PRINCETON UNIVERSITY
MATHEMATICS COMPETITION

普林斯顿大学
数学竞赛（2006~2012）

李 鹏 编译

$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$

$\int_\Omega d\omega=\int_{\partial\Omega}\omega$

$x^n+y^n=z^n$

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

PRINCETON UNIVERSITY
MATHEMATICS COMPETITION

普林斯顿大学数学竞赛（2006~2012）

李鹏 编译

$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$

$\int_{\Omega} d\omega=\int_{\partial\Omega}\omega$

$x^n+y^n=z^n$

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内容简介

普林斯顿大学数学竞赛是由普林斯顿大学数学俱乐部创办的面向全世界高中学生的数学竞赛. 竞赛试题涵盖代数、几何、数论、组合等多个数学分支以及个人测验、团体测验、能力测验等多种形式,集知识性、技巧性、趣味性于一体,旨在激发参赛者对数学学习的兴趣和对数学的热爱. 本书汇集了从第1届至第7届普林斯顿大学数学竞赛的试题及解答.

本书适合热爱数学的大学生和高中师生使用,也可供从事数学竞赛工作的相关人员参考.

图书在版编目(CIP)数据

普林斯顿大学数学竞赛:2006~2012/李鹏编译. —哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2016.6

ISBN 978-7-5603-5864-2

Ⅰ.①普… Ⅱ.①李… Ⅲ.①中学数学课-竞赛题-题解 Ⅳ.①G634.605

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第032433号

策划编辑 刘培杰 张永芹
责任编辑 张永芹 杜莹雪
封面设计 孙茵艾
出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社　　址 哈尔滨市南岗区复华四道街10号 邮编150006
传　　真 0451-86414749
网　　址 http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷 哈尔滨市工大节能印刷厂
开　　本 787mm×1092mm 1/16 印张18.5 字数352千字
版　　次 2016年6月第1版 2016年6月第1次印刷
书　　号 ISBN 978-7-5603-5864-2
定　　价 38.00元

目　录

第 1 届普林斯顿大学数学竞赛 (2006 年)

第一部分　个人测验

1　规则

1. 本部分将提供 5 套不同主题的个人测验题, 分别是: 代数、几何、数论、高级主题和微积分. 高级主题将包括不等式、序列与级数、组合学、概率及博弈论.

2. 每一位学生只做一套个人测验题目.

3. 每一组中做同一套个人测验的学生不能超过两位.

4. 半组 (人数为 5 人的组) 中每一套题目都要有一位学生来做.

5. 每一位进行个人测验的学生必须在最迟登记时间 (2006 年 11 月 22 日) 之前在登记表上进行申报注册, 并且直到团队测验的比赛当日开始之前都可以更改.

6. 如果参加某套个人测验的学生没有进行注册, 则他 (她) 将被取消参加那套测验的资格, 成绩视为无效.

7. 所有各套个人测验题都由 10 道简答题组成, 测验时间为 60 分钟.

8. 前 5 道题每题 2 分, 后 5 道题每题 3 分.

9. 个人测验期间, 从测验题发出开始到答卷回收时间为止, 这期间严格禁止学生之间的任何交流.

10. 监考官会在收卷前 5 分钟和 1 分钟时给予提醒, 除此之外没有其他的信息.

11. 在 60 分钟结束时, 学生必须将完整的正式答卷纸交给监考官. 时限过后, 不再允许从试卷的其他页向正式答卷纸誊抄答案.

2　代数

1　已知 $x^2+5x+6=20$, 求 $3x^2+15x+17$ 的值.

解　答案为 59. $3x^2+15x+17=3(x^2+5x+6)-1=3\cdot 20-1=59$.

2　将 $\sqrt{7+4\sqrt{3}}+\sqrt{7-4\sqrt{3}}$ 表示为最简形式.

解 1　答案为 4. 令 $x=\sqrt{7+4\sqrt{3}}+\sqrt{7-4\sqrt{3}}$, 则

$$x^2=\left(\sqrt{7+4\sqrt{3}}+\sqrt{7-4\sqrt{3}}\right)^2=(7+4\sqrt{3})+2(\sqrt{49-48})+(7-4\sqrt{3})=16,$$

因此 $x=4$.

解 2 令 $(a+b\sqrt{3})^2=7+4\sqrt{3}$ ($7-4\sqrt{3}$ 稍后同样处理), 然后去解关于 a 和 b 的方程组. 我们得到

$$\sqrt{7+4\sqrt{3}}=2+\sqrt{3},$$
$$\sqrt{7-4\sqrt{3}}=2-\sqrt{3},$$
$$(2+\sqrt{3})+(2-\sqrt{3})=4.$$

3 令 $r_1,\cdots,r_5$ 为多项式 $x^5+5x^4-79x^3+64x^2+60x+144$ 的根. 求 $r_1^2+\cdots+r_5^2$ 的值.

解 答案为 183. 使用 Vieta 公式, $r_1+\cdots+r_5=5$ 且 $r_1r_2+r_1r_3+r_2r_3+\cdots+r_4r_5=-79$. 那么 $r_1^2+\cdots+r_5^2=(r_1+\cdots+r_5)^2-2(r_1r_2+r_1r_3+\cdots+r_4r_5)=25+2\cdot79=183$.

