的问题,是摆在我们面前的严峻问题。数学教育工作者深感重任在肩,必须面对现实,采取适当措施,用科学的方法去解决在教学过程中所遇到的各种问题。

目前,大学教育已经成为学生的基础教育,学生来自全国各地,学生的数学基础良莠不齐,有一些同学在教学无法跟上正常的教学进度,这些同学亟需一本能够帮助他们理解教材内容的例题及习题类型全面的课后辅导书。目前各种数学复习资料、辅导材料充斥市场,让学生们眼花缭乱,无所适从。为了正确引导学生学习高等数学,从繁复的深浅不一的复习资料中解放出来,我们几位长年从事在数学教学一线的教师认真地总结了多年来的教学经验,汲取了众多复习参考资料的营养,共同编撰了这本《高等数学学习与应用》。

本书的主要特点是每章的五个模块从新的高度对高等数学的知识给出了很好的诠释。

① 知识结构图:每章的知识用结构图的形式给出了清晰的总结,起到提纲挈领的作用。

② 疑难问题解答:对高等数学学习过程中遇到的常见问题和疑难问题给出了解答,帮助同学深刻理解教材中的概念、理论和思想方法。

③ 典型例题分析:例题内容丰富、典型性强,覆盖面广且有层次,既有基础题,也有综合提高题,还有一些研究生入学考试真题。许多题目有适当的分析过程,有些还给出了一题多解。可最大限度地满足各层次同学的需求,帮助同学学好高等数学,为后继课程的学习打好基础。

④ 应用案例模型:突出了高等数学的应用性,是教材内容的一个延伸。将生活中的实际问题应用数学方法解决。题目分两个层次,一种是数量关系比较明确的问题,另一种是需要学生自己寻找数量关系的问题。可以培养同学们探索知识、开拓创新的意识和能力。

⑤ 自测题:学生经过一段学习做的阶段性测验,可以检查自己学习的情况,便于发现问题后解决问题。

本书的第一章由苗文静编写;第二章由高艳辉编写;第三章由刘瑞芹编写;第四章由刘艳编写;第五、六章由许璐编写;第七、八章由文小艳编写;第九章由王昕编写;第十一章由韩元良编写;第十、十二章由王清编写。全书由魏丽侠教授负责主审。

本书是大学生学习高等数学的一本理想参考资料,也是高校数学教师的一本理想参考书。还为考研同学提供了一部分技巧及综合性强的题目。对于书中可能出现的纰漏与不足,恳请广大读者提出宝贵意见。

编 者

2016年7月

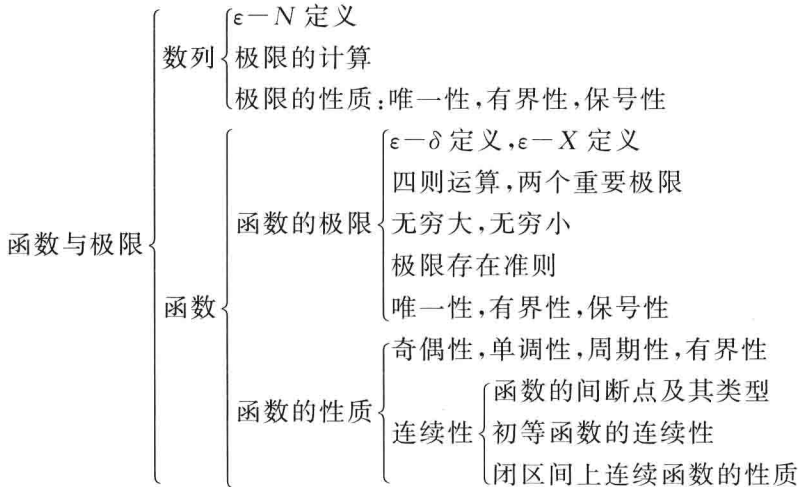
目 录

第一章 函数与极限	1
I 知识结构图	1
II 疑难问题解答	1
III 典型例题分析	7
IV 应用案例模型	16
V 自测题及答案	19
第二章 导数与微分	23
I 知识结构图	23
II 疑难问题解答	23
III 典型例题分析	26
IV 应用案例模型	36
V 自测题及答案	39
第三章 微分中值定理与导数应用	42
I 知识结构图	42
II 疑难问题解答	42
III 典型例题分析	47
IV 应用案例模型	62
V 自测题及答案	65
第四章 不定积分	68
I 知识结构图	68
II 疑难问题解答	68
III 典型例题分析	70
IV 应用案例模型	86
V 自测题及答案	88
第五章 定积分	91
I 知识结构图	91
II 疑难问题解答	91
III 典型例题分析	94
IV 应用案例模型	106
V 自测题及答案	108
第六章 定积分的应用	111
I 知识结构图	111
II 疑难问题解答	111
III 典型例题分析	112

