

INTERNATIONAL
MATHEMATICAL
OLYMPIADS

IMO 50年

1964 ~ 1968

第2卷

- 主 编 佩 捷
- 副主编 冯贝叶

多解 推广 加强



哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

INTERNATIONAL
MATHEMATICAL
OLYMPIADS

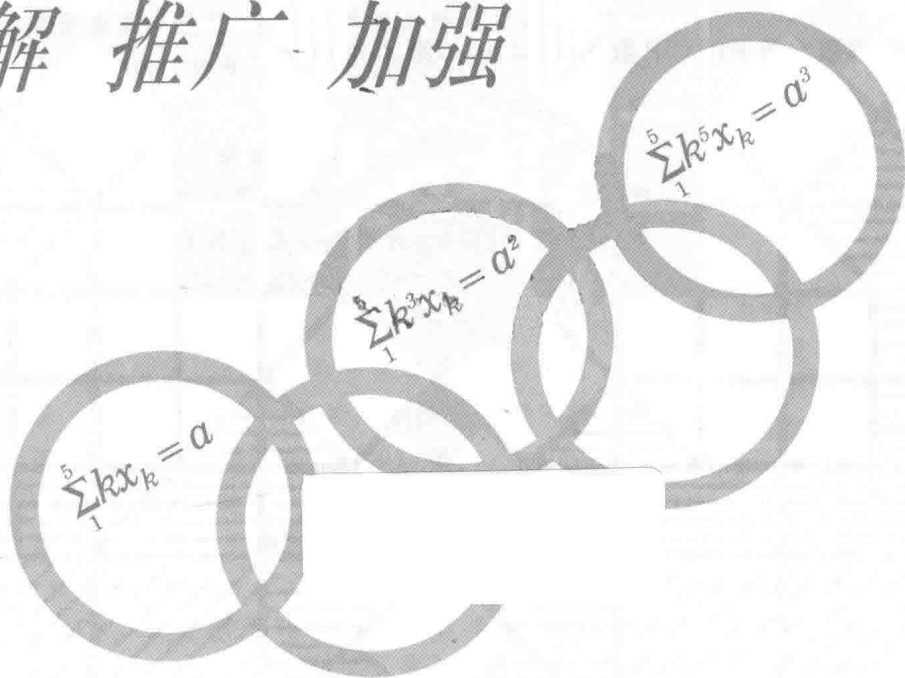
IMO 50年

1964 ~ 1968

第2卷

- 主 编 佩 捷
- 副主编 冯贝叶

多解 推广 加强



哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内 容 简 介

本书汇集了第6届至第10届国际数学奥林匹克竞赛试题及解答。本书广泛搜集了每道试题的多种解法,且注重初等数学与高等数学的联系,更有出自数学名家之手的推广与加强。本书可归结出以下四个特点,即收集全、解法多、观点高、结论强。

本书适合于数学奥林匹克竞赛选手和教练员、高等院校相关专业研究人员及数学爱好者使用。

图书在版编目(CIP)数据

IMO 50年.第2卷,1964~1968/佩捷主编. —哈尔滨:
哈尔滨工业大学出版社,2014.11
ISBN 978-7-5603-4976-3

I. ①I… II. ①佩… III. ①中学数学课—题解
IV. ①G634.605

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 257424 号

策划编辑 刘培杰 张永芹
责任编辑 张永芹 刘春雷
封面设计 孙茵艾
出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社 址 哈尔滨市南岗区复华四道街10号 邮编 150006
传 真 0451-86414749
网 址 <http://hitpress.hit.edu.cn>
印 刷 哈尔滨市石桥印务有限公司
开 本 787mm×1092mm 1/16 印张 12.25 字数 227千字
版 次 2014年11月第1版 2014年11月第1次印刷
书 号 ISBN 978-7-5603-4976-3
定 价 28.00元

(如因印装质量问题影响阅读,我社负责调换)

前言 | Foreword

法国教师于盖特·昂雅勒朗·普拉内斯在与法国科学家、教育家阿尔贝·雅卡尔的交谈中表明了这样一种观点：“若一个人不‘精通数学’，他就比别人笨吗”？

“数学是最容易理解的，除非有严重的精神疾病，不然的话，大家都应该是‘精通数学’的。可是，由于大概只有心理学家才可能解释清楚的原因，某些年轻人认定自己数学不行。我认为其中主要的责任在于教授数学的方式。”

