21世纪高职高专通用教材

实用工程数学

蔡奎生　潘　新　主编

SHIYONG GONGCHENG SHUXUE

苏州大学出版社
Soochow University Press

21世纪高职高专通用教材

实用工程数学

主编　蔡奎生　潘　新

苏州大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

实用工程数学 / 蔡奎生，潘新主编. —苏州：苏州大学出版社，2014.7

21 世纪高职高专通用教材

ISBN 978-7-5672-0947-3

Ⅰ.①实… Ⅱ.①蔡…②潘… Ⅲ.工程数学-高等职业教育-教材 Ⅳ.①TB11

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 159698 号

内容提要

本书是编者根据多年的教学实践，为适应新形势下高职高专高等数学的教学需要而编写的. 考虑到高职高专院校学生的实际，适当降低了某些问题的理论深度，更加注重有实际应用背景的概念、方法和实例的介绍.

全书共九章，主要内容为：函数、极限与连续，导数和微分，导数的应用，积分及其应用，常微分方程与拉普拉斯变换，空间解析几何与多元函数微积分，级数，行列式与矩阵，概率与数理统计初步. 本书将不定积分和定积分统称为积分，并且将积分的定义直接和微分联系，而将不定积分的一些相关内容作为寻求原函数的方法或技巧来处理.

实用工程数学

蔡奎生　潘　新　主编

责任编辑　李　娟

苏州大学出版社出版发行

(地址：苏州市十梓街 1 号　邮编：215006)

苏州恒久印务有限公司印装

(地址：苏州市友新路 28 号东侧　邮编：215128)

开本 787×1092　1/16　印张 22.5　字数 499 千

2014 年 7 月第 1 版　2014 年 7 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-5672-0947-3　定价：40.00 元

苏州大学版图书若有印装错误，本社负责调换

苏州大学出版社营销部　电话：0512-65225020

苏州大学出版社网址 http://www.sudapress.com

《实用工程数学》编委会名单

主　编　蔡奎生　潘　新

副主编　殷冬琴　顾霞芳

编　委　蔡奎生　潘　新　殷冬琴　顾霞芳

　　　　顾莹燕　曹文斌　殷建峰　魏彦睿

编写说明

随着教育改革的不断发展，为满足高等职业教育对于数学这一基础学科的教学要求，不少高职院校和教育相关部门已积极组织编写了多种版本的高等数学教材.我们也曾组织编写了《实用经济数学》《实用微积分》《工程数学》等教材，目的也是为了适应高职教学的需要.随着高职教育的不断深入和完善，在以培养学生实践技能为主的教育理念的影响下，基础学科如何来适应这种趋势，确实是一个严峻的挑战.这一次，我们在已编写并出版的《实用微积分》《工程数学》和《工程数学基础》的基础上，组织编写了本教材.本教材的主要特点是：

(1) 力求内容简单实用，并对过去一些传统的观念进行了力度较大的改革.本书力求简化理论的叙述、推导和证明，注重实际应用.尤其是力求将微分和积分作为一个整体有机地结合起来，少走弯路；将不定积分和定积分统称为积分，并且将积分的定义直接和微分相联系，将不定积分的一些相关内容作为寻求原函数的方法或技巧来处理.上述理念得到了中科院林群院士的充分肯定.

(2) 本着"必需、够用"的原则，对于基础理论知识等方面的内容，主要给出概念的定义，对有关定理的条件和结论，一般不给出严格的推导和证明，必要时给出直观、形象的解释和说明.重点放在实际计算和应用等方面，以强化学生解决实际问题的能力.

(3) 将必修内容与选修内容有机地结合起来.教材共 9 章内容，其中，函数、极限与连续，导数和微分，导数的应用，积分及其应用属于必修内容；常微分方程与拉普拉斯变换，空间解析几何与多元函数微积分，级数，行列式与矩阵，概率与数理统计初步属于选修内容.

(4) 每章配备了本章内容小结、自测题，书末附有相关习题的参考答案，以便于学生及时对所学知识进行检验.

本书主编为蔡奎生、潘新，副主编为殷冬琴、顾霞芳，参加编写的还有曹文斌、顾莹燕、殷建峰、魏彦睿.其中，蔡奎生负责全书的总纂并编写第四章和附录，潘新编写第八章，殷冬琴编写第七章，顾霞芳编写第一章，曹文斌编写第六章，顾莹燕编写第五章，殷建峰编写第二章和第三章，魏彦睿编写第九章.