IV 应用案例模型	119
V 自测题及答案	121
第七章 微分方程	122
I 知识结构图	122
II 疑难问题解答	122
III 典型例题分析	124
IV 应用案例模型	135
V 自测题及答案	139
第八章 向量代数与空间解析几何	142
I 知识结构图	142
II 疑难问题解答	142
III 典型例题分析	145
IV 应用案例模型	150
V 自测题及答案	151
第九章 多元函数微分法及其应用	155
I 知识结构图	155
II 疑难问题解答	155
III 典型例题分析	159
IV 应用案例模型	167
V 自测题及答案	173
第十章 重积分	176
I 知识结构图	176
II 疑难问题解答	176
III 典型例题分析	181
IV 应用案例模型	195
V 自测题及答案	198
第十一章 曲线积分与曲面积分	203
I 知识结构图	203
II 疑难问题解答	203
III 典型例题分析	210
IV 应用案例模型	227
V 自测题及答案	228
第十二章 无穷级数	232
I 知识结构图	232
II 疑难问题解答	232
III 典型例题分析	236
IV 应用案例模型	248
V 自测题及答案	250

第一章 函数与极限

I 知识结构图



II 疑难问题解答

1. 若数列 $\{x_n\}$ 与 $\{y_n\}$ 都发散, 则数列 $\{x_n + y_n\}$, $\{x_n y_n\}$ 也发散, 对吗?

不对, 例如 $x_n = n, y_n = -n$, 则 $\{x_n\}$ 与 $\{y_n\}$ 都发散, 但 $\{x_n + y_n\}$ 收敛.

$x_n = \begin{cases} n, & n \text{ 为奇数} \\ 0, & n \text{ 为偶数} \end{cases}, y_n = \begin{cases} 0, & n \text{ 为奇数} \\ n, & n \text{ 为偶数} \end{cases}$, 那么数列 $\{x_n\}$ 与 $\{y_n\}$ 都发散, 但 $\{x_n y_n\}$ 收敛.

2. 为什么在极限的定义中, ϵ 要任意给定?

下面以当 $x \rightarrow x_0$ 时, 函数 $f(x)$ 的极限是 A 来说明这个问题. 因为 ϵ 是描述函数 $f(x)$ 与常数 A 的接近程度的量, 只有 ϵ 的任意性 (无论它多么小), 才能表明 $f(x)$ 与 A 的无限接近, 又“给定”是指在通过 ϵ 找到 δ 的过程中, ϵ 是不变的常数. 因为只有 ϵ 暂时不变, 才能通过分析 $|f(x) - A| < \epsilon$, 找到正数 δ , 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 恒有 $|f(x) - A| < \epsilon$ 成立.

3. 在极限 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ 的定义中, δ 与 ϵ 是什么关系?

因为 $f(x)$ 是 x 的函数, 当 x 与 x_0 无限接近时, $f(x)$ 才能与 A 无限接近, 只有 x 与 x_0 接近到一定的程度, 才能得证 $|f(x) - A| < \epsilon$ 成立, 而 δ 正是表述 x 与 x_0 接近程度的量. 一般来说, 当 ϵ 变化时, δ 也变化; ϵ 愈小, δ 也愈小, 但 δ 不是由 ϵ 唯一确定的. 因为若对于任意给定的 $\epsilon > 0$, 找到一个 $\delta > 0$, 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 恒有 $|f(x) - A| < \epsilon$, 那么对于所有小于 δ 的正数 δ_1 , 当 $0 < |x - x_0| < \delta_1$ 时, 仍能得证 $|f(x) - A| < \epsilon$ 成立, 所以说 δ 不是唯一的, 也不必

找到一个最大的 δ . 因此, 在利用定义证明极限 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ 时, 常常将 $|f(x) - A|$ 适当放大, 以便于通过 $|f(x) - A| < \epsilon$ 较容易找到 δ , 这也是证明极限时常用的技巧.

4. 如何掌握不同极限过程中极限的定义?

一般课本中讲了 7 种极限过程: $n \rightarrow \infty, x \rightarrow x_0, x \rightarrow x_0^-, x \rightarrow x_0^+, x \rightarrow -\infty, x \rightarrow +\infty, x \rightarrow \infty$. 所谓极限过程, 也就是自变量的变化趋势, 如 $n \rightarrow \infty$ 是指自变量取正整数而无限增大的情况; $x \rightarrow -\infty$ 是指自变量取负实数而绝对值无限增大的情况; $x \rightarrow x_0$ 是指自变量取实数而无限接近 x_0 的情况; 其余类似. 虽然自变量的变化过程不同, 极限定义的表述略有差别, 但它们的本质是相同的, 那就是: 设 $f(x)$ 是处在自变量 x 的某个变化过程中的函数, A 是一个常数, 若对于任意给定的正数 ϵ , 总存在一个时刻, 使得这个时刻以后, 恒有 $|f(x) - A| < \epsilon$ 成立, 则称常数 A 是函数 $f(x)$ 在这个变化过程中的极限. 如: 对于任意给定的正数 ϵ , 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$ 的时刻是指存在整数 N , 当 $n > N$ 时, 恒有 $|x_n - A| < \epsilon$; 极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$ 的时刻是指存在正数 X , 当 $|x| > X$ 时, 恒有 $|f(x) - A| < \epsilon$; 极限 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ 的时刻是指存在正数 δ , 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 恒有 $|f(x) - A| < \epsilon$. 掌握了不同极限过程的极限定义的实质, 再表述各种极限过程中的极限定义就不难了.

5. 如何掌握用定义证明极限的方法?

在理解了极限定义的基础上, 用极限定义验证极限时, 要注意推理中的逻辑关系. 去证明时一般用“正推”过程, 即“如果…则…”, 验证极限时用的是“反推”过程, 即“要使…, 只要…”. 下面以极限 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ 为例说明证明步骤如下:

(1) 给定 $\epsilon > 0$.

