



国家出版基金资助项目

现代数学中的著名定理纵横谈丛书
丛书主编 王梓坤

DIRICHLET PROBLEMS

Dirichlet 问题

刘培杰 主编



哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS



国家出版基金资助项目

现代数学中的著名定理纵横谈丛书
丛书主编 王梓坤

DIRICHLET PROBLEMS

Dirichlet 问题

刘培杰 主编



哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内 容 提 要

本书是对迪利克雷问题的历史及与数学各分支的联系和最新研究进展所做的回顾与综述,对从事高等数学学习和研究的大学师生是一种寓教于史的新的尝试.

图书在版编目(CIP)数据

Dirichlet 问题/刘培杰主编. —哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2016.6

(现代数学中的著名定理纵横谈丛书)

ISBN 978-7-5603-5852-9

I. ①D… II. ①刘… III. ①解析数论—研究
IV. O156.4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 022898 号

策划编辑 刘培杰 张永芹
责任编辑 张永芹 杜莹雪 刘春雷
 聂兆慈 刘立娟 李宏艳
封面设计 孙茵艾
出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社 址 哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 邮编 150006
传 真 0451-86414749
网 址 <http://hitpress.hit.edu.cn>
印 刷 牡丹江邮电印务有限公司
开 本 787mm×960mm 1/16 印张 78.25 字数 806 千字
版 次 2016 年 6 月第 1 版 2016 年 6 月第 1 次印刷
书 号 ISBN 978-7-5603-5852-9
定 价 198.00 元

(如因印装质量问题影响阅读,我社负责调换)

◎
代

序

读书的乐趣

你最喜爱什么——书籍。

你经常去哪里——书店。

你最大的乐趣是什么——读书。

这是友人提出的问题和我的回答。

真的,我这一辈子算是和书籍,特别是好书结下了不解之缘。有人说,读书要费那么大的劲,又发不了财,读它做什么?我却至今不悔,不仅不悔,反而情趣越来越浓。想当年,我也曾爱打球,也曾爱下棋,对操琴也有兴趣,还登台伴奏过。但后来却都一一断交,“终身不复鼓琴”。那原因便是怕花费时间,玩物丧志,误了我的大事——求学。这当然过激了一些。剩下来唯有读书一事,自幼至今,无日少废,谓之书痴也可,谓之书橱也可,管它呢,人各有志,不可相强。我的一生大志,便是教书,而当教师,不多读书是不行的。

读好书是一种乐趣,一种情操;一种向全世界古往今来的伟人和名人求

教的方法,一种和他们展开讨论的方式;一封出席各种社会、体验各种生活、结识各种人物的邀请信;一张迈进科学宫殿和未知世界的入场券;一股改造自己、丰富自己的强大力量.书籍是全人类有史以来共同创造的财富,是永不枯竭的智慧的源泉.失意时读书,可以使人重整旗鼓;得意时读书,可以使人头脑清醒;疑难时读书,可以得到解答或启示;年轻人读书,可明奋进之道;年老人读书,能知健神之理.浩浩乎!洋洋乎!如临大海,或波涛汹涌,或清风微拂,取之不尽,用之不竭.吾于读书,无疑义矣,三日不读,则头脑麻木,心摇摇无主.

潜能需要激发

我和书籍结缘,开始于一次非常偶然的机.大概是八九岁吧,家里穷得揭不开锅,我每天从早到晚都要去田园里帮工.一天,偶然从旧木柜阴湿的角落里,找到一本蜡光纸的小书,自然很破了.屋内光线暗淡,又是黄昏时分,只好拿到大门外去看.封面已经脱落,扉页上写的是《薛仁贵征东》.管它呢,且往下看.第一回的标题已忘记,只是那首开卷诗不知为什么至今仍记忆犹新:

日出遥遥一点红,飘飘四海影无踪.

三岁孩童千两价,保主跨海去征东.