本教材的构思、企划得到了同行专家的指点和兄弟院校的大力支持，在此表示衷心的感谢！尽管我们力求完善，但书中错误和不当之处在所难免，还望各位读者、同行和专家多加批评指正.

编　者

Contents 目录

第1章 函数、极限与连续

第2章 导数和微分

第3章 导数的应用

第4章 积分及其应用

第5章 常微分方程与拉普拉斯变换

第6章 空间解析几何与多元函数微积分

第7章 级 数

第8章 行列式与矩阵

第9章 概率与数理统计初步

第 1 章

函数、极限与连续

函数是高等数学的主要研究对象，函数的极限是高等数学的重要理论基础，函数的连续性是函数的重要性质之一．本章将在复习和加深函数相关知识的基础上，学习函数的极限、连续及其有关性质，为后续内容的学习奠定基础．

§1-1　初等函数

一、函数的概念

1. 函数的定义

定义 1　设 D 是一非空实数集，如果存在一个对应法则 f，使得对 D 内的每一个值 x，按法则 f，都有唯一的实数 y 与之对应，那么这个对应法则 f 称为定义在集合 D 上的一个函数，记作

$$y=f(x),x\in D.$$

其中 x 称为**自变量**，y 称为**因变量或函数值**，D 称为**定义域**，集合 $\{y|y=f(x),x\in D\}$ 称为**值域**.

说明　(1) 构成函数的两个要素是定义域 D 及对应法则 f. 如果两个函数的定义域相同，对应法则也相同，那么这两个函数就是相同的，否则就是不同的.

(2) 函数的表示方法主要有三种：表格法（列表法）、图形法（图象法）、解析法（公式法）.

2. 几个特殊的函数

(1) 分段函数：在自变量的不同变化范围中，对应法则用不同式子来表示的函数.

分段函数的定义域是各段定义区间的并集.

例如，函数 $y=\begin{cases}3x+2, & 0<x<3,\\ x^2-1, & -2<x\leqslant 0\end{cases}$ 为分段函数，其定义域为$(-2,0]\cup(0,3)$，即$(-2,3)$.

(2) 隐函数：变量之间的关系是由一个方程来确定的函数. 例如，由方程 $x^2+y^2=1$ 确定的函数.

(3) 参数方程 $\begin{cases}x=\varphi(t),\\ y=\psi(t)\end{cases}$ $(\alpha\leqslant t\leqslant\beta)$所确定的函数，其中 t 为参数.

3. 函数的定义域

在实际问题中，函数的定义域要根据实际问题的实际意义确定. 当不考虑函数的实际

意义时，其定义域就是使得函数表达式有意义的一切实数组成的集合，这种定义域称为函数的自然定义域. 在这种约定之下，一般的用解析式表达的函数可简记为 $y=f(x)$.

常见解析式的定义域求法有：

(1) 分母不能为零；

(2) 偶次根号下非负；

(3) 对数式中的真数恒为正；

(4) 分段函数的定义域应取各分段区间定义域的并集.

例 1 求下列函数的定义域：

(1) $y=\dfrac{1}{x-2}-\sqrt{x^2-1}$； (2) $y=\lg\dfrac{x-1}{2}+\sqrt{x-3}$； (3) $y=\begin{cases}\sin x, & -1\leqslant x<2,\\ \cos x, & 2\leqslant x<3.\end{cases}$

解 (1) 要使函数有意义，必须 $x-2\neq 0$，且 $x^2-1\geqslant 0$，解不等式得 $|x|\geqslant 1$.

所以函数的定义域为 $\{x\,|\,|x|\geqslant 1$ 且 $x\neq 2\}$ 或 $(-\infty,-1]\cup[1,2)\cup(2,+\infty)$.

(2) 要使函数有意义，必须 $\begin{cases}\dfrac{x-1}{2}>0,\\ x-3\geqslant 0,\end{cases}$ 即 $x\geqslant 3$. 所以函数的定义域为 $\{x\,|\,x\geqslant 3\}$ 或 $[3,+\infty)$.

(3) 函数的定义域为 $[-1,2)\cup[2,3)=[-1,3)$.

二、初等函数

1. 基本初等函数

常数函数：$y=C$（C 为常数）；

幂函数：$y=x^{\alpha}$（$\alpha\in\mathbf{R}$）；

指数函数：$y=a^x$（$a>0$ 且 $a\neq 1$）；

对数函数：$y=\log_a x$（$a>0$ 且 $a\neq 1$）；

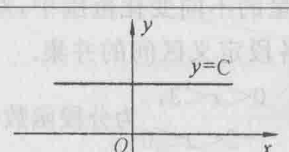
三角函数：$y=\sin x, y=\cos x, y=\tan x, y=\cot x, y=\sec x, y=\csc x$；

反三角函数：$y=\arcsin x, y=\arccos x, y=\arctan x, y=\operatorname{arccot} x$.