4 求所有实数对 (a,b) 使得存在实系数多项式 $P(x)$ 满足 $P(P(x))=x^4-8x^3+ax^2+bx+40$.

解 答案为 $(2,56),(28,-48)$. 假设 $P(x)=x^2+rx+s$, 则 $P(P(x))=x^4+2rx^3+(r^2+r+2s)x^2+(2rs+r^2)x+(rs+s+s^2)$. 比较多项式的系数可得

$$2r=-8,$$
$$r^2+r+2s=a,$$
$$2rs+r^2=b,$$
$$rs+s+s^2=40.$$

从第一个方程我们得到 $r=-4$, 代入最后一式得 $-3s+s^2=40\Longrightarrow(s-8)(s+5)=0$. 若 $s=-5$, 我们得到 $a=2,b=56$. 若 $s=8$, 我们得到 $a=28,b=-48$. 这些是 a 和 b 仅可能的值.

5 求比数字

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{1000000}}$$

小的最大整数.

解 答案为 1998. 令 S 为题中的和数. 我们只需注意到

$$2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=\frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

并且显然

$$\frac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}>\frac{1}{\sqrt{n}}>\frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}.$$

将这两个不等式对 n 从 2 到 10^6 求和, 我们得到 $1998>S-1>2(\sqrt{10^6+1}-\sqrt{2})>1997$. 因此 $\lfloor S\rfloor=1998$.

6 设 $P(x)$ 为具有下面性质的多项式: 存在另一个多项式 $Q(x)$ 满足 $P(x)Q(x) = P(x^2)$, $P(x)$ 及 $Q(x)$ 可以具有复系数. 若 $P(x)$ 是五次的, 且有互异的复数根 $r_1, \cdots, r_5$, 找出 $|r_1| + \cdots + |r_5|$ 所有可能的值.

解 答案为 $\{4,5\}$. 假设 $P(x_0) = 0$, 则 $P(x^2)$ 在 $\sqrt{x_0}$ 和 $-\sqrt{x_0}$ 处有根. 由于 $P(x)|P(x^2)$, 我们必定也有 $P(\pm\sqrt{x_0}) = 0$. 照此方式进行, 可以得到所有的数值 $x_0, \pm\sqrt{x_0}, \pm\sqrt{\pm\sqrt{x_0}}, \cdots$ 一定是 $P(x)$的根. 由于 $P(x)$ 是五次的, 这个序列必为有限的. 由于若 $|x_0| \notin \{0,1\}$, 则 $1 < |\sqrt{x_0}| < |x_0|$ 或 $0 < |x_0| < |\sqrt{x_0}| < 1$ 其中之一成立, 很明显我们有 $x_0 = 0$ 或 $|x_0| = 1$. 没有根是重复的, 因此 x_0 $(\neq 0)$ 的 2^n 个根的集合一定包含着 4 或 5 个元素 (取决于是否 $x|P(x)$). 所以 $|r_1| + \cdots + |r_5| \in \{4,5\}$. 这两种情形都可以得到, 考虑多项式

$$P_1(x) = x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x + 1 = (x-1)(x^2+x+1)(x^2-x+1),$$
$$P_2(x) = x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x = x(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1).$$

因此, 可以得到问题中的和数为 $\{4,5\}$.

7 找出 x 的一个复值满足方程 $\sqrt{3}x^7 + x^4 + 2 = 0$.

解 答案为 $\frac{\sqrt{3}}{2} \pm \frac{\mathrm{i}}{2}$. 考虑几何上的复平面. 注意到 $1, \sqrt{3}, 2$ 为直角三角形的三边. 这表明了 x^4 和 x^7 成 90 度角, 并且 x 的长度是 1. 这又表明 x 与实轴成 30 度角, 或者说 $x = \cos 30^\circ + \sin 30^\circ \cdot \mathrm{i} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\mathrm{i}}{2}$. 很容易验证这就是一个解. 由于多项式具有实系数, 其共轭复数 $x = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\mathrm{i}}{2}$ 也是一个解.

8 Lucas 数 L_n 如下定义: $L_0 = 2, L_1 = 1$, 对于 $n \geq 2, L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$. 令 $r = 0.213\,47\cdots$, 其数字构成一串 Lucas 数. 如果数字为多数位, 则进行"叠加", 因此 $r = 0.213\,483\,0\cdots$ 而不是 $0.213\,471\,118\cdots$. 将 r 表示为有理形式 $\frac{p}{q}$, 其中 p 与 q 互素.

解 答案为 $\frac{19}{89}$. 设 L_n 为第 n 个 Lucas 数. 我们要求 $S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n}{10^{n+1}}$.