第一句指山东,二、三两句分别点出薛仁贵(雪、人贵).那时识字很少,半看半猜,居然引起了极大的兴趣,同时也教我认识了许多生字.这是我有生以来独立看的第一本书.尝到甜头以后,我便千方百计去找书,向小朋友借,到亲友家找,居然断断续续看了《薛丁山征西》《彭公案》《二度梅》等,樊梨花便成了我心

中的女英雄。我真入迷了。从此，放牛也罢，车水也罢，我总要带一本书，还练出了边走田间小路边读书的本领，读得津津有味，不知人间别有他事。

当我们安静下来回想往事时，往往会发现一些偶然的小事却影响了自己的一生。如果不是找到那本《薛仁贵征东》，我的好学心也许激发不起来。我这一生，也许会走另一条路。人的潜能，好比一座汽油库，星星之火，可以使它雷声隆隆、光照天地；但若少了这粒火星，它便会成为一潭死水，永归沉寂。

抄，总抄得起

好不容易上了中学，做完功课还有点时间，便常光顾图书馆。好书借了实在舍不得还，但买不到也买不起，便下决心动手抄书。抄，总抄得起。我抄过林语堂写的《高级英文法》，抄过英文的《英文典大全》，还抄过《孙子兵法》，这本书实在爱得狠了，竟一口气抄了两份。人们虽知抄书之苦，未知抄书之益，抄完毫末俱见，一览无余，胜读十遍。

始于精于一，返于精于博

关于康有为的教学法，他的弟子梁启超说：“康先生之教，专标专精、涉猎二条，无专精则不能成，无涉猎则不能通也。”可见康有为强烈要求学生把专精和广博（即“涉猎”）相结合。

在先后次序上，我认为要从精于一开始。首先应集中精力学好专业，并在专业的科研中做出成绩，然后逐步扩大领域，力求多方面的精。年轻时，我曾精读杜布（J. L. Doob）的《随机过程论》，哈尔莫斯（P. R. Halmos）的《测度论》等世界数学名著，使我终身受益。简言之，即“始于精于一，返于精于博”。正如中国革命一

样,必须先有一块根据地,站稳后再开创几块,最后连成一片.

丰富我文采,澡雪我精神

辛苦了一周,人相当疲劳了,每到星期六,我便到旧书店走走,这已成为生活中的一部分,多年如此.一次,偶然看到一套《纲鉴易知录》,编者之一便是选编《古文观止》的吴楚材.这部书提纲挈领地讲中国历史,上自盘古氏,直到明末,记事简明,文字古雅,又富于故事性,便把这部书从头到尾读了一遍.从此启发了我读史书的兴趣.

我爱读中国的古典小说,例如《三国演义》和《东周列国志》.我常对人说,这两部书简直是世界上政治阴谋诡计大全.即以近年来极时髦的人质问题(伊朗人质、劫机人质等),这些书中早就有了,秦始皇的父亲便是受害者,堪称“人质之父”.

《庄子》超尘绝俗,不屑于名利.其中“秋水”“解牛”诸篇,诚绝唱也.《论语》束身严谨,勇于面世,“己所不欲,勿施于人”,有长者之风.司马迁的《报任少卿书》,读之我心两伤,既伤少卿,又伤司马;我不知道少卿是否收到这封信,希望有人做点研究.我也爱读鲁迅的杂文,果戈理、梅里美的小说.我非常敬重文天祥、秋瑾的人品,常记他们的诗句:“人生自古谁无死,留取丹心照汗青”“谁言女子非英物,夜夜龙泉壁上鸣”.唐诗、宋词、《西厢记》《牡丹亭》,丰富我文采,澡雪我精神,其中精粹,实是人间神品.

读了邓拓的《燕山夜话》,既叹服其广博,也使我动了写《科学发现纵横谈》的心.不料这本小册子竟给我招来了上千封鼓励信.以后人们便写出了许许多多

的“纵横谈”。

从学生时代起,我就喜读方法论方面的论著。我想,做什么事情都要讲究方法,追求效率、效果和效益,方法好能事半功倍。我很留心一些著名科学家、文学家写的心得体会和经验。我曾惊讶为什么巴尔扎克在51年短短的一生中能写出上百本书,并从他的传记中去寻找答案。文史哲和科学的海洋无边无际,先哲们的明智之光沐浴着人们的心灵,我衷心感谢他们的恩惠。

读书的另一面

以上我谈了读书的好处,现在要回过头来说说事情的另一面。

读书要选择。世上有各种各样的书:有的不值一看,有的只看20分钟,有的可看5年,有的可保存一辈子,有的将永远不朽。即使是不朽的超级名著,由于我们的精力与时间有限,也必须加以选择。决不要看坏书,对一般书,要学会速读。

读书要多思考。应该想想,作者说得对吗?完全吗?适合今天的情况吗?从书本中迅速获得效果的好办法是有的放矢地读书,带着问题去读,或偏重某一方面去读。这时我们的思维处于主动寻找的地位,就像猎人追找猎物一样主动,很快就能找到答案,或者发现书中的问题。