(2) 写出 $|f(x) - A|$ 并整理化简, 有时要适当放大, 如 $|f(x) - A| \leq g(x)$. 所谓“适当”是指放大后当 $x \rightarrow x_0$ 时, $g(x)$ 仍能趋于零, 也就是放大时 $g(x)$ 中要保留含有 $(x - x_0)$ 的固式, 把其余的与 x 有关的固式适当放大. 为此, 常常需要先假设 $0 < |x - x_0| < \delta_1$, 在此条件下, 得到 $g(x)$; 要使 $|f(x) - A| < \epsilon$ 成立, 只要 $g(x) < \epsilon$, 从中找出 $\delta_2 > 0$, 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta_2$ 时, 恒有 $g(x) < \epsilon$ 成立, 取 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 恒有 $|f(x) - A| < \epsilon$.

(3) 结论: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$.

6. 函数极限与函数值有关系吗?

没关系. 极限是一种自变量变化时函数值的变化趋势, 如 $x \rightarrow 1$ 时, $\frac{x^2 - 1}{x - 1} \rightarrow 2$, 但 $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ 在 $x = 1$ 处是无意义的.

7. 关于函数的单侧极限, 极限及极限不存在的几种情况.

利用极限的定义很容易证明: 极限 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在的充分必要条件是单侧极限 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ 和 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ 都存在且相等. 在求函数的极限时, 什么情况下需要求单侧极限呢?

(1) 若 x_0 是分段函数的分界点, 且在 x_0 的左右两侧函数的表达式不一样, 则求分界点 x_0 的极限时一定要先考察点 x_0 的左右极限是否存在, 再确定极限 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 是否存在. 例: $f(x) =$

$\begin{cases} \frac{1}{x}, x \geq 1 \\ 2-x, x < 1 \end{cases}$, 若求 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$, 则需要先求左极限 $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ 及右极限 $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$. 但是, 并不是所有

分段函数在分界点的极限都要求左右极限. 如, 若 x_0 是分段函数的分界点, 但在 x_0 的左右两侧表达式相同, 且 $x \rightarrow x_0$ 时, x_0 的左右两侧 $f(x)$ 的变化趋势也一样, 则不必求左右极限, 可直接求极限 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$. 例如, $g(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, x \neq 0 \\ 1, x = 0 \end{cases}$, 若求 $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$, 则不必求 $x=0$ 处的左右极限, 而

直接求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ 即可.

(2) 若 $f(x)$ 在 x_0 的左右两侧表达式相同, 但当 $x \rightarrow x_0^-$ 及 $x \rightarrow x_0^+$ 时, $f(x)$ 的变化趋势不同, 则求极限 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 时需要考察左极限 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ 及右极限 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$, 再确定极限 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 是否存在. 例如, $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ 在 $x=0$ 处, 由于 $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$, 而 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$. 于是 $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) =$

$\lim_{x \rightarrow 0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x}} = \infty$, 所以需先考察 $x=0$ 处的左右极限. 本例中显然极限 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 不存在, 又如 $f(x) = \arctan x$, 当 $x \rightarrow -\infty$ 和 $x \rightarrow +\infty$ 时, 函数的变化趋势不同, 即 $\lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$. 所以极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \arctan x$ 不存在. 类似的例子, 如 $\lim_{x \rightarrow \infty} \arccos x$, $\lim_{x \rightarrow \infty} x^x$ 都不存在.

(3) 关于函数极限不存在的例子. 常见的大致有以下几种情况:

① 极限 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 不存在是因为单侧极限 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ 和 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ 至少有一个不存在或者都

存在但不相等. 例子同以上(1)(2)中所述.

② 若在自变量的某个变化过程中, $f(x)$ 是无穷大量, 则在该过程中极限 $\lim f(x)$ 不存在. 如极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = \infty$, 不存在.

③ 若自变量的某个变化过程中, 函数的变化趋势是振荡不定导致函数与任何常数 A 都不能永远保持无限接近状态, 则函数的极限不存在. 如极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin x$, $\lim_{x \rightarrow 0} \cos \frac{1}{x^2}$, 及 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$. 其中

$x_n = \begin{cases} \frac{n+1}{2n}, n \text{ 为偶数} \\ \frac{1}{n}, n \text{ 为奇数} \end{cases}$, 极限不存在, 都属于这种情况.

8. 函数极限与数列极限的关系的应用举例.

函数极限与数列极限的关系是: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ (或 ∞) 的充分必要条件是对于任何以 x_0 为极限的数列 $\{x_n\}$ ($x_n \neq x_0$) 都有 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$ (或 ∞). 这里进一步举例说明它的应用.

(1) 利用函数极限求数列的极限. 如, 已知 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. 由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$, 于是 $\lim_{n \rightarrow \infty} n \sin \frac{1}{n} =$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1$. 以后讲了求极限的洛必达法则后, 会有更多的应用.

(2) 证明函数的极限不存在. 如证明极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \cos \frac{1}{x}$ 不存在, 取 $x_n = \frac{1}{2n\pi}, y_n = \frac{1}{n\pi + \frac{\pi}{2}}$, 显然

当 $n \rightarrow \infty$ 时, $x_n \rightarrow 0, y_n \rightarrow 0$. 而 $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos \frac{1}{x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \cos 2n\pi = 1, \lim_{n \rightarrow \infty} \cos \frac{1}{y_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \cos(n\pi + \frac{\pi}{2}) = 0$. 由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos \frac{1}{x_n} \neq \lim_{n \rightarrow \infty} \cos \frac{1}{y_n}$, 所以极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \cos \frac{1}{x}$ 不存在.