令 $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, 黄金分割数. 注意到 $1 + \phi = \phi^2$, 所以 $\phi^{n-2} + \phi^{n-1} = \phi^n$ 并且 $(-\phi)^{-n+2} + (-\phi)^{-n+1} = (-\phi)^{-n}$, 由 $\phi^0 + (-\phi)^0 = 2$, $\phi^1 + (-\phi)^{-1} = 1$, 我们得到 $L_n = \phi^n + (-\phi)^{-n}$. 然后我们求出

$$
\begin{aligned}
S &= \frac{1}{10}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{L_n}{10^n} \\
&= \frac{1}{10}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\left(\frac{\phi}{10}\right)^n + \left(\frac{-1}{10\phi}\right)^n\right) \\
&= \frac{1}{10}\left(\frac{1}{1-\phi/10} + \frac{1}{1+1/(10\phi)}\right) \\
&= \frac{1}{10}\left(\frac{20}{19-\sqrt{5}} + \frac{20}{19+\sqrt{5}}\right) \\
&= \frac{2(19+\sqrt{5}+19-\sqrt{5})}{19^2-5} \\
&= \frac{19}{89}.
\end{aligned}
$$

9 曲线 $y = x^4 + 2x^3 - 11x^2 - 13x + 35$ 有一条双切线 (与曲线切于两个点的直线). 求双切线的方程.

解 答案为 $y = -x - 1$. 具有两个二重根的多项式以 $y = 0$ 为其一条双切线. 那么我们从这个多项式中减去一个线性函数来构造这样一个具有两个二重根的多项式. 我们想要

$$
\begin{aligned}
(x+a)^2(x+b)^2 &= (x^2 + 2ax + a^2)(x^2 + 2bx + b^2) \\
&= x^4 + (2a+2b)x^3 + (a^2 + 4ab + b^2)x^2 + 2ab(a+b)x + (a^2 + b^2).
\end{aligned}
$$

因此

$$
\begin{gathered}
2a + 2b = 2 \Rightarrow a + b = 1, \\
a^2 + 4ab + b^2 = -11, \text{我们减去 } (a+b)^2 = 1 \text{得到 } 2ab = -12.
\end{gathered}
$$

通过观察, 我们得到解 $a = 3, b = -2$. 因此 x 的一次项系数为 -12, 常数项系数则应为 $a^2b^2 = 36$. 那么两式的差就是 $x + 1$, 所以我们的双切线就是 $y = -x - 1$.

10 若 x, y, z 为实数, 并且

$$
\begin{gathered}
2x + y + z \le 66, \\
x + 2y + z \le 60, \\
x + y + 2z \le 70, \\
x + 2y + 3z \le 110, \\
3x + y + 2z \le 98, \\
2x + 3y + z \le 89,
\end{gathered}
$$

$x+y+z$ 可能的最大值是多少?

解 答案为 48. 这是一个线性规划问题的实例, 有很多种途径去解答. 这里给出其中一种.

给予我们 6 个不等式. 想象它们在三维空间中. 每一个不等式表示一个平面, 其中我们所指的范围是平面的一侧.

想象我们从满足所有不等式的一点 (x,y,z) 开始, 然后挑选一个方向行进. 如果这使得 $x+y+z$ 减小, 则转向其相反的方向. 在这样的路径中, 我们将或者使 $x+y+z$ 增加, 或者使其保持常数. 当我们碰到一个平面, 就选择一个与其平行的方向. 当我们碰到另一个平面, 它们的相交部分将形成一条直线, 我们就沿此直线行进. 只有在一类地方我们不能这样做, 那就是在碰到三个平面的交点或使三个不等式变为等式的点. 至少最大值能在这些交点之一或无穷远处找到.

快速地浏览一下这组不等式可以看出, 如果 x,y,z 是无穷的, 则 $x+y+z$ 一定是负无穷大. 这显然不是最大值.

由于对称性, 使用蛮力 (brute force) 算法在这里是可行的. 我们将使用一种稍微更高效的方法.

挑选一个交点开始进行. 前 3 个不等式是个自然的开始处. 解得 $x=17,y=11,z=21$. 然而, 代入后 3 个不等式得

$$\begin{aligned}x+2y+3z&=102,\\3x+y+2z&=104,\\2x+3y+z&=88.\end{aligned}$$

这违背了第 5 个不等式. 让我们尝试求出只给出第 1, 2, 3, 5 个不等式时 $x+y+z$ 的最小值, 移动至一个临近的交点.

如果我们取 $x=17-3p,y=11+p,z=21+p$, 这保持了第 2 个和第 3 个不等式成立, 将 $3x+y+2z$ 减少 $6p$, 将 $x+y+z$ 减少 p. 如果我们取 $x=17+p,y=11-3p,z=21+p$, 这保持了第 1 个和第 3 个不等式成立, 将 $3x+y+2z$ 增加 $2p$, 将 $x+y+z$ 减少 p. 如果我们取 $x=17+p,y=11+p,z=21-3p$, 这保持了第 1 个和第 2 个不等式成立, 将 $3x+y+2z$ 减少 $2p$, 将 $x+y+z$ 减少 p.

注意到 $p>0$, 若不然则前 3 个不等式将不成立.

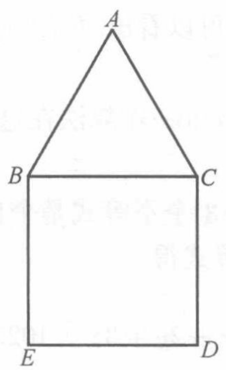
我们想在减少 $3x+y+2z$ 的值时 $x+y+z$ 的减少尽可能的小, 因此我们使用第 1 种途径. 置 $p=1$ 则 $3x+y+2z$ 的值减少到 98, 正好满足要求, 并且给出 $x=14,y=12,z=22$. 可以快速验证这组值满足所有的不等式. 因此, 答案为 48.