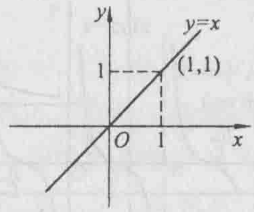
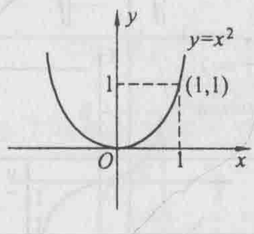
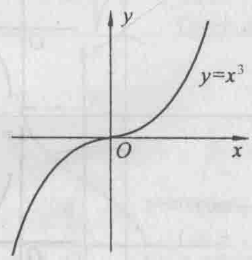
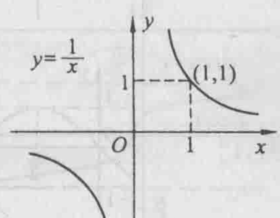
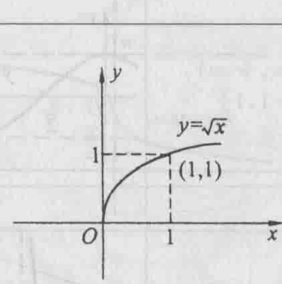
以上 6 类函数统称为基本初等函数.

为了方便，我们通常把多项式 $y=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ 也看作基本初等函数.

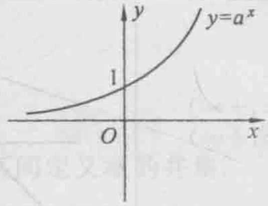
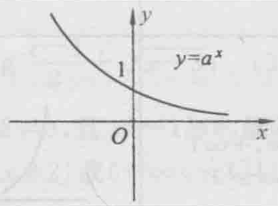
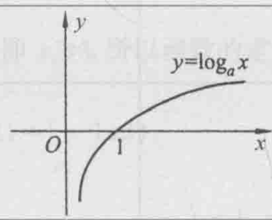
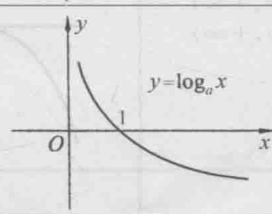
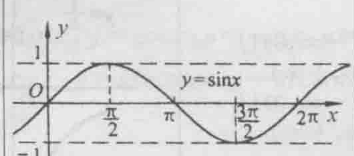
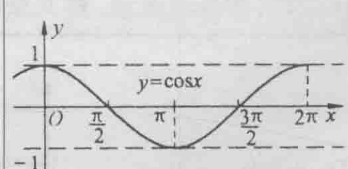
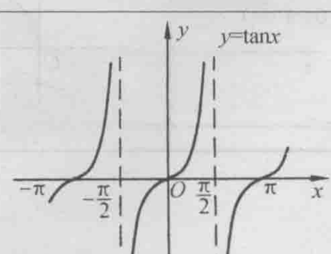
现将一些常用的基本初等函数的定义域、值域和函数特性列表说明如下：

函数类型	函数	定义域与值域	图象	特性
常数函数	$y=C$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in\{C\}$		偶函数 有界

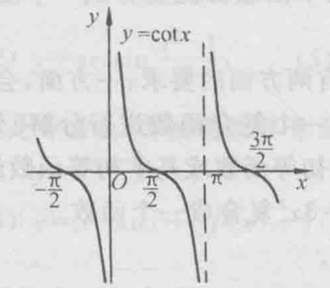
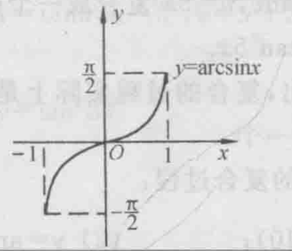
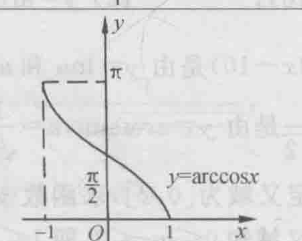
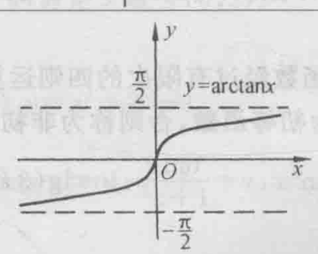
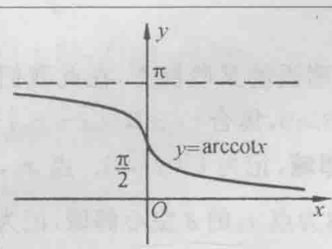
续表