(3) 证明 $f(x)$ 在区间 I 上无界. 常用的方法是: 找出数列 $\{x_n\} \subset I$, 而 $\{f(x_n)\}$ 为无穷大数列. 如证明在 $(0, 1]$ 上, $f(x) = \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}$ 无界. 取数列 $x_n = \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}$, 显然 $f(x_n) \subset (0, 1]$, 而

$f(x_n) = \left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) \sin\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \infty (n \rightarrow \infty)$. 所以在 $(0, 1]$ 上, $f(x) = \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}$ 无界.

(4) 证明 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq \infty$. 常用的方法是: 找出一个数列 $x_n \rightarrow x_0 (x_n \neq x_0)$, 而 $\{f(x_n)\}$ 收敛.

例如, 证明当 $x \rightarrow 0^+$ 时, $f(x) = \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}$ 不是无穷大. 取 $x_n = \frac{1}{2n\pi}$, 显然当 $n \rightarrow \infty$ 时, $x_n \rightarrow 0^+$, $x_n \neq 0$, 而 $f(x_n) = 2n\pi \sin 2n\pi = 0$. 显然数列 $\{f(x_n)\}$ 收敛于零, 故 $f(x) = \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}$ 当 $x \rightarrow 0^+$ 时不是无穷大.

9. 无穷大与无界量有什么区别和联系?

设 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$, 则根据无穷大的定义, 对于任意给定的正数 M , 有 $\delta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 恒有 $|f(x)| > M$, 这表明对于 x_0 的去心 δ 邻域的一切点 x , 都有 $|f(x)| > M$. 设 $f(x)$ 在 x_0 的去心 δ 邻域无界, 是指对于无论多么大的正数 M , 都存在点 x_1 属于该邻域; 而 $|f(x_1)| > M$, 这表明在 x_0 的去心 δ 邻域里可能出现 $|f(x_1)| \leq M$ 的点 x_1 . 对比上述定义得知, 在自变量的同一个变化过程中, 无穷大量一定是无界量, 但无界量不一定是无穷大量. 例如, 在 $(0, 1]$ 上, $\frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}$ 不是无穷大量.

10. 求和与差的极限时, 为什么一般不能用等价无穷小代换?

当求两个无穷小之比的极限时, 分子分母可以分别用与其等价的无穷小代换. 也就是说在代换时, 必须将分子和分母的整体分别换成与它们各自等价的无穷小; 但若分子(或分母)中的和(或差)中的某几项用与它们分别等价的无穷小作代换, 则不能保证代换后的新的分子(或分母)与原来的分子(或分母)是等价无穷小. 例如, 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}$ 时, 若将 $\tan x, \sin x$ 均换成 x , 则分子为零, 显然与 $\tan x - \sin x$ 不等价, 所以代换后得极限为零, 结果是错误的. 正确的方法是:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}x^2}{x^2} = \frac{1}{2}$$

这说明当 $x \rightarrow 0$ 时, $\tan x - \sin x$ 与 $\frac{1}{2}x^3$ 是等价的.

在求极限的过程中, 乘除中的无穷小因子是可以与其等价的无穷小代换的, 读者可以练习利用极限的运算法则来证明.

11. 关于幂指数函数极限的求法.

所谓幂指数函数是指:形如 $f(x)^{g(x)}$ ($f(x) > 0$) 的函数, 它的极限一般不能直接用极限的运算法则求出来. 如重要极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ 就是幂指数函数的极限, 但是能利用该重要极限来求的幂指数函数的极限是有一定的条件的, 则它应该是“ 1^∞ ”型的且容易化为如下形式: $\lim_{\varphi(x) \rightarrow \infty} \left[1 + \frac{1}{\varphi(x)}\right]^{\varphi(x)}$, 即利用该重要极限 $\lim_{\varphi(x) \rightarrow \infty} \left[1 + \frac{1}{\varphi(x)}\right]^{\varphi(x)} = \lim_{u \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{u}\right)^u = e$. 对于更一般的幂指数函数的极限, 常常利用指数对数恒等式将幂指数函数改写成指数函数的复合函数, 即 $f(x)^{g(x)} = e^{\ln f(x)^{g(x)}} = e^{g(x) \ln f(x)}$, 再利用有关极限的运算法则求极限. 一般结论: 若 $\lim f(x) = A > 0$, $\lim g(x) = B$, 则 $\lim f(x)^{g(x)} = A^B$.

12. 刚开始学习极限运算时, 常常易出现哪些错误?

请看以下几题的做法是否正确? 对于错误的请指出错误的原因并改正.

$$(1) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{1-x} - \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3}{1-x^3} = \infty - \infty = 0.$$

解法错误. 原因是: 错误运用了差的极限运算法则.