3 几何

1 A,B,C,D,E 和 F 是一个凸六边形的顶点, 并且有一个圆使得 A,B,C,D,E 和 F 都在圆上. 若 $\angle ABC=72°,\angle BCD=96°,\angle CDE=118°,\angle DEF=104°$, $\angle EFA$ 的度数是多少?

解 答案为 170°. $CDEF$ 是圆内接四边形, 意味着 $\angle CFE=62°$, 并且 $ABCF$ 是圆内接四边形, 意味着 $\angle AFC=108°$. 因此 $\angle EFA=170°$.

2 $\triangle ABC$ 是边长为 1 的等边三角形. $BCDE$ 是一个正方形. 点 F 与 A,D 和 E 三点的距离相等. 求 AF 的长度.



解 答案为 1. 想象将 $\triangle ABC$ 向下移动 1. 现在点 B 与点 E 重合, 点 C 与点 D 重合. 将现在点 A 处称为点 P. 显然 $EP=1$, $DP=1$. 而且, 因为三角形向下移动了 1 亦有 $AP=1$. 因此, $F=P$, 答案就是 1.

3 求 $\sin 36°$ 的精确值.

解 答案为 $\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}$. 取边长为 1 的正五边形 $ABCDE$. 线段 AC 的长度为 $2\cos 36°$. 过 D 和 E 作垂直于 AC 的线段. 现在很清楚地看出 AC 的长度为 $2\cos 72°+1$. 由余弦的倍角公式, $\cos 72°=2\cos^2 36°-1$. 解得到的二次方程, 我们得到 $\cos 36°=\frac{1+\sqrt{5}}{4}$, 则 $\sin 36°=\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}$.

4 半径为 1 的圆 c 以原点为圆心. 圆 $c_1,\cdots,c_6$ 均以 r_1 为半径, 且每个圆都完全包含在 c 之内并与其相切, 并且 c_2 与 c_1 相切, c_3 与 c_2 相切, ……, c_1 与 c_6 相切. 圆 d 同时与 c,c_1 和 c_2 相切, 但不与这些圆中任何一个相交. 问圆 d 的半径是多少? 将你的答数表示为 $\frac{a+b\sqrt{c}}{d}$ 的形式, 其中 a,b,c,d 为整数, d 是尽可能小的正数, c 为无平方因子数.

解 答案为 $\frac{15-6\sqrt{3}}{39}$. 解决这个问题最简单的途径是用翻转几何. 令 C 为大圆的圆心, r 为其半径. 翻转关于 C 的平面, 保持大圆在原来位置, 6 个小圆成为大小相同的 6 个圆, 形成一个六边形. 取相邻的两个小圆以及原始的大圆. 我们要找的圆现在在这个三角中间. 从 C 到要找圆的圆心的距离为 $\frac{2\sqrt{3}r}{3}$. 它的半径是 $\frac{2\sqrt{3}r-3r}{3}$. 从要找圆的另一端到 C 的距离为 $r+2\frac{2\sqrt{3}r-3r}{3}=\frac{4\sqrt{3}r-3r}{3}$. 翻转关于 C 的平面以恢复使用这种途径开始时的所有信息. 从 C 到要找圆近端的距离为

$$\frac{r^2}{\frac{4\sqrt{3}r-3r}{3}}=\frac{3(4\sqrt{3}+3)}{48-9}r.$$

用 r 减去这个值再除以 2, 就得到了要求的半径为 (回忆到 $r=1$) $\frac{15-6\sqrt{3}}{39}$.

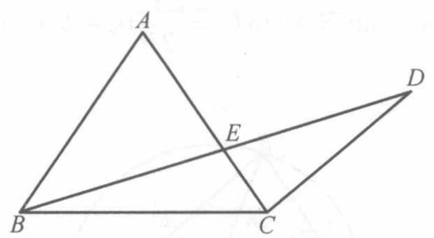
5 设 A,B 和 C 是三角形的顶点, P 是三角形内的一点. 若 $\angle BAP,\angle BCP$ 和 $\angle ABP$ 都是 $30°$, $\angle ACP$ 为 $45°$, 那么 $\sin\angle CBP$ 是多少?

解 答案为 $\frac{\sqrt{10}}{10}$. 令 $\angle CBP=x, BP=a$. 由 $\angle BAP=\angle ABP$, $AP=BP=a$. 从 P 到 BC 的垂线长度为 $a\sin x$, 这使得 $CP=2a\sin x$. 由于 $\angle ACP=45°$, 所以从 P 到 AC 的垂线长度为 $\sqrt{2}a\sin x$. (1)

由于三角形的内角和为 $180°$, 因此 $\angle CAP=45°-x$. 由于$AP=a$, 从 P 到 AC 的垂线长度为 $a\sin(45°-x)$. (2)

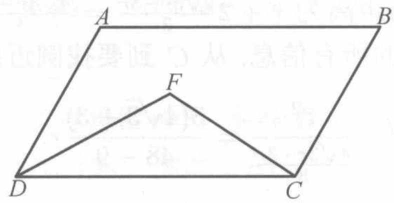
置 (1) 与 (2) 相等, $\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x=\sqrt{2}\sin x$, 化简得到 $\cos x=3\sin x$. 并且由 $\cos^2 x+\sin^2 x=1$, 进而得到 $10\sin^2 x=1$. x 为锐角, 因而 $\sin x>0$. 因此 $\sin x=\frac{\sqrt{10}}{10}$.