函数类型	函数	定义域与值域	图　象	特　性
幂函数	$y=x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(-\infty,+\infty)$		奇函数 单调增加
	$y=x^2$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in[0,+\infty)$		偶函数 在$(0,+\infty)$上单调增加;在$(-\infty,0)$上单调减少
	$y=x^3$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(-\infty,+\infty)$		奇函数 单调增加
	$y=\frac{1}{x}$	$x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ $y\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$		奇函数 在$(-\infty,0)$上单调减少; 在$(0,+\infty)$上单调减少
	$y=\sqrt{x}$	$x\in[0,+\infty)$ $y\in[0,+\infty)$		单调增加

续表

函数类型	函数	定义域与值域	图象	特性
指数函数	$y=a^x$ $(a>1)$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(0,+\infty)$		单调增加
	$y=a^x$ $(0<a<1)$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(0,+\infty)$		单调减少
对数函数	$y=\log_a x$ $(a>1)$	$x\in(0,+\infty)$ $y\in(-\infty,+\infty)$		单调增加
	$y=\log_a x$ $(0<a<1)$	$x\in(0,+\infty)$ $y\in(-\infty,+\infty)$		单调减少
三角函数	$y=\sin x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in[-1,1]$		在$\left(2k\pi-\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$上单调增加；在$\left(2k\pi+\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{3\pi}{2}\right)$上单调减少$(k\in\mathbf{Z})$ 奇函数、有界、周期为 π
	$y=\cos x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in[-1,1]$		在$(2k\pi,2k\pi+\pi)$上单调减少；在$(2k\pi+\pi,2k\pi+2\pi)$上单调增加$(k\in\mathbf{Z})$ 偶函数 有界 周期为 2π
	$y=\tan x$	$x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$ $y\in(-\infty,+\infty)$		在$\left(k\pi-\frac{\pi}{2},k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$上单调增加$(k\in\mathbf{Z})$ 奇函数 周期为 π

续表

函数类型	函数	定义域与值域	图象	特性
	$y=\cot x$	$x\neq k\pi(k\in\mathbf{Z})$ $y\in(-\infty,+\infty)$		在$(k\pi,k\pi+\pi)$上单调减少$(k\in\mathbf{Z})$ 奇函数 周期为π
反三角函数	$y=\arcsin x$	$x\in[-1,1]$ $y\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$		单调增加 奇函数 有界
	$y=\arccos x$	$x\in[-1,1]$ $y\in[0,\pi]$		单调减少 有界
	$y=\arctan x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$		单调增加 奇函数 有界
	$y=\operatorname{arccot} x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(0,\pi)$		单调减少 有界

2. 复合函数

先看这么一个例子：考查具有同样高度 h 的圆柱体的体积 V，显然其体积的不同取决于它的底面积 S 的大小，即由公式 $V=Sh$（h 为常数）确定. 而底面积 S 的大小又由底面半径 r 确定，即公式 $S=\pi r^2$. V 是 S 的函数，S 是 r 的函数，V 与 r 之间通过 S 建立了函数关系式 $V=Sh=\pi r^2\cdot h$. 它是由函数 $V=Sh$ 与 $S=\pi r^2$ 复合而成的，简单地说 V 是 r 的复合函数.

定义 2 设 y 是 u 的函数 $y=f(u)$，而 u 又是 x 的函数 $u=\varphi(x)$，且 $\varphi(x)$ 的值域与 $f(u)$ 的定义域的交集非空，那么 y 通过中间变量 u 的联系成为 x 的函数，我们把这个函数称为

是由函数 $y=f(u)$ 与 $u=\varphi(x)$ 复合而成的**复合函数**，记作 $y=f[\varphi(x)]$，其中 u 称为**中间变量**.

注意 并不是任意两个函数都能复合成一个复合函数. 例如，$y=\arcsin u$，$u=x^2+2$就不能复合成一个函数.

同时，学习复合函数有两方面的要求：一方面，会把有限个作为中间变量的函数复合成一个函数；另一方面，会把一个复合函数进行分解. 分解复合函数时应自外向内逐层分解，并把各层函数分解到基本初等函数或基本初等函数经有限次四则运算所构成的函数为止.