因为根据差的运算法则, 必须两个函数的极限都存在才能运用, 而这里极限 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{1-x} = \infty$ 及 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3}{1-x^3} = \infty$ 都不存在. 所以不能用差的极限运算法则, 况且 ∞ 不是具体的数, 也不能当数来运算. 正确的解法是:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1+x+x^2) - 3}{1-x^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+2)}{(1-x)(1+x+x^2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-(x+2)}{1+x+x^2} = -1 \end{aligned}$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n}{n^2} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n^2} + \cdots + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^2} = 0 + 0 + \cdots + 0 = 0.$$

解法错误. 原因是: 错误的运用了加法的极限运算法则.

因为加法的运算法则只适用于有限个具有极限的函数之和的情况, 而这里当 $n \rightarrow \infty$ 时, 不是有限项之和, 因此不能应用加法的极限运算法则.

正确的解法:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n}{n^2} \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} (1 + 2 + \cdots + n) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \frac{n(n+1)}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} x \cos \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x \lim_{x \rightarrow 0} \cos \frac{1}{x} = 0.$$

解法错误. 原因是: 错误的运用了乘积的极限运算法则. 因为乘积的极限运算法则中, 要求每个因子的极限都存在, 而这里极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \cos \frac{1}{x}$ 不存在, 所以不能用乘积的极限运算法则. 正确的解法如下:

因为 $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$, 即 x 为 $x \rightarrow 0$ 时的无穷小, 且 $\left| \cos \frac{1}{x} \right| \leq 1$, 即 $\cos \frac{1}{x}$ 有界. 根据有界函数与

无穷小的乘积仍为无穷小的性质知: $\lim_{x \rightarrow 0} x \cos \frac{1}{x} = 0$.

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = 0.$$

解法错误. 原因是: 错误的运用了重要极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. 注意: 当 $x \rightarrow 0$ 时 $\frac{1}{x} \rightarrow \infty$, 这里 $\lim_{x \rightarrow 0}$

$\frac{\sin \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} \neq 1$. 由此可见, 当利用重要极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ 求极限时, 不能以形式看函数式, 只要化为

$\frac{\sin \varphi(x)}{\varphi(x)}$ 就认为它的极限一定是 1. 要注意在该极限过程中 $\varphi(x)$ 的变化趋势. 若 $\varphi(x) \rightarrow 0$ 不

成立, 则不能用该重要极限. 从本质上来说, 重要极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ 是“ $\frac{0}{0}$ ”型的, 若不是“ $\frac{0}{0}$ ”型

的极限, 一定不能用该重要极限求解. 该题正确的解法是: 利用有界函数与无穷小之积仍是无

穷小的性质求解. 即因为 $x \rightarrow 0$ 时, x^2 是无穷小, 而 $\sin \frac{1}{x}$ 有界. 于是 $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \frac{1}{x} = 0$.

13. 任何两个无穷小都可以比吗?

不能. 例如: 当 $x \rightarrow +\infty$ 时 $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = \frac{\sin x}{x}$ 都是无穷小量; 但 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sin x$

不存在且不为无穷大, 故当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $f(x)$ 和 $g(x)$ 不能比较.

14. 关于无穷大有哪些运算法则?

利用无穷大的定义, 不难证明无穷大有以下运算法则:

- ① 两个同号无穷大的和还是同号无穷大;
- ② 无穷大与有界变量的和还是无穷大;
- ③ 无穷大与有非零极限的变量之积还是无穷大.

15. 连续函数与有间断点的函数复合, 是否还有间断点?

不一定的. 如设 $f(x) = |x|$, $g(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$, $f(g(x)) = 1$, $g(f(x)) = 1$, $g^2(x) = 1$, 可

见, 连续函数与有间断点的函数复合时, 间断点是可以消除的. 就是有间断点的函数复合时, 也

可以变连续, 如 $f(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 2, & x < 0 \end{cases}$, $f(f(x)) = 1$.

16. 课本中关于初等函数的连续性, 为什么不說“初等函数在其定义域内都是连续的”而說“初等函数在其定义区间内都是连续的”?

因为初等函数的定义域可能包含孤立点. 如初等函数 $f(x) = \sqrt{\sin x - 1}$, 它的定义域 $D =$

$\left\{ x \mid x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}, k \text{ 为整数} \right\}$ 中每一个点都是孤立点, 函数在每个孤立点的邻域内不是处处有

定义. 但是函数在一点连续的定义中要求函数在该点的某一邻域有定义, 因此不能說“初等函数在其定义域内连续”, 而应该正确的叙述为“初等函数在其定义区间内都是连续的”.

III 典型例题分析

一、映射与函数

例 1 已知: $A = \left\{0, 1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\right\}$, $B = \left\{1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\right\}$, 求: $A \cup B, A \cap B, A - B, B - A$.

解 $A \cup B = A, A \cap B = B, A - B = \{0\}, B - A = \varnothing$.

例 2 求下列函数的定义域:

$$(1) y = \frac{1}{x} - \sqrt{1-x^2}; \quad (2) y = \begin{cases} \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}.$$

【分析】 上述两个函数均为初等函数, 初等函数的定义域是使函数有意义的自变量的变化范围.

解 (1) 定义域为 $[-1, 0) \cup (0, 1]$; (2) 定义域为 $R = (-\infty, +\infty)$.

例 3 设 $y = f(x)$ 的定义域为 $[1, 2]$, 求 $f(1 - \ln x)$ 的定义域.

解 定义域为: $\left[\frac{1}{e}, 1\right]$.

例 4 设 $f\left(\frac{1}{x}\right) = x(1 + \sqrt{1+x^2})$, $x > 0$. 求 $f(x)$.