“我们自然不可能对任何东西都感兴趣，但数学更是一种思维的锻炼，不进行这项锻炼是很可惜的。不过，对诗歌或哲学，我们似乎也可以说同样的话。”

“不管怎样，根据学生数学上的能力来选拔‘优等生’的不当做法对数学这门学科的教授是非常有害的。”（阿尔贝·雅卡尔、于盖特·昂雅勒朗·普拉内斯，《献给非哲学家的小哲学》，周冉，译，广西师范大学出版社，2001，96）

这本题集不是为老师选拔“优等生”而准备的，而是为那些对 IMO 感兴趣，对近年来中国数学工作者在 IMO 研究中所取得的成果感兴趣的读者准备的资料库。展示原味真题，提供海量解法（最多一题提供 20 余种不同解法，如第 3 届 IMO 第 2 题），给出加强形式，尽显推广空间，是我国建国以来有关 IMO 试题方面规模最大、收集最全的一本题集，从现在看，以“观止”称之并不为过。

前中国国家射击队的总教练张恒是用“系统论”研究射击训练的专家,他曾说:“世界上的很多新东西,其实不是‘全新’的,就像美国的航天飞机,总共用了 2 万个已有的专利技术,真正的创造是它在总体设计上的新意.”(胡廷楣.《境界——关于围棋文化的思考》.上海人民出版社,1999,463)本书的编写又何尝不是如此呢,将近 100 位专家学者给出的多种不同解答放到一起也是一种创造.

如果说这部题集可比作一条美丽的珍珠项链的话,那么编者所做的不过是将那些藏于深海的珍珠打捞起来并穿附在一条红线之上,形式归于红线,价值归于珍珠.

首先要感谢江仁俊先生,他可能是国内最早编写国际数学奥林匹克题解的先行者(1979 年,笔者初中毕业,同学姜三勇(现为哈工大教授)作为临别纪念送给笔者的一本书就是江仁俊先生编的《国际中学生数学竞赛题解》(定价仅 0.29 元),并用当时叶剑英元帅的诗词做赠言:“科学有险阻,苦战能过关.”27 年过去仍记忆犹新).所以特引用了江先生的一些解法.江苏师范学院(今年刚刚去世的华东师范大学的肖刚教授曾在该校外语专业读过)是我国最早介入 IMO 的高校之一,毛振璇、唐起汉、唐复苏三位老先生亲自主持从德文及俄文翻译 1~20 届题解.令人惊奇的是,我们发现当时的插图绘制居然是我国的微分动力学专家“文化大革命”后北大的第一位博士张筑生教授,可惜天妒英才,张筑生教授英年早逝,令人扼腕(山东大学的杜锡录教授同样令人惋惜,他也是当年数学奥林匹克研究的主力之一).本书的插图中有几幅就是出自张筑生教授之手^[22].另外中国科技大学是那时数学奥林匹克研究的重镇,可以说上世纪 80 年代初中国科技大学之于现代数学竞赛的研究就像哥廷根 20 世纪初之于现代数学的研究.常庚哲教授、单墀教授、苏淳教授、李尚志教授、余红兵教授、严镇军教授当年都是数学奥林匹克研究领域的旗帜性人物.本书中许多好的解法均出自他们^{[4],[13],[19],[20],[50]}.目前许多题解中给出的解法中规中矩,语言四平八稳,大有八股遗风,仿佛出自机器一般,而这几位专家的解答各有特色,颇具个性.记得早些年笔者看过一篇报道说常庚哲先生当年去南京特招单墀与李克正去中国科技大学读研究生,考试时由于单墀基础扎实,毕业后一直在南京女子中学任教,所以按部就班,从前往后答,而李克正当时是南京市的一名工人,自学成才,答题是从后往前答,先答最难的一题,风格迥然不同,所给出的奥数题解也是个性化十足.另外,现在流行的 IMO 题解,历经

多人之手已变成了雕刻后的最佳形式,用于展示很好,但用于教学或自学却不适合,有许多学生问这么巧妙的技巧是怎么想到的,我怎么想不到,容易产生挫败感,就像数学史家评价高斯一样,说他每次都是将脚手架拆去之后再将他建筑的宏伟大厦展示给其他人.使人觉得突兀,景仰之后,备受挫折.高斯这种追求完美的做法大大延误了数学的发展,使人们很难跟上他的脚步,这一点从潘承彪教授、沈永欢教授合译的《算术探讨》中可见一斑.所以我们提倡,讲思路,讲想法,表现思考过程,甚至绕点弯子,都是好的,因为它自然,贴近读者.