例 2 将 $y=\sin u$，$u=3x^2$ 复合成一个函数.

解 $y=\sin u=\sin 3x^2$.

例 3 将 $y=u^2$，$u=\tan v$，$v=5x$ 复合成一个函数.

解 $y=u^2=\tan^2 v=\tan^2 5x$.

从例 2、例 3 可以看出，复合的过程实际上是把中间变量依次代入的过程，而且由例 3 得出中间变量可以不限于一个.

例 4 指出下列函数的复合过程：

(1) $y=\ln(x^2+3x-10)$； (2) $y=\arctan\dfrac{1}{\sqrt{x^2+2}}$.

解 (1) $y=\ln(x^2+3x-10)$是由 $y=\ln u$ 和 $u=x^2+3x-10$ 复合而成的.

(2) $y=\arctan\dfrac{1}{\sqrt{x^2+2}}$是由 $y=\arctan u$，$u=\dfrac{1}{\sqrt{v}}$和 $v=x^2+2$ 复合而成的.

例 5 设 $y=f(u)$的定义域为$[0,2]$，求函数 $y=f(\ln x)$的定义域.

解 由复合函数的定义域知 $0\leqslant\ln x\leqslant 2$，即 $1\leqslant x\leqslant \mathrm{e}^2$，所以所求函数的定义域为$[1,\mathrm{e}^2]$.

3. 初等函数

定义 3 由基本初等函数经过有限次的四则运算或有限次的复合运算所构成的并可用一个式子表示的函数，称为**初等函数**，否则称为**非初等函数**.

例如，$y=\sqrt{1-x^2}+\sin^2 x$，$y=\dfrac{\tan x}{1+x^3}$，$y=\lg(3x-\sqrt{\mathrm{e}^x}+1)$等都是初等函数，而大部分分段函数都是非初等函数.

4. 平面上点的邻域

为了讨论函数在一点附近的某些性态，在此我们引入邻域的概念.

定义 4 设 $x_0,\delta\in\mathbf{R},\delta>0$，集合$\{x\in\mathbf{R}\,|\,|x-x_0|<\delta\}$，即数轴上到点 x_0 的距离小于 δ 的点的全体，称为点 x_0 的 δ **邻域**，记为 $U(x_0,\delta)$. 点 x_0，δ 分别称为该邻域的**中心**和**半径**，集合$\{x\in\mathbf{R}\,|\,0<|x-x_0|<\delta\}$称为点 x_0 的 δ **空心邻域**，记为$\mathring{U}(x_0,\delta)$.

说明 点 x_0的某邻域是指以 x_0为中心，以任意小的正数为半径的邻域，记为 $U(x_0)$；点 x_0的某空心邻域是指以 x_0为中心，以任意小的正数为半径的空心邻域，记为$\mathring{U}(x_0)$.

习题 1-1 (A)

1. 判断下列说法是否正确：

(1) 复合函数 $y=f[\varphi(x)]$的定义域即为 $u=\varphi(x)$的定义域；

(2) 函数 $y=\lg x^2$ 与函数 $y=2\lg x$ 相同；

(3) $y=\ln u, u=-x^2-1$ 这两个函数可以复合成一个函数 $y=\ln(-x^2-1)$.

2. 求下列函数的定义域：

(1) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}+\lg(x-2)$；　(2) $y=\arcsin\dfrac{x-1}{2}$；　(3) $y=\begin{cases}x-1, & 1<x<3,\\ 3x, & 3\leqslant x<6.\end{cases}$

3. 下列函数中，哪些是偶函数，哪些是奇函数，哪些是既非奇函数又非偶函数？

(1) $y=x^2+\cos x$；　(2) $y=x^5-\sin x$；

(3) $y=\sqrt{x}$；　(4) $y=x^3\tan x+[f(x)+f(-x)]$.

4. 求由所给函数复合而成的函数：

(1) $y=\ln u$, $u=2x-1$；　(2) $y=\tan u, u=v^2, v=x+3$.

5. 指出下列函数的复合过程：

(1) $y=\sqrt{x^3-1}$；　(2) $y=\sin^2 2x$.

习题 1-1(B)

1. 求下列函数的定义域：

(1) $y=\dfrac{\ln(x+2)}{\sqrt{3-x}}$；　(2) $y=\dfrac{1}{1+\sqrt{x^2-x-6}}$；

(3) $y=\sqrt{x^2-4}-\dfrac{3x}{x-5}$；　(4) $y=\ln(\ln x)$；

(5) $y=f(x-1)+f(x+1)$，其中 $f(u)$ 的定义域为 $(0,3)$.