解 $f(x) = \frac{1}{x} \left(1 + \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}\right)$, $x > 0$.

例 5 设 $f(x) = \begin{cases} 1, & |x| < 1 \\ 0, & |x| = 1 \\ -1, & |x| > 1 \end{cases}$, $g(x) = e^x$, 求 $f[g(x)]$ 和 $g[f(x)]$.

解 $f[g(x)] = \begin{cases} 1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x > 0 \end{cases}$, $g[f(x)] = \begin{cases} e, & |x| < 1 \\ 1, & |x| = 1 \\ \frac{1}{e}, & |x| > 1 \end{cases}$.

例 6 判断函数 $f(x) = \begin{cases} 1-x, & x \leq 0 \\ 1+x, & x > 0 \end{cases}$ 的奇偶性.

解 由于 $f(x) = 1 + |x|$, 所以是偶函数.

例 7 设 $f(x) = \begin{cases} 2^x, & -1 < x < 0 \\ 2, & 0 \leq x < 1 \\ x-1, & 1 \leq x \leq 3 \end{cases}$, 求 $f(3), f(0), f(-0.5)$.

解 $f(3) = 2, f(0) = 2, f(-0.5) = 2^{-0.5} = 2^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

例 8 设 $f(x)$ 为定义在 $(-L, L)$ 内的奇函数, 若 $f(x)$ 在 $(0, L)$ 内单调增加, 证明 $f(x)$ 在 $(-L, 0)$ 内也单调增加.

证 设 x_1, x_2 为满足 $-L < x_1 \leq x_2 < 0$ 的两个实数, 则 $L > -x_1 \geq -x_2 > 0$, 因 $f(x)$ 在 $(0, L)$ 内单调增加, 故 $f(-x_2) \leq f(-x_1)$, 又因 $f(x)$ 是 $(-L, L)$ 内的奇函数从而 $-f(x_2) \leq -f(x_1)$

(x_1) , 即 $f(x_1) \leq f(x_2)$, 因此 $f(x)$ 在 $(-L, 0)$ 内也单调增加.

例 9 指出下列初等函数由哪些基本初等函数复合而成?

$$(1) y = e^{(\sin \frac{1}{x})^2}; \quad (2) y = \arccos(\sqrt{\ln(x^2 - 1)}).$$

解 (1) 由 $y = e^u, u = t^2, t = \sin v, v = \frac{1}{x}$ 复合而成;

(2) 由 $y = \arccos u, u = \sqrt{t}, t = \ln v, v = x^2 - 1$ 复合而成.

例 10 设映射 $f: A \rightarrow B$ 是可逆的, 证明: 它的逆映射是唯一的.

证 设 g_1, g_2 都是 f 的逆映射, 且 $g_1 \neq g_2$, 则 $\exists y \in B$, 使 $g_1(y) \neq g_2(y)$.

由 $f^{-1}[g_2(y)] = y$ 得, $g_1\{f^{-1}[g_2(y)]\} = g_1(y)$, 又因 f 与 g_1 互为逆映射, 所以 $g_1\{f^{-1}[g_2(y)]\} = g_2(y)$, 故 $g_1(y) = g_2(y)$, 与假设矛盾, 命题得证.

例 11 下列函数是否相等, 为什么?

$$(1) y = \frac{x^2}{x} \text{ 与 } y = x; \quad (2) y = x \text{ 与 } y = (\sqrt{x})^2;$$

$$(3) y = \sqrt{x^2} \text{ 与 } y = |x|; \quad (4) y = x^2 + 1 \text{ 与 } u = t^2 + 1$$

解 (1)、(2) 不等, 因定义域不同, (3)、(4) 相等, 因定义域相同.

例 12 下列哪些函数是初等函数, 哪些不是?

$$(1) y = 2^{-x^2}; \quad (2) y = \sqrt{x} + \lg(\sin x); \quad (3) y = [x]; \quad (4) y = \begin{cases} 0, & x \geq 0 \\ 1, & x < 0 \end{cases}.$$

解 (1)、(2) 是; (3)、(4) 不是.

二、数列的极限

例 1 用极限定义证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{n} = 1$.

【分析】 因对 $\forall \epsilon > 0$, 若要 $|\frac{n-1}{n} - 1| = \frac{1}{n} < \epsilon$ 成立, 只要 $n > \frac{1}{\epsilon}$ 即可.

证 取 $N = [\frac{1}{\epsilon}]$, 则当 $n > N$ 时, 有 $|\frac{n-1}{n} - 1| = \frac{1}{n} < \epsilon$, 由定义知 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{n} = 1$ 成立.