有的书浏览即止,有的要读出声来,有的要心头记住,有的要笔头记录。对重要的专业书或名著,要勤做笔记,“不动笔墨不读书”。动脑加动手,手脑并用,既可加深理解,又可避忘备查,特别是自己的灵感,更要及时抓住。清代章学诚在《文史通义》中说:“札记之功必不可少,如不札记,则无穷妙绪如雨珠落大海矣。”

许多大事业、大作品，都是长期积累和短期突击相结合的产物。涓涓不息，将成江河；无此涓涓，何来江河？

爱好读书是许多伟人的共同特性，不仅学者专家如此，一些大政治家、大军事家也如此。曹操、康熙、拿破仑、毛泽东都是手不释卷，嗜书如命的人。他们的巨大成就与毕生刻苦自学密切相关。

王梓坤



◎ 前

言

迪

利克雷是数学史上的一位重要人物,在许多方面均有重要贡献.本书介绍的集中在数学物理方程中“迪利克雷原理”这一数学猜想自提出之日起,历经了三十多年的激烈论争和反复,最终才被确立.这是迪利克雷在研究微分方程位势原理时提出的一个猜想,其具体内容简单地讲大体是:极小化迪利克雷积分

$$\iint \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right\} dx dy$$

的函数 u , 满足位势方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

后来有人在研究三维位势方程(亦称拉普拉斯方程或调和方程)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

时,又提出由位势方程所描述的相应物理状态总有一个确定的物理解,因而其

本身也必然存在一个数学解.但在数学上的这种存在性,长时间的不能被证明,直到 1851 年,黎曼才在他的博士论文“单复变函数一般理论的基础”中,给出了位势方程边界问题解的存在性证明.由于黎曼在文中运用了他的老师迪利克雷所提出的上述猜想,故他称之为“迪利克雷原理”.可是,在其论文发表后的不长时间,这个原理便激起了热烈的讨论,特别是黎曼的这一证明受到了德国著名数学家魏尔斯特拉斯(K. W. Weierstrass, 1815—1897)的尖锐批评,他指出:黎曼不加证明就先验地假定一定会存在一个使积分取到极小值的函数,这在数学上是不允许的.尽管受到了大师的批评,黎曼并没有因此动摇自己对迪利克雷原理的信心,并且一鼓作气又运用此原理做出了一系列重要的发现.1866 年,黎曼英年早逝,但关于迪利克雷原理是否成立的论争仍未停止.1870 年,魏尔斯特拉斯给出了一个与迪利克雷原理相反的例子,在这个例子中,对给定的边界条件,使迪利克雷积分达到极小值的函数是不存在的,并以此来否定迪利克雷原理.由于迪利克雷原理被当时的数学权威魏尔斯特拉斯所否定,所以数学家们便只好另辟蹊径来证明位势方程边界问题解的存在性,比较著名的有三种证法:1870 年纽曼用“算术平均值法”给出了一个证明;1890 年,许瓦兹用“交替法”又给出了一个证明;同年,庞加莱用“扫散法”也给出了一个证明.这些证明从逻辑上讲无疑都是对的,但就是没有一个能够像以迪利克雷原理为工具那样简单、明快,这又不禁使得数学家们怀念起“迪利克雷原理”来,都对它当年被否定而感到惋惜,并随之产生了复活这一原理的念头,并且也为之做出了一些努

力,只可惜都未能成功,数学界为此弥漫着一种悲观的气氛,数学家纽曼就表示:如此美而又有如此广阔应用前景的迪利克雷原理,已经从我们的视线中“永远消失”掉了!

俗话说“三十年河东,三十年河西”,就在迪利克雷原理被否定三十年之后,即 1899 年,德国领袖数学家希尔伯特对此又发动了一场新的“救亡运动”,他彻底冲破了那种把严格性与简单性对立起来的传统观念,批判了魏尔斯特拉斯以严格性全盘否定迪利克雷原理的作法,并从迪利克雷原理的简单性、优美性以及应用的有效性出发,积极寻求它的真实性和合理性,最后终于找到了证明迪利克雷原理的途径和方法.他在德国数学联合会报告了他的这一研究成果,并明确指出:只要对问题中的区域、边界值和允许函数的性质作适当的限制,就完全可以恢复迪利克雷原理的真实性.他还针对数学家们认为迪利克雷原理早已沉没了的观点,意味深长地将他的这一研究工作称为“迪利克雷原理的复活”.后来希尔伯特又给出一个更为一般的证明,从而进一步肯定了迪利克雷原理存在的合理性.