2. 确定下列函数的奇偶性：

(1) $y=\dfrac{x\sin x}{3+x^2}$；　(2) $y=x^2+2^x-1$；

(3) $y=\lg\dfrac{1-x}{1+x}$；　(4) $y=\tan(\sin x)$.

3. 求下列函数的函数值：

(1) 设 $f(x)=\begin{cases}2x-1, & x\geqslant 0,\\ 2^x, & x<0,\end{cases}$ 求 $f(-2), f(0), f(3)$；

(2) 设 $f(x)=x\cdot 4^{x-1}$，求 $f(-1), f(t^2), f\left(\dfrac{1}{t}\right)$；

(3) 设 $f(x)=2x-1$，求 $f(a^2), f[f(a)], [f(a)]^2$.

4. 将下列函数复合成一个函数：

(1) $y=\tan u, u=\ln v, v=3x$；　(2) $y=\sqrt{u}, u=\sin v, v=2^x$.

5. 将下列复合函数进行分解：

(1) $y=\sin\sqrt{x-1}$；　(2) $y=(x+\log_2 x)^5$；

(3) $y=\cos^3(2x+3)$；　(4) $y=e^{\ln x}$；

(5) $y=\sqrt{\tan(x-1)}$；　(6) $y=\cos[\cos(x^2-1)]$；

(7) $y=[\lg(\arcsin x^3)]^3$；　(8) $y=\sqrt{\ln\sqrt{x}}$.

§1-2 极 限

极限是高等数学中一个重要的基本概念，其描述的是在自变量的某个变化过程中函数的变化趋势.本节，我们先讨论数列的极限，然后再讨论函数的极限.

一、数列极限

1. 数列的定义

定义1 按一定规律排列得到的一串数 $x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n,\cdots$ 就称为**数列**，记为 $\{x_n\}$，其中第 n 项 x_n 称为数列的**一般项**或**通项**.

说明 (1) 数列 $\{x_n\}$ 可看作定义在正整数集合上的函数 $x_n=f(n)(n=1,2,3,\cdots)$；

(2) 数列 $\{x_n\}$ 可以看作数轴上的一族动点，它依次取数轴上的点 $x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n,\cdots$.

数列的例子：

(1) $\{2^n\}:2,4,8,\cdots,2^n,\cdots$；

(2) $\left\{\frac{1}{n}\right\}:1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots,\frac{1}{n},\cdots$；

(3) $\{(-1)^n\}:-1,1,-1,1,\cdots,(-1)^n,\cdots$.

观察上面三个数列：(1)当 n 无限增大时，2^n 也无限增大；(2)当 n 无限增大时，$\frac{1}{n}$ 无限趋近于 0；(3)当 n 无限增大时，$(-1)^n$ 总在 $1,-1$ 两个数值之间跳跃.

2. 数列的极限

定义2 对于数列 $\{x_n\}$，如果当项数 n 无限增大时，数列的一般项 x_n 无限地趋近于某一确定的常数 A，那么称常数 A 是**数列 $\{x_n\}$ 的极限**，记为 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，或者记为 $x_n\to A(n\to\infty)$，读作：当 n 趋向于无穷大时，x_n 的极限等于 A.

若数列存在极限，则称数列是收敛的；若数列没有极限，则称数列是发散的.

由数列极限的定义知，以上(1)、(3)中的数列是发散的，而(2)中的数列是收敛的，且收敛于 0，即 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$.

说明 (1) 一个数列有无极限，应该分析随着项数的无限增大，数列中相应的项是否无限趋近于某个确定的常数，如果这样的数存在，那么这个数就是该数列的极限，否则该数列的极限就不存在；

(2) 一般地，任何一个常数数列的极限就是这个常数本身，如常数数列 $3,3,3,3,\cdots$，其极限就是 3.

我们已经知道数列可看作一类特殊的函数，即自变量取正整数.若自变量不再限于正整数的顺序，而是连续变化的，就成了函数.下面结合数列的极限来学习函数极限的概念.

二、函数极限

根据自变量的变化过程，将函数极限分为两种情形：一种是 x 的绝对值 $|x|$ 无限增大(记作 $x\to\infty$)；另一种是 x 无限趋近于某一定值 x_0(记作 $x\to x_0$).下面分别对 x 在上述两种