中国数学竞赛活动的开展与普及与中国革命的农村包围城市,星星之火可以燎原的方式迥然不同,是先在中城市取得成功后再向全国蔓延,而这种方式全赖强势人物推进,从华罗庚先生到王寿仁先生再到裘宗沪先生,以他们的威望与影响振臂一呼,应者云集,数学奥林匹克在中国终成燎原之势,他们主持编写的参考书在业内被奉为圭臬,我们必须以此为标准,所以引用会时有发生,在此表示感谢.

中国数学奥林匹克能在世界上有今天的地位,各大学的名家们起了重要的理论支持作用.北京大学的王杰教授、复旦大学的舒五昌教授、首都师范大学的梅向明教授、华东师范大学的熊斌教授、中国科学院的许以超研究员、南开大学的李成章教授、合肥工业大学的苏化明教授、杭州师范学院的赵小云教授、陕西师范大学的罗增儒教授等,他们的文章所表现的高瞻周览、探赜索隐的识力,已达到炉火纯青的地步,堪称为中国 IMO 研究的标志.如果说多样性是生物赖以生存的法则,那么百花齐放,则是数学竞赛赖以发展的基础.我们既希望看到像格罗登迪克那样为解决一批具体问题而建造大型联合机械式的宏大构思型解法,也盼望有像爱尔特希那样运用最少的工具以娴熟的技能做庖丁解牛式剖析型解法出现.为此本书广为引证,也向各位提供原创解法的专家学者致以谢意.

编者为了图“文无遗珠”的效果,大量参考了多家书刊杂志中发表的解法,也向他们表示谢意.

特别要感谢湖南理工大学的周持中教授、长沙铁道学院的肖果能教授、广州大学的吴伟朝教授以及顾可敬先生.他们四位的长篇推广文章读之,使我不能不三叹而三致意,收入本书使之增色不少.

最后要说的是由于编者先天不备,后天不足,斗胆尝试,徒见笑于方家.

哲学家休谟在写自传的时候,曾有一句话讲得颇好:“一

个人写自己的生平时,如果说得太多,总是免不了虚荣的。”这句话同样也适合于一本书的前言,写多了难免自夸,就此打住是明智之举。

刘培杰

2014年10月

目录 | Contest

第一编 第 6 届国际数学奥林匹克

1

第 6 届国际数学奥林匹克题解·····	3
第 6 届国际数学奥林匹克英文原题·····	16
第 6 届国际数学奥林匹克各国成绩表·····	18

第二编 第 7 届国际数学奥林匹克

19

第 7 届国际数学奥林匹克题解·····	21
第 7 届国际数学奥林匹克英文原题·····	39
第 7 届国际数学奥林匹克各国成绩表·····	41

第三编 第 8 届国际数学奥林匹克

43

第 8 届国际数学奥林匹克题解·····	45
第 8 届国际数学奥林匹克英文原题·····	55
第 8 届国际数学奥林匹克各国成绩表·····	57

第四编 第 9 届国际数学奥林匹克

59

第 9 届国际数学奥林匹克题解·····	61
第 9 届国际数学奥林匹克英文原题·····	74
第 9 届国际数学奥林匹克各国成绩表·····	76

第五编 第 10 届国际数学奥林匹克

77

第 10 届国际数学奥林匹克题解·····	79
第 10 届国际数学奥林匹克英文原题·····	91
第 10 届国际数学奥林匹克各国成绩表·····	93

第六编 第 1~10 届国际数学奥林匹克预选题

95

第 1~8 届国际数学奥林匹克一些预选题·····	97
第 9 届国际数学奥林匹克预选题及解答·····	103

第 10 届国际数学奥林匹克预选题及解答	127
----------------------------	-----

附录 IMO 背景介绍

139

第 1 章 引言	141
第 1 节 国际数学奥林匹克	141
第 2 节 IMO 竞赛	142
第 2 章 基本概念和事实	143
第 1 节 代数	143
第 2 节 分析	147
第 3 节 几何	148
第 4 节 数论	154
第 5 节 组合	157