例 2 求下列数列的极限

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - 2}{n^2 + n + 1}; \quad (2) \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n} + \sqrt{n+1})(\sqrt{n+2} - \sqrt{n}); \quad (3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-2)^n + 3^n}{(-2)^{n+1} + 3^{n+1}};$$

$$(4) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^k} + \frac{2}{n^k} + \cdots + \frac{n}{n^k} \right) (k \text{ 为常数}); \quad (5) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{28} + \cdots + \frac{1}{9n^2 - 3n - 2} \right);$$

$$(6) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{1 + \frac{1}{n}}.$$

解 (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - 2}{n^2 + n + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{2}{n^2}}{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} = 1.$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n} + \sqrt{n+1})(\sqrt{n+2} - \sqrt{n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n} + \sqrt{n+1}) \times 2}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2(1 + \sqrt{1 + \frac{1}{n}})}{\sqrt{1 + \frac{2}{n}} + 1} = 2.$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-2)^n + 3^n}{(-2)^{n+1} + 3^{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{3} \left(-\frac{2}{3}\right)^n + \frac{1}{3}}{\left(-\frac{2}{3}\right)^{n+1} + 1}, \text{ 因 } \left| -\frac{2}{3} \right| < 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{2}{3}\right)^n$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{2}{3}\right)^{n+1} = 0, \text{ 所以 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-2)^n + 3^n}{(-2)^{n+1} + 3^{n+1}} = \frac{1}{3}.$$

$$(4) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^k} + \frac{2}{n^k} + \cdots + \frac{n}{n^k} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+\cdots+n}{n^k} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2n^{k-1}} = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^{k-2}} + \frac{1}{n^{k-1}} \right)$$

$$= \begin{cases} 0, & k > 2 \\ \frac{1}{2}, & k = 2. \\ \infty, & k < 2 \end{cases}$$

$$(5) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{28} + \cdots + \frac{1}{9n^2 - 3n - 2} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{1 \times 4} + \frac{1}{4 \times 7} + \frac{1}{7 \times 10} + \cdots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} \right]$$

$$= \frac{1}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{7} \right) + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{10} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{3n-2} - \frac{1}{3n+1} \right) \right]$$

$$= \frac{1}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{3n+1} \right) = \frac{1}{3}.$$

$$(6) \text{ 因为 } 1 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{1 + \frac{1}{n}} \leq 1 + \frac{1}{n}, \text{ 并且 } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right) = 1, \text{ 故由夹逼准则得 } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{1 + \frac{1}{n}} = 1.$$

三、极限与连续

1. 求极限的常用方法:

- (1) 用定义;
- (2) 代入法(对连续函数,可用因式分解或有理化消除零因子);
- (3) 变量替换法;
- (4) 两个重要极限法;
- (5) 用夹逼准则和单调有界准则;
- (6) 等价无穷小量代换.

常用的等价无穷小有:当 $x \rightarrow 0$ 时, $\sin x \sim x$; $\tan x \sim x$; $1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2$; $\ln(1+x) \sim x$;

$\arcsin x \sim x$; $\arctan x \sim x$; $e^x - 1 \sim x$; $\sqrt{1+x} - 1 \sim \frac{1}{2}x$; $(1+\beta x)^\alpha \sim \alpha\beta x$.

2. 函数的连续性主要用连续函数的定义来确定某个点是否为间断点,用函数的左右极限确定间断点的类型.

例 1 用定义证明:当 $a > 0$ 时, $\lim_{x \rightarrow 0} a^x = 1$.

证 ① 当 $a > 1$ 时,对任给 $\epsilon > 0$ (不妨设 $\epsilon < 1$),为使 $|a^x - 1| < \epsilon$,即 $1 - \epsilon < a^x < 1 + \epsilon$,只要 $\log_a(1 - \epsilon) < x < \log_a(1 + \epsilon) < -\log_a(1 - \epsilon)$,即 $|x - 0| < -\log_a(1 - \epsilon)$.

对任给 $\epsilon > 0$ (不妨设 $\epsilon < 1$),取 $\delta = -\log_a(1 - \epsilon)$,则当 $|x - 0| < \delta$ 时,有 $|a^x - 1| < \epsilon$,因此 $\lim_{x \rightarrow 0} a^x = 1$.

② 当 $0 < a < 1$ 时,对任给 $\epsilon > 0$ (不妨设 $\epsilon < 1$),为使 $|a^x - 1| < \epsilon$,即 $1 - \epsilon < a^x < 1 + \epsilon$,只要 $-\log_a(1 - \epsilon) < \log_a(1 + \epsilon) < x < \log_a(1 - \epsilon)$,即 $|x - 0| < \log_a(1 - \epsilon)$.

对任给 $\varepsilon > 0$ (不妨设 $\varepsilon < 1$), 取 $\delta = \log_a(1 - \varepsilon)$, 则当 $|x - 0| < \delta$ 时, 有 $|a^x - 1| < \varepsilon$, 因此 $\lim_{x \rightarrow 0} a^x = 1$.

综合①、②当 $a > 0$ 时, $\lim_{x \rightarrow 0} a^x = 1$.

同理可证: 当 $a > 1$ 时, ① $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty$; ② $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$.

例 2 求下列极限

$$(1) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 3x^2 + 2x}{x^2 - x - 6}; \quad (2) \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1}); \quad (3) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{x} - 1};$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{1}{x+1} - \frac{3}{x^3+1} \right); \quad (5) \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\sqrt{\frac{1}{x}} + \sqrt{\frac{1}{x}} - \sqrt{\frac{1}{x}} - \sqrt{\frac{1}{x}} \right);$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x-3)^{20} (3x+2)^{30}}{(2x+1)^{50}}$$