在数学发展史上,虚数的出现充满着戏剧性,几位数学大师对虚数的评价也各有千秋,如意大利的卡尔丹(Cardan, 1501—1576)说:“(虚数是)又精致又不中用.”法国的笛卡儿(Descartes, 1596—1650)说:“虚数是不可思议的.”德国的莱布尼兹(Leibniz, 1646—1716)则说:“虚数是神灵美妙与神奇的避难所.”最有趣的要数瑞士的欧拉(Euler, 1707—1783),他说:“虚数既不是什么都不是,也不比什么都不是多些什么,更不比什么都不是少些什么,它们纯属虚构.”

以上的评价都颇具大家风范,既玄妙,又滴水不漏,串联起来借用一下其句式作为本书特点的介绍:这本书是既精彩又不中用,以通常的著书方式看是不可思议的.这本书是天才情结与英雄崇拜的混合体.这本书既不是什么都不是,也不比什么都不是多些什么,更不比什么都不是少些什么,它纯属不伦不类.

这是一部“啥也不是”的书.

这样说一是因为虽然它叙述了一个数学天才少年的获奖事件,但它并不是报告文学;虽然它探讨了数学天才的成长方式,但它并不是教育文集;虽然它涉及众多的著名数学家,但它不是数学家传记;虽然它包含了美国数学竞赛与数学天赋测试题,但它并不是奥数题集;虽然它横贯了若干现代数学分支,但它并不是数学专著.

二是因为它涉及太广难以归类,它既是方程又是分析,既是复变又是泛函,既是代数又是数论,既是概率又是几何,既是经典数学又是现代数学,既是纯粹数学又是应用数学.既可应用于飞机制造,又可应用于鼓声识别;既可应用于天体物理,又可应用于医疗器械.

至于为什么故意将一本书“制造”成如此不伦不类,其指导思想如下:

据波士顿咨询公司创始人布鲁斯·亨德森教授当年撰文称,1934年,莫斯科大学的一位科学家高斯(C. F. Gauss)曾经作过如下的一系列比较实验:把两个非常小的动物(原生物)放在一个瓶子里,给予适量食物.如果二者是不同类的动物,它们可以共同生存下

去;如果它们来自同类,则无法共生.高斯于是得出了“竞争性排他原理”:两个活法相同的物种不可能持久共生.亨氏将此原理引入商业竞争之中,提出了 uniqueness(独特性)的概念,即要想生存就必须与众不同.

不伦不类或许也是一种独特,但更是一种无奈.目前数学类图书市场被三大类图书所占据:一曰专著类,其作者皆为学界泰斗或学术新贵,其规模多为高文大册,其内容皆壁立千仞常人难及.二曰教材类,其作者皆为明星教授,学界大佬,具振臂一挥,应者云集之影响力,其出身皆为名门,其封面多标注以“十 X 五”系列,非圈内人士断难分其一杯羹.三曰科普类,其籍贯皆为欧美,其作者皆学富五车,精数学兼通文史哲.其旁征博引,妙语连珠,一般人难望其项背.

以此分析似乎会得出数学书不可为的结论,但知其不可为而为之是进取之道,要有为就必须避重就轻,避实就虚.别家内容求专,我们就求广,别家文理分开,我们就文理合一,别家初高另设,我们就熔于一炉,别家仅限一家之言,我们就博采众长.总之,“逆反”与“另类”是这本书的两大特征,虽然,这可能很难让人接受,有一种大杂烩的感觉,但这是我们的刻意而为.南宋姜夔论诗,说:

“作者求与古人合,不若求与古人异,求与古人异,不若不求与古人合而不能不合,不求与古人异而不能不异.彼惟有见乎诗也,故向也求与古人合,今也求与古人异,及其无见乎诗已,故不求与古人合而不能不合,不求与古人异而不能不异.其来如风,其止如雨,如

印印泥,如水在器,其苏子所谓不能不为者乎?”