参考文献

161

后记

169

第一编
第6届国际数学奥林匹克

第6届国际数学奥林匹克题解

苏联, 1964

捷克斯洛伐克命题

- 1** (1) 求所有的正整数 n , 使得 $2^n - 1$ 能被 7 整除;
 (2) 证明: 对于任何正整数 n , $2^n + 1$ 不能被 7 整除.

解法 1 (1) 任何一个正整数 n , 皆可写成 $3m + k$ 形式, 其中 $k = 0, 1, 2$. 因为

$$2^3 \equiv 1 \pmod{7}$$

故 $2^{3m} \equiv 1 \pmod{7}$

从而知当 $n = 3m$ 时, $2^n - 1$ 能被 7 整除.

又因

$$2^{3m+1} \equiv 2 \pmod{7}, 2^{3m+2} \equiv 4 \pmod{7}$$

故仅当 $n = 3m$ 时, $2^n - 1$ 能被 7 整除.

(2) 自(1)知, 对于所有正整数 n , 2^n 除以 7 时其余数为 1, 2 或 4. 故

$$2^n + 1 \equiv 2, 3, 5 \pmod{7}$$

这就是说 $2^n + 1$ 不能被 7 整除.

解法 2 (1) 若 m 是正整数或零, 则

$$2^{3m} = (2^3)^m = (7+1)^m =$$

$$7^m + C_m^1 \cdot 7^{m-1} + C_m^2 \cdot 7^{m-2} + \dots + C_m^{m-1} \cdot 7 + 1 =$$

$$7M_0 + 1, M_0 \in \mathbf{N}$$

由此

$$2^{3m+1} = 2 \cdot 2^{3m} = 2(7M_0 + 1) = 7M_1 + 2, M_1 \in \mathbf{N}$$

$$2^{3m+2} = 4 \cdot 2^{3m} = 4(7M_0 + 1) = 7M_2 + 4, M_2 \in \mathbf{N}$$

所以

$$2^n - 1 = \begin{cases} 7M_0, & \text{当 } n = 3m \text{ 时} \\ 7M_1 + 1, & \text{当 } n = 3m + 1 \text{ 时} \\ 7M_2 + 3, & \text{当 } n = 3m + 2 \text{ 时} \end{cases}$$

故当且仅当 n 是 3 的倍数时, $2^n - 1$ 能被 7 整除.

(2) 因为

$$2^n + 1 = \begin{cases} 7M_0 + 2, & \text{当 } n = 3m \text{ 时} \\ 7M_1 + 3, & \text{当 } n = 3m + 1 \text{ 时} \\ 7M_2 + 5, & \text{当 } n = 3m + 2 \text{ 时} \end{cases}$$

所以对于所有的正整数 n , $2^n + 1$ 都不能被 7 整除.

2 设 a, b, c 是任一三角形三边的长度, 求证

$$a^2(b+c-a) + b^2(c+a-b) + c^2(a+b-c) \leq 3abc$$

匈牙利命题

证法 1 令

$$b+c-a=x, c+a-b=y, a+b-c=z \quad ①$$

因三角形两边长度之和大于第三边的长度, 故 x, y, z 皆取正值, 而且

$$\frac{1}{2}(x+y)=c, \frac{1}{2}(y+z)=a, \frac{1}{2}(z+x)=b$$

因算术中项不小于几何中项, 故知

$$\frac{1}{8}(x+y)(y+z)(z+x) \geq \sqrt{xy} \cdot \sqrt{yz} \cdot \sqrt{zx} = xyz$$

所以

$$abc \geq (b+c-a)(c+a-b)(a+b-c) \quad ②$$

但不等式 ② 的右边等于

$$\begin{aligned} & (b+c-a)[a^2 - (b-c)^2] = \\ & a^2(b+c-a) - (b^2 - c^2)(b-c) + a(b-c)^2 = \\ & a^2(b+c-a) - (b-c)[(b^2 - c^2) - a(b-c)] = \\ & a^2(b+c-a) + b^2(c+a-b) + c^2(a+b-c) - 2abc \end{aligned}$$

从而得到求证的不等式.