6 在下面给出的图中, $\angle ACB=65°,\angle BAC=50°,\angle BDC=25°,AB=5,AE=1$, 请确定 $BD\cdot DE$ 的值.



解 答案为 24. 可以看出, $\angle ABC=180°-\angle BAC-\angle ACB=65°$, 因此 $\angle ABC=\angle ACB$ 并且 $AB=AC=5$. 注意到 $\angle BDC=25°=\frac{1}{2}\angle BAC$. 这使我们想到了圆. 构造一个以 A 为圆心的圆, AB 和 AC 为其半径. 我们从一个熟知的定理可以得到, 点 D 必在这个圆上. 现在延长 CA 交圆于另一点 F. 利用关于点 E 的圆幂定理 (相交弦定理), $BE\cdot DE=CE\cdot EF=4\cdot 6=24$.

7 在平行四边形 $ABCD$ 中, 作点 F 使得 $CF \perp BC$, 并且确定该点的位置使得 $\angle DFC = 120°$, 如图所示. 若 $DF = 4$ 并且 $BC = CF = 2$, 那么平行四边形的面积是多少?

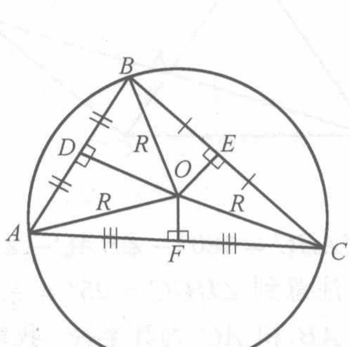


解 答案为 8. 延长 CF 交 AD 于 G. 由 $CF \perp BC$ 及 $BC \parallel AD$ 可知 $CG \perp AD$. $\angle DFG = 180° - \angle DFC = 60°$, $\angle DGF = 90°$, 并且 $DF = 4$, 因此 $FG = 4\cos 60° = 2$. 从而得到 $CG = 4$, 因此 $S_{ABCD} = AD \cdot CG = 8$.

8 三角形的三边长分别为 $a = 7, b = 8, c = 5$, 求 $(\sin A + \sin B + \sin C) \cdot (\cot \frac{A}{2} + \cot \frac{B}{2} + \cot \frac{C}{2})$ 的值.

解 答案为 $\frac{100}{7}$. 对于乘积的第一项, 考虑三角形的外接圆 (其圆心为三边的垂直平分线的交点): 其中 R 为外接圆半径. 现在 $\angle BCA = \frac{1}{2}\angle BOA$, 并且由 SSS (或 SAS) 得到 $\triangle BOD \cong \triangle AOD$. 那么 $\angle BOD = \frac{1}{2}\angle BOA = \angle C$ $(\angle BCA)$. 因此 $\sin C = \sin \angle BOD = \frac{c/2}{R}$. 同样地,

$$\sin A = \sin \angle BOE = \frac{a/2}{R},$$
$$\sin B = \sin \angle AOF = \frac{b/2}{R},$$
$$\sin A + \sin B + \sin C = \frac{1}{2R}(a + b + c).$$



对于乘积的第二项, 考虑三角形的内切圆 (其圆心为三条角平分线的交点): 其

中 r 为内切圆半径. 现在因为 BO, AO 和 CO 为角平分线, 我们有

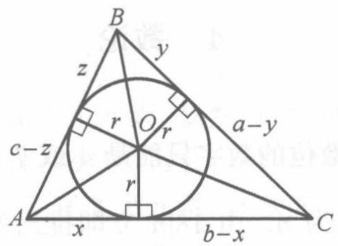
$$\begin{aligned}
&\cot\left(\frac{A}{2}\right)+\cot\left(\frac{B}{2}\right)+\cot\left(\frac{C}{2}\right)\\
=&\frac{1}{2}\left(\left(\cot\left(\frac{A}{2}\right)+\cot\left(\frac{B}{2}\right)\right)+\left(\cot\left(\frac{A}{2}\right)+\cot\left(\frac{C}{2}\right)\right)+\left(\cot\left(\frac{B}{2}\right)+\cot\left(\frac{C}{2}\right)\right)\right)\\
=&\frac{1}{2}\left(\frac{(c-z)+z}{r}+\frac{(b-x)+x}{r}+\frac{(a-y)+y}{r}\right)\\
=&\frac{1}{2r}(a+b+c).
\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}
&(\sin A+\sin B+\sin C)\cdot\left(\cot\left(\frac{A}{2}\right)+\cot\left(\frac{B}{2}\right)+\cot\left(\frac{C}{2}\right)\right)\\
&=\frac{1}{2R}(a+b+c)\cdot\frac{1}{2r}(a+b+c)\\
&=\frac{1}{4rR}(a+b+c)^2.
\end{aligned}$$

由于 $R=\frac{abc}{4rs}$, 其中 s 为三角形周长的一半, $Rr=\frac{abc}{4s}$. 因此我们有

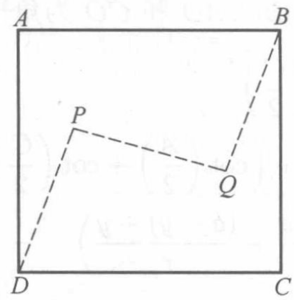
$$\frac{1}{4rR}(a+b+c)^2=\frac{1}{4}\cdot\frac{4s}{abc}\cdot(2s)^2=\frac{4s^3}{abc}=\frac{100}{7}.$$



9 考虑所有长度为 4 的、两个端点分别位于直线 $y=x$ 和 $y=2x$ 上的线段. 求这些线段中点的轨迹的方程.