解 (1) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 3x^2 + 2x}{x^2 - x - 6} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x(x+1)(x+2)}{(x-3)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x(x+1)}{x-3}$

$$= \frac{-2 \times (-2+1)}{-2-3} = -\frac{2}{5}.$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1}) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1})(\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 - 1})}{\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 - 1}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1 - x^2 + 1}{\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 - 1}} = 0.$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{x} - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt[3]{x} - 1)(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1)(\sqrt{x} + 1)}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1)} = \frac{2}{3}.$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{1}{x+1} - \frac{3}{x^3+1} \right) = \lim_{x \rightarrow -1} \left[\frac{1}{x+1} - \frac{3}{(x+1)(x^2-x+1)} \right] = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x-2)}{(x+1)(x^2-x+1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x-2}{x^2-x+1} = -1.$$

$$(5) \text{ 设 } t = \frac{1}{x}, \text{ 则 } \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\sqrt{\frac{1}{x}} + \sqrt{\frac{1}{x}} - \sqrt{\frac{1}{x}} - \sqrt{\frac{1}{x}} \right) = \lim_{t \rightarrow +\infty} (\sqrt{t} + \sqrt{t} - \sqrt{t} - \sqrt{t})$$

$$= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{2\sqrt{t}}{(\sqrt{t} + \sqrt{t} + \sqrt{t} - \sqrt{t})} = 2 \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{\sqrt{t} + \sqrt{t} + \sqrt{t} - \sqrt{t}}{\sqrt{t}}} = 2 \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{t}}} + \sqrt{1 - \frac{1}{\sqrt{t}}}} = 1.$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x-3)^{20} (3x+2)^{30}}{(2x+1)^{50}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(2 - \frac{3}{x}\right)^{20} \left(3 + \frac{2}{x}\right)^{30}}{\left(2 + \frac{1}{x}\right)^{50}} = \left(\frac{3}{2}\right)^{30}.$$

$$\text{一般地, } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \cdots + b_{m-1} x + b_m} = \begin{cases} \frac{a_0}{b_0}, & m = n \\ 0, & m > n \\ \infty, & m < n \end{cases}, \text{ 这里 } a_0 b_0 \neq 0.$$

例 3 问 $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$ 是否存在.

解 设 $x'_n = \frac{1}{n\pi}$, $x''_n = \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}$, ($n=1, 2, \dots$), 则显然有 $x'_n \rightarrow 0$, $x''_n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$), 故由函数极

限与数列极限的关系可知 $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{1}{x_n} = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{1}{x_n} = 1$, 因此 $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$ 不存在.

例 4 计算下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2)}{\sin^2 x}; \quad (2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1-\cos x)\arcsin x}{x^3}; \quad (3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{\sin 4x}$$

解 (1) 由于 $\ln(1+x^2) \sim x^2$ ($x \rightarrow 0$), $\sin^2 x \sim x^2$ ($x \rightarrow 0$), 所以 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2)}{\sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2} = 1$.

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1-\cos x)\arcsin x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^2}{2} \cdot x}{x^3} = \frac{1}{2}.$$

(3) 由于 $\arctan x \sim x$ ($x \rightarrow 0$), $\sin 4x \sim 4x$ ($x \rightarrow 0$), 所以 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{\sin 4x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{4x} = \frac{1}{4}$.

$$\text{例 5} \quad (1) \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{\pi - x}; \quad (2) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sin \sqrt{x+1} - \sin \sqrt{x}); \quad (3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{\sin x^3}$$

解 (1) 令 $t = \pi - x$, 则 $\sin x = \sin(\pi - t) = \sin t$, 且当 $x \rightarrow \pi$ 时 $t \rightarrow 0$. 所以有

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{\pi - x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1.$$

$$(2) \sin \sqrt{x+1} - \sin \sqrt{x} = 2 \sin \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}{2} \cos \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}{2}, \text{ 因为}$$

$$\left| \cos \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}{2} \right| \leq 1, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \sin \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}{2} = \sin \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}{2} = 0,$$

$$\text{所以 } \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sin \sqrt{x+1} - \sin \sqrt{x}) = 0.$$

(3) 由于 $1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$ ($x \rightarrow 0$), $\tan x \sim x$ ($x \rightarrow 0$) $\sin x^3 \sim x^3$ ($x \rightarrow 0$), 所以

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{\sin x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x (1 - \cos x)}{\sin x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \frac{x^2}{2}}{x^3} = \frac{1}{2}.$$

注意: 利用等价无穷小代换求极限时比较简便, 但用等价无穷小代换求和差的极限时要慎重, 可以代换乘积因子, 不要代换表达式和差中的项, 否则经常会出现错误的计算结果.

例如, 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{\sin x^3}$ 时, 如果用 $\tan x \sim x$, $\sin x \sim x$ 进行分子中的两项代换, 则

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{\sin x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - x}{x^3} = 0, \text{ 与例 5 的 (3) 结果矛盾.}$$

例 6 设函数 $f(x) = \frac{1 + e^{-\frac{1}{x}}}{1 - e^{-\frac{1}{x}}}$, 求:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x); \quad (2) \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x); \quad (3) \lim_{x \rightarrow 0} f(x); \quad (4) \lim_{x \rightarrow 0} f(|x|)$$

解 (1) 由于 $x \rightarrow 0^+$ 时, $\frac{1}{x} \rightarrow +\infty$, $-\frac{1}{x} \rightarrow -\infty$, $e^{-\frac{1}{x}} \rightarrow 0$, $\frac{1 + e^{-\frac{1}{x}}}{1 - e^{-\frac{1}{x}}} \rightarrow 1$, 所以 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$