证法 2 设 $a \leq b \leq c$, 则

$$c-a \geq b-a \geq 0 \Rightarrow$$

$$c(c-b)(c-a) \geq b(c-b)(b-a) \geq 0$$

左边加 $a(a-b)(a-c)$ (这个数大于等于 0), 得

$$a(a-b)(a-c) + c(c-b)(c-a) + b(b-c)(b-a) \geq 0 \Rightarrow$$

$$a^3 + b^3 + c^3 - a^2(b+c) - b^2(c+a) - c^2(a+b) + 3abc \geq 0 \Rightarrow$$

$$a^2(b+c-a) + b^2(c+a-b) + c^2(a+b-c) \leq 3abc$$

证法 3 把求证的不等式的左边改写成

$$a(b^2 + c^2 - a^2) + b(c^2 + a^2 - b^2) + c(a^2 + b^2 - c^2)$$

应用余弦定理, 上式等于

$$\begin{aligned} & a(2bc \cdot \cos A) + b(2ca \cdot \cos B) + c(2ab \cdot \cos C) = \\ & 2abc(\cos A + \cos B + \cos C) \end{aligned}$$

假如任一角 C 是固定的, 则 $\sin \frac{C}{2}$ 的值也是固定的. 故

$$\cos A + \cos B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \cdot \cos \frac{A-B}{2} = 2 \sin \frac{C}{2} \cdot \cos \frac{A-B}{2}$$

当 $\cos \frac{A-B}{2} = 1$, 即 $A=B$ 时为最大. 从而可知 $\cos A + \cos B + \cos C$ 的值, 当 $A=B=C=60^\circ$ 时为最大. 这时

$$\cos A + \cos B + \cos C = 3 \cos 60^\circ = \frac{3}{2}$$

故 $a^2(b+c-a) + b^2(c+a-b) + c^2(a+b-c) \leq 3abc$

证法 4 对于任意实数 a, b, c , 有

$$(a-b)^2 \geq 0, (b-c)^2 \geq 0, (c-a)^2 \geq 0$$

又因 a, b, c 是某一三角形三边之长, 所以有

$$b+c-a > 0, c+a-b > 0, a+b-c > 0$$

从而可得

$$(b-c)^2(b+c-a) \geq 0$$

$$(c-a)^2(c+a-b) \geq 0$$

$$(a-b)^2(a+b-c) \geq 0$$

将这三个不等式两边分别相加, 得

$$(b-c)^2(b+c-a) + (c-a)^2(c+a-b) + (a-b)^2(a+b-c) \geq 0$$

即 $6abc - 2a^2(b+c-a) - 2b^2(a+c-b) - 2c^2(a+b-c) \geq 0$

得 $a^2(b+c-a) + b^2(c+a-b) + c^2(a+b-c) \leq 3abc$

证法 5 不失一般性, 设 $a \geq b \geq c$, 且 $a = b + m, c = b - n$, 其中, $m \geq 0, n \geq 0$. 因而只需证

$$(b+m)^2(b-m-n) + b^2(b+m-n) +$$

$$(b-n)^2(b+m+n) \leq 3(b+m)b(b-n)$$

或 $b(m^2 + mn + n^2) + (m+n)(m^2 - n^2) \geq 0$

若 $m > n$, 上面的不等式显然成立;

若 $m \leq n$, 由 $a - c < b$ 或 $m + n < b$ 得

$$(n^2 - m^2)[b - (m + n)] + b(2m^2 + mn) \geq 0$$

$$b(2m^2 + mn) + b(n^2 - m^2) - (m + n)(n^2 - m^2) \geq 0$$

$$b(m^2 + mn + n^2) + (m + n)(m^2 - n^2) \geq 0$$

故 $a^2(b+c-a) + b^2(c+a-b) + c^2(a+b-c) \leq 3abc$

3 设圆 I 是 $\triangle ABC$ 的内切圆, 作三条分别平行于三角形各边的圆 I 的切线, 这三条切线在三角形内截得三个新三角形, 然后再作每个新三角形的内切圆. 求这四个内切圆的面积的和 (用 $\triangle ABC$ 三边的长度表示所求的面积).