解 答案为 $25x^2-36xy-13y^2=4$. 考虑直线 $y=x$ 上的点 (a,a) 和 $y=2x$ 上的点 $(b,2b)$. 若这两个点为一条长度为 4 的线段的端点, 那么 $(a-b)^2+(a-2b)^2=4^2$ $(*)$. 这条线段的中点为 $(x,y)=(\frac{a+b}{2},\frac{a+2b}{2})$. 根据 x 和 y 的表示, 解关于 a 和 b 的方程组 $x=\frac{a+b}{2}, y=\frac{a+2b}{2}$, 我们得到 $a=4x-2y, b=2y-2x$. 将其代入 $(*)$, 化简得到轨迹的方程为 $25x^2-36xy-13y^2=4$.

10 P, Q 两点位于正方形 $ABCD$ 内部, 使得 DP 平行于 QB 并且 $DP=QB=PQ$. 确定 $\angle ADP$ 可能的最小值.



解 答案为 $\frac{\pi}{12}$. 令 $\theta=\angle ADP, x=DP$. 对于给定的 θ, 我们考虑 $PQ-x$ 可能的最小值 (忽略 $PQ=x$ 的限制). 如果我们将 x 增加 $\mathrm{d}x$, 则 PQ 增加 $2\cdot \mathrm{d}x\cdot\cos\angle DPQ$. 因此, 当 $\angle DPQ=\frac{\pi}{3}$ 时取得最小值.

对于给定的 θ 值, 我们来构造这个最小值. 现在将 θ 减小 $\mathrm{d}a$, 则 PQ 增加 $\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot x\cdot \mathrm{d}a$ (除非 $\theta<\frac{\pi}{4}$, 很明显这不是答案).

因此, 对于最小的角, 当 $PQ=x$ 时 $PQ-x$ 取得最小值. 若 $PQ-x$ 有一个负的最小值, 这个角可以减小, 直至 $PQ=x$. 若 $PQ-x$ 有一个正的最小值, 那么对于这个角问题中的条件无法满足.

现在很显然, 当 θ 取得最小值时 $\angle PDQ=\angle PQD=\frac{\pi}{3}$. 由对称性, 可立即得到 $\theta=\frac{\pi}{12}$.

4 数论

1 求能够整除 18 且各个数位的数字只能是 4 或 7 的最小正整数.

解 答案为 774. 令这个数为 n. 由 $18|n$ 立即推出 $9|n$, 因此 n 的各个数位数字之和也可以被 9 整除. 对于三位数来说满足条件的情况恰只有一种 (对于位数小于 3 的情况条件均不能满足), 即由一个 4 和两个 7 组成. 由 $18|n$, n 是偶数, 因此 $n=774$.

2 Conway 教授从他讲授线性代数入门教程的两个班共收到了 58 份期中考试试卷. 他注意到小班的试卷数等于大班试卷数各个数位数字的乘积. 假设每位学生都提交了期中考试试卷, 问小班共有多少位学生?

解 答案为 21. 大班的学生数一定是两位数, 可以表示为 $10a+b$, 其中 $a,b<10, a>0$ 并且 b 为非负的. 我们知道, $ab+10a+b=58$. 使用 Simon 因式分解技巧, $(a+1)(b+10)=ab+10a+b+10=68$. 给定 a 与 b 的条件, 只能有唯一的解 $a+1=4, b+10=17$，解得 $a=3, b=7$, 小班的学生人数为 $ab=21$.

3 求 14348907 的 5 次方根.

解 答案为 27. 令 $y = 14348907$, 考虑 $y/10^5 = 143.48907$. 很显然 $2 < y^{\frac{1}{5}}/10 < 3$, 因此所求数的最高位 (即十位) 是数字 2. 那么个位数字是多少才能使其 5 次方后的个位数字是 7 呢? 只有 7. 因此答案是 27.

4 $2003^{2005^{2007^{2009}}}$ 的最后两位数字是多少 (其中 a^{b^c} 表示 $a^{(b^c)}$) ?

解 答案为 43. 我们记 $2003 = 100x + 3$, 由于只有最后两位数字能够影响该乘幂的最后两位数字, $(100x + 3)^n = 100(\text{无关的数值}) + 3^n$. 3 的各乘幂的最后两位数重复着下面这些数字: 01, 03, 09, 27, 81, 43, 29, 87, 61, 83, 49, 47, 41, 23, 69, 07, 21, 63, 89, 67, 01, $\cdots$. 它以这 20 个数字为周期循环重复着. 现在, 同理将 2005^n 考虑为 $5^n \pmod{20}$, 除去 $n = 0$ 以外, $5^n \pmod{20} = 5$. 上面序列中的第 5 个数 (由于我们是从 $n = 0$ 开始的, 1 实际上是第 0 个数) 为 43.