(《白石诗集,自叙二》)

但这种汇集稍有不慎会有堆砌之感,这是大忌.中国物理学泰斗吴大猷对此种无骨架的陈列曾表示过担忧与不满,他说:

“写(物理)发展史是一件费力而不讨好的事.写发展史总不能是巨细不分地编写电话簿,如对发展一个‘学系’或研究单位.若对‘发展的方向’‘人才的评估’‘设备的计划’等均无高明评估,对成果无公允评量,则此等叙述是无价值的!看电话簿是难对其国家社会得到有意义的正确了解的.”

(吴大猷述.黄伟彦、叶铭汉、戴念祖整理.柳怀祖编.早期中国物理发展之回忆.上海:上海科学技术出版社,2006)

基于以上原因,本书充其量只能是供“小众”传播的矿石原料,美国《时代》杂志估计在未来10年内随科技发展,会产生10种吃香行业,其中之一为“资料矿工”,他们负责从如山的资料中寻找有用的东西.如果是全社会都感兴趣的话题倒也值得,关键是怕只有极少数人对此感兴趣,所以我们只好充当“小众传播人”为他提供个性化的资讯,这就是本书的目的.如果说还有更进一步的野心,那么我们还希望编成一部数学概念思想史,因为怀特海说:

“甚至一直到现在,数学作为思想史中的一个要素

来说,实际上应占有什么地位,人们的理解也还是摇摆不定.假如有人说:编著一部思想史而不深刻研究每一个时代的数学概念,就等于是《哈姆雷特》这一剧本中去掉了哈姆雷特这一角色.这种说法也许太过分了,我不愿说得这样过火.但这样做却肯定地等于是把奥菲莉这一角色去掉了.这个比喻是非常确切的.奥菲莉对整个剧情来说,是非常重要的,她非常迷人,同时又有一点疯疯癫癫,我们不妨认为数学的研究是人类性灵的一种神圣的疯癫,是对咄咄逼人的世事的一种逃避.”

(A·N·怀特海.科学与近代世界.向钦,译.北京:商务印书馆,1989)

提到思想史就不能不涉及人物.

本书的主人公之一,德国著名数学家迪利克雷是一个被数学史家低估了的人物.他是高斯和黎曼之间最伟大的数学家之一,但是他的名声往往被这两位数学家所掩盖,没有得到应有的注意(生活在伟人出没的时代对平凡人是一种幸运,但对另一个伟人的人生却是一个悲剧).实际上他在数学研究的深度、广度及个人影响方面都是巨大的.他与雅可比一起像耀眼的双星照亮了整个德国数学界,彻底扭转了德国数学在教学与研究上的落后局面,开创了德国数学在其后 100 年的领先局面.

迪利克雷作为一个邮政局长的第 7 个孩子成名于名人堆中.从 1822 年 5 月到 1826 年秋天他居住在巴黎,在法兰西学院及巴黎大学理学院听课,结识了拉克

Dirichlet 问题

鲁瓦、傅里叶及泊松(这似乎与迪利克雷在分析方面的工作方向有某种联系). 1823 年夏, 他被福瓦将军聘为家庭教师. 1825 年夏, 他结识了亚历山大·冯·洪堡, 并通过他结识了许多法国著名科学家. 同年, 勒让德及拉克鲁瓦代表巴黎科学院接受了他的第一篇关于五次不定方程的论文, 他在文中证明了费马大定理 $n=5$ 的情形. 1825 年冬, 福瓦将军去世, 他离开福瓦家. 1826 年 5 月, 他致函普鲁士文化部长史泰因申请工作, 并附上亚历山大·冯·洪堡的介绍信. 1829 年夏, 他在度假时结识了雅可比, 两人结下了终身友谊, 后来在洪堡的介绍下, 他结识了著名音乐家门德尔松(Felix Mendelssohn, 1809—1847) 一家. 1832 年娶其妹瑞贝卡(Rebecca, 1811—1858) 为妻, 他的家庭成为柏林文化界的社交中心. 1855 年高斯去世后, 迪利克雷被选为高斯的继任者.

本书的另一位主要人物是皮埃尔·西蒙·拉普拉斯.

18 世纪的法兰西百科全书派设想, 用物理与力学的原理终极地解释宇宙间万事万物的日子, 已经为时不远了. 拉普拉斯就是这个充满自信时代的代表, 这个时代的特征是乐观地过高估计了新出现的物理——力学思想的能力.

拉普拉斯 1749 年生于诺曼底的昂诺日博蒙, 他的父亲小有资财. 他 16 岁时进入冈市大学, 很快就显露出数学才能. 在只有 18 岁时就被任命为巴黎军事学校的数学教授.