解法 1 如图 6.1 所示, 在 $\triangle ABC$ 内作 $A_1A_2 \parallel BC, C_1C_2 \parallel AB, B_1B_2 \parallel CA$. 以 r, r_1, r_2, r_3 分别表示 $\triangle ABC, \triangle AA_1A_2, \triangle BB_1B_2, \triangle CC_1C_2$ 的内切圆的半径, a, b, c 表示 $\triangle ABC$ 三边的长度, h_a, h_b, h_c 表示对应高, s 表示半周长. 则 $\triangle ABC$ 的面积

$$S_{\triangle ABC} = rs = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c$$

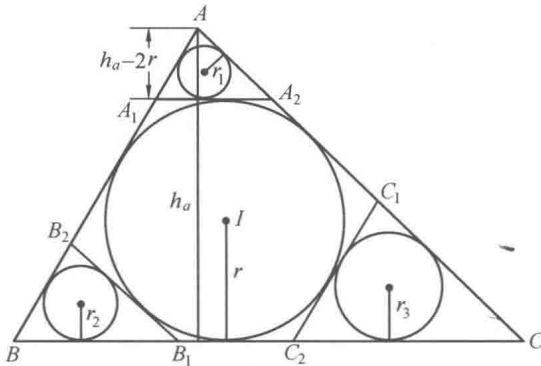


图 6.1

因为
$$\frac{r_1}{r} = \frac{h_a - 2r}{h_a} = 1 - \frac{2r}{h_a} = 1 - \frac{a}{s}$$

所以
$$r_1 = \left(1 - \frac{a}{s}\right)r$$

同理
$$r_2 = \left(1 - \frac{b}{s}\right)r, r_3 = \left(1 - \frac{c}{s}\right)r$$

所以所求的面积和等于

$$\begin{aligned} \pi(r^2 + r_1^2 + r_2^2 + r_3^2) &= \pi r^2 \left[1 + \left(1 - \frac{a}{s}\right)^2 + \left(1 - \frac{b}{s}\right)^2 + \right. \\ &\quad \left. \left(1 - \frac{c}{s}\right)^2 \right] = \pi r^2 \left[4 - \frac{2(a+b+c)}{s} + \right. \\ &\quad \left. \frac{a^2 + b^2 + c^2}{s^2} \right] = \frac{\pi r^2}{s^2} (a^2 + b^2 + c^2) \end{aligned}$$

但
$$r = \frac{S_{\triangle ABC}}{s} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$$

代入上式可得所求的面积和等于

$$\frac{\pi(s-a)(s-b)(s-c)(a^2 + b^2 + c^2)}{s^3}$$

解法 2 用 $\Delta, s, \Delta_1, s_1, \Delta_2, s_2, \Delta_3, s_3$ 分别表示 $\triangle ABC$, $\triangle AB_1C_1, \triangle A_2BC_2, \triangle A_3B_3C$ 的面积和半周长.

因为 $\triangle A_3B_3C \sim \triangle ABC$, 所以

$$\frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{s_3^2}{s^2}, \Delta_3 = \frac{s_3^2 \Delta}{s^2}$$

由此, $\triangle A_3B_3C$ 的内切圆面积为

$$\frac{\pi \Delta_3^2}{s_3^2} = \frac{\pi \cdot \frac{s_3^4 \Delta^2}{s^4}}{s_3^2} = \frac{\pi \Delta^2}{s^4} \cdot s_3^2$$

同理, $\triangle AB_1C_1$ 和 $\triangle A_2BC_2$ 的内切圆面积分别为 $\frac{\pi \Delta^2}{s^4} \cdot s_1^2$ 和

$$\frac{\pi \Delta^2}{s^4} \cdot s_2^2.$$

再注意到 $s_1 = s - a, s_2 = s - b, s_3 = s - c$, 可得题设四个圆的面积和为

$$\begin{aligned} & \frac{\pi \Delta^2}{s^2} + \frac{\pi \Delta^2}{s^4} \cdot s_1^2 + \frac{\pi \Delta^2}{s^4} \cdot s_2^2 + \frac{\pi \Delta^2}{s^4} \cdot s_3^2 = \\ & \frac{\pi \Delta^2}{s^4} (s^2 + s_1^2 + s_2^2 + s_3^2) = \\ & \frac{\pi \Delta^2}{s^4} [s^2 + (s-a)^2 + (s-b)^2 + (s-c)^2] = \\ & \frac{\pi \Delta^2}{s^4} (a^2 + b^2 + c^2) = \\ & \frac{\pi (s-a)(s-b)(s-c)(a^2 + b^2 + c^2)}{s^3} \end{aligned}$$