5 求使得 $12^k | 66!$ 的最大整数 k.

解 答案为 31. 我们需要计算 66! 中所含的 2 和 3 的个数——共含有 $\left[\frac{66}{2}\right] + \left[\frac{66}{4}\right] + \left[\frac{66}{8}\right] + \left[\frac{66}{16}\right] + \left[\frac{66}{32}\right] + \left[\frac{66}{64}\right] = 33 + 16 + 8 + 4 + 2 + 1 = 64$ 个 2, 因而含 32 个 4, 且含有 $\left[\frac{66}{3}\right] + \left[\frac{66}{9}\right] + \left[\frac{66}{27}\right] = 22 + 7 + 2 = 31$ 个 3, 因此, 这推出共含有 31 个 12.

6 集合 A 中包含着 n 个互异的整数. 这个集合具有这样的性质: 若 $a, b \in A$, 则 $12 \nmid |a + b|, 12 \nmid |a - b|$. 那么 n 可能的最大值是多少?

解 答案为 7. 存在 12 个等价类 $(\bmod\, 12)$. 显然 A 中不能有两个等价类元素. 若在 A 中取 $0, 1, 2, \cdots, 6$, 则共有 7 个元素, 显然符合条件. 若我们再试着在 A 中增加一个元素, 则不可能满足条件. 这是因为若在 A 中取了 $k \pmod{12}$, 则 A 中必不含 $12 - k \pmod{12}$. 因此 A 至多有 7 个元素, 其余的不能在 A 中.

7 设 $x, y, z \in \mathbb{Z}$ 满足方程 $10x^3 + 20y^3 + 2006xyz = 2007z^3$, 求表达式 $x + y + z$ 可能的最大值.

解 答案为 0. 将 $10x^3 + 20y^3 + 2006xyz = 2007z^3$ 这个方程 $\bmod\, 2$. 很显然, $z \equiv 0 \pmod 2$. 现在将此方程 $\bmod\, 4$. 因为 $z \equiv 0 \pmod 4$, 所以导出 $10x^3 \equiv 0 \pmod 4$, $x \equiv 0 \pmod 2$. 现在将此方程 $\bmod\, 8$. $z \equiv 0 \pmod 2$ 且 $x \equiv 0 \pmod 2$, 因此 $20y^3 \equiv 0 \pmod 8$, $y \equiv 0 \pmod 2$. 那么如果 (x, y, z) 是一组解, 则 $(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}, \frac{z}{2})$ 也是一组解, 由于 $x \equiv y \equiv z \equiv 0 \pmod 2$, 这组解也一定为整数解. 我们可以将这个过程一直进行下去.

这只在当 $x = y = z = 0$ 时才有意义, 并且这是唯一的整数解. 因此表达式 $x + y + z$ 可能的最大值为 0.

8 求使得 $7n^3-3n^2-3n-1$ 是完全立方数的所有整数 n (不要求一定是正的).

解 答案为 $\{-1,0,1\}$. 将给出的表达式写成 $(2n)^3-(n+1)^3=m^3 \Rightarrow (2n)^3=m^3+(n+1)^3$. 根据 Fermat 大定理, 这个方程仅当至少其中一个数为 0 时对于整数成立. 因此, 我们令 $2n=0$, 得到 $n=0$; 令 $m=0$, 得到 $2n=n+1 \Rightarrow n=1$; 令 $n+1=0$, 得到 $n=-1$. 我们的解为 $\{-1,0,1\}$.

9 考虑数列集合 $\{S_i\}$, 其前三项为 $S_0=12, S_1=21, S_2=28$, 并且对于 $n>2$, S_n 为 S_{k_n} 和 S_{j_n} 两数 (不要求一定互异) 的和, 其中 k_n, j_n 为小于 n 的整数. 求在任一数列 S_i 中都不出现的最大的整数.

解 答案为 107. 问题可以归结为: 当 $x,y,z \geq 0$ 且为整数时, 不能由 $12x+21y+28z$ 表示的最大整数是多少. 若我们将问题在 $\bmod 12$ 之下考虑, 注意到这时 $12x$ 项将不再有影响. 当我们找到一个 21 和 28 的线性组合, 其在一个 $\bmod 12$ 的特殊剩余类中时, 则可以通过增加 12 的倍数而得到在同一等价类中所有比其大的整数. 所以我们真正感兴趣的是每个等价类所必需的最小线性组合. 取这些数中的最大值减去 12 便得到了不可被取到的最大值. 因此, 考虑我们在 $\bmod 12$ 时对于 21 和 28 的线性组合试图达到的常数 c, $21y+28z \equiv c \pmod{12}$. 我们需要使用中国剩余定理, 使得在 $\bmod 3$ 和 $\bmod 4$ 时等式成立. 在 $\bmod 3$ 时, 方程很简单: $z \equiv c \pmod 3$, 在 $\bmod 4$ 时, 同样为简单的 $y \equiv c \pmod 4$. 我们要找出 c 使得 z 和 y 都达到最大, 因此我们有 $z=2, y=3$. 最大值即为 $2\cdot 28+3\cdot 21-12=107$. 完全相同的方法可以进行推广得到: 当 a,b,c 为两两互素的正整数时, ab,bc,ac 的最大值为 $2abc-ab-bc-ac$.