4 十七个科学家中每一个和其余十六个通信, 在他们的通信中所讨论的仅有三个问题, 而任两个科学家通信时所讨论的是同一个问题.

证明: 至少有三个科学家通信时所讨论的是同一个问题.

匈牙利命题

证明 设 A 是这十七个科学家之一. 因为所讨论的问题仅有三个, 所以根据抽屉原则, 他和其他十六个中至少和六个科学家讨论同一个问题. 不妨设这六个科学家是 B, C, D, E, F, G, 而所讨论的是问题甲.

如果在 B, C, D, E, F, G 这六个科学家中有二人所讨论的也是问题甲, 则结论已成立. 否则他们之间所讨论的是另外两个问题. 这样, B 至少和三个科学家讨论同一个问题. 不妨设这三个科学家为 C, D, E, 而所讨论的是问题乙.

如果在 C, D, E 中有二人所讨论的也是问题乙, 则结论成立. 否则他们之间所讨论的只能是所剩下的问题丙, 所以结论也成立.

5 在平面上给定五点,其中两两连线互不平行,互不垂直,也互不重合.今过其中每一点作与其余各点连线的垂线.试问若不计已知的五点,这些垂线的交点最多能有多少?

解法 1 设 A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 是所给定的五点.先考虑过点 A_1 和过点 A_2 所作的垂线.就点 A_1 来说,可作其余四点的 $C_4^2 = 6$ 条连线的垂线;就点 A_2 来说,亦可作其余四点的 6 条连线的垂线.在这两组垂线上,除同垂直于 A_3A_4, A_4A_5, A_5A_3 的三对直线因互相平行而没有交点外,共有 $6 \times 6 - 3 = 33$ 个交点.

从五点中任取两点,共有 $C_5^2 = 10$ 种取法.因此交点的总数不多于 $10 \times 33 = 330$.

从五点中任取三点作三角形,共有 $C_5^3 = 10$ 种取法.这些点在前面计算三次.故交点的总数不多于 $330 - 2 \times 10 = 310$.

解法 2 从某一已知点与由其余四点两两联结所得的直线作垂线,由于四点中每两点连线有 $C_4^2 = 6$ 条,所以从某一已知点向这些直线作垂线共有 6 条,五个点总共可作 $5 \times 6 = 30$ 条垂线.

这 30 条垂线,如果两两相交于不同的点,则“交点”的个数为

$$C_{30}^2 = 435$$

但是,这些垂线中有些是不相交(平行)的,有些是相交于同一点甚至交于已知点的,对于这些情况应从上面的个数中除去.

对于联结任意两点的一条直线,其余三点向这条直线所作的三条垂线互相平行,它们两两的交点不存在,所以对每条这样的直线,上面多计入的“交点”有 $C_3^2 = 3$ 个,而这样的直线有 $C_5^2 = 10$ 条,所以总共应除去这样“交点”的个数为

$$10 \times 3 = 30$$

五个已知点中任意三点组成一个三角形,从这三点中任意一点向其他两点连线所作的三条垂线是这个三角形的三条高,它们实际上只交于一点,所以对每一个三角形多计入了 $(C_3^2 - 1) = 3 - 1 = 2$ 个“交点”,而这样的三角形有 $C_5^3 = 10$ 个,所以总共应除去这样“交点”的个数为

$$2 \times 10 = 20$$

从五个已知点中的任意一点作其余四点两两连线的垂线有 $C_4^2 = 6$ 条,这六条垂线都相交于这个已知点,所以对每一个已知点来说,上面多计算的“交点”有 $C_6^2 = 15$ 个,五个已知点总共应除去这样交点(重合于已知点)的个数为

$$5 \times 15 = 75$$