10 若 $a_1,\cdots,a_{12}$ 为 12 个非零整数, 使得等式 $a_1^6+\cdots+a_{12}^6=450697$, 那么 $a_1^2+\cdots+a_{12}^2$ 的值是多少?

解 答案为 277. 题目中出现了 6 次幂, 我们可以考虑使用 Fermat 小定理. 450697 为 $2 \pmod 7$, 由 Fermat 小定理可以推出 a_i 中的 3 个或 10 个等于 7. 而 $7^6=117649$, 所以不可能是 10 个 (太大了), 则 $a_1=a_2=a_3=7$. 现在我们有 $a_4^6+\cdots+a_{12}^6=97750$. 右边的数等价于 $6 \pmod 8$, 而 6 次幂为 1 或 $0 \pmod 8$, 由此推出在剩余的 a_i 中有 6 个奇数和 3 个偶数. 右边的数等价于 $1 \pmod 9$, 而 6 次幂为 1 或 $0 \pmod 9$, 由此推出在剩余的 a_i 中有 8 个是 3 的倍数, 1 个不是. 由于 $6^6=46656$, 3 个偶数不会都为 6, 因此我们得出 $a_4=a_5=6, a_6=\cdots=a_{11}=3$. 从和数中减去得到的 11 个值, 计算得出 $a_{12}=2$. 于是答案为 $4+6\cdot 9+2\cdot 36+3\cdot 49=277$.

5 高级主题

1 在一个有 12 个顶点的平面图内, 其边数可能的最大值是多少? 一个平面图是指可以在平面中画出且各边都不相交 (它们只能在顶点处相交) 的图形.

解 答案为 30. 我们由 Euler 公式可知, $V-E+F=2$. 假设我们有若干个顶点和若干条边. 考虑由图生成的任何区域 (包括外部区域). 若区域涉及的顶点多于 3 个, 那么可以有两个顶点相连而不破坏图形的平面性质. 假设我们遍历所有的区域并按此方法将它们相连, 则所有的区域恰好有 3 个顶点和 3 条边相关联. 每条特定的边必定与两个区域相关联, 而每个区域与 3 条边相关联. 因此, 区域数是边数的 2/3. 于是, 我们有 $V-E+\frac{2}{3}E=2, 3(V-2)=E$. 当 $V=12$ 时, $E=30$.

2 袋子中放置了 3 个绿球、4 个黄球和 5 个红球 (另有大堆各个颜色的球放置在袋子之外). 随机选择两个不同颜色的球, 并用两个第三种颜色的球替换它们. 如果在某一时刻, 袋子中还剩余 5 个绿球, 而袋子中剩余黄球的个数至少要不少于红球的个数, 那么袋子中剩余的三种颜色的球各有多少个? 将答案记为 (g,y,r) 的形式, 其中 g,y,r 分别表示绿球、黄球和红球的个数.

解 答案为 $(5,6,1)$. 将这个问题在 $\bmod 3$ 之下考虑. 在每一步, 我们从袋子中移走两个不同颜色的球, 并增加两个第三种颜色的球, 这相当于每种颜色的球都增加了 $-1 \pmod 3$ 个. 令袋子中绿球的个数为 G, 黄球的个数为 Y, 红球的个数为 R, $R \pmod 3 \equiv (Y+1) \pmod 3 \equiv (G+2) \pmod 3$. 因此若 $G \pmod 3 \equiv 2$, 则 $Y \pmod 3 \equiv 0$, $R \pmod 3 \equiv 1$. 同时要注意到袋子中球的总数保持不变. 那么若 $G=5$, 则 $Y+R=7$. 因此有三种可能: $(Y,R)=(6,1),(Y,R)=(3,4),(Y,R)=(0,7)$. 由题目中的条件, $Y \geq R$, 得到 $(G,Y,R)=(5,6,1)$. 这是由如下的取法得到的: 取一个红球和一个绿球, 得到 $(2,6,4)$. 再取一个红球和一个绿球, 得到 $(1,8,3)$. 最后取两次黄球加红球, 即得到我们的答案 $(5,6,1)$.

3 对于 $x>0$, 求 $x^2+2x+\frac{24}{x}$ 的最小值.

解 答案为 20. 将函数写成 $x^2+2x+\frac{8}{x}+\frac{8}{x}+\frac{8}{x}$. 我们使用算术平均–几何平均不等式得到函数大于等于 $5\sqrt[5]{2\cdot 8^3}=5\sqrt[5]{2\cdot 2^9}=20$. 这个最小值在当上面的 5 项均相等时取到, 这时 $x=2$.

4 一位现代派艺术家将他的 3 英尺乘 5 英尺的油画布随机分成 21 个区域来进行绘画创作. 然后他将这些区域中的一部分进行上色, 而其他的区域保持白色. 最小区域的面积为 $a=10$ 平方英寸, 并且对于面积为 a_i 的任意给定区域, 其保持白色的概率为 $\frac{a}{a_i}$. 那么对于油画布上任意给定点, 其保持白色的概率是多少? (1 英尺= 12 英寸.)