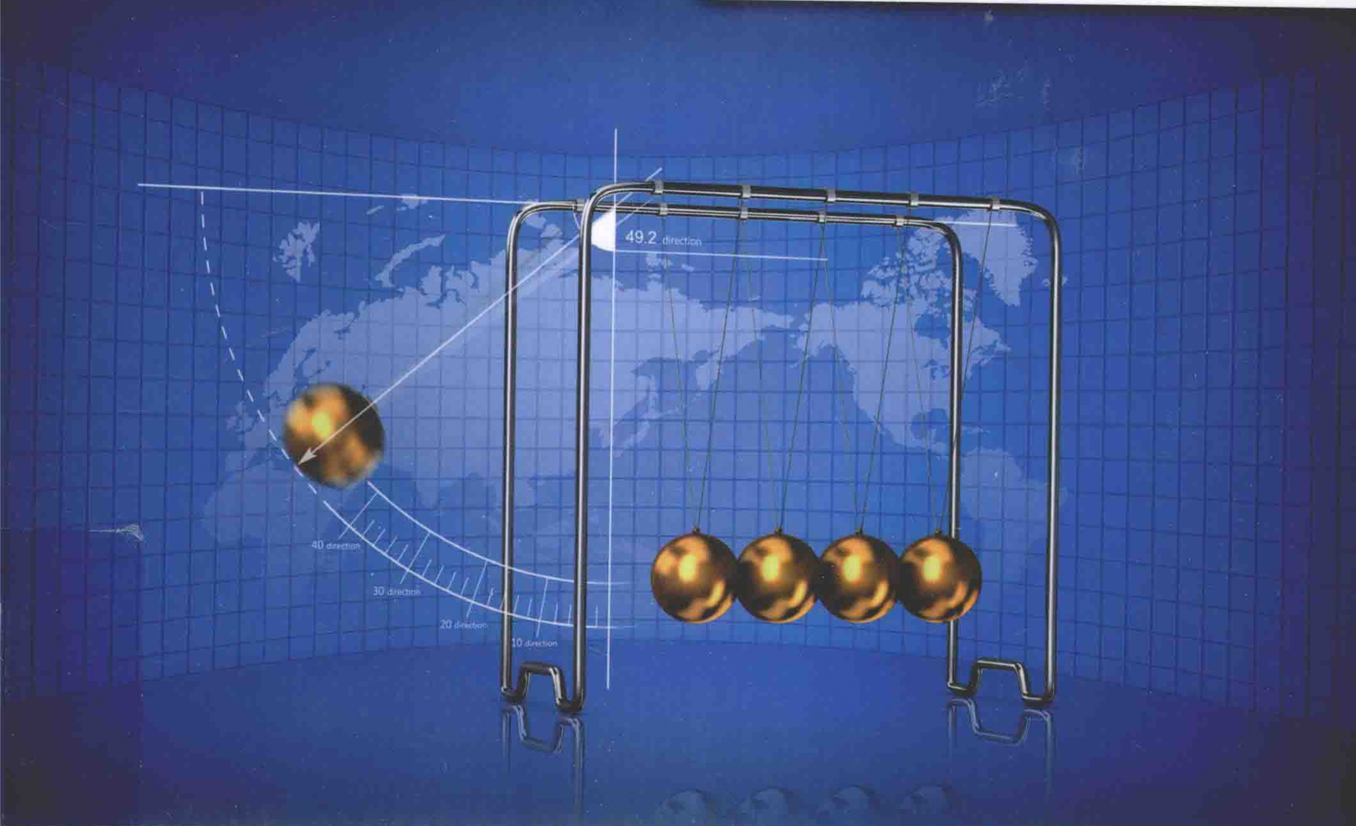
北方阳光系列丛书

DAXUE WULI SHIYAN JIAOCHENG

大学物理实验教程

杨达莉　陈赛艳◎主编



中国财富出版社
CHINA FORTUNE PRESS

北方阳光系列丛书

大学物理实验教程

主　编　杨达莉　陈赛艳
副主编　王　星　韦宁燕

中国财富出版社

图书在版编目（CIP）数据

大学物理实验教程／杨达莉，陈赛艳主编．—北京：中国财富出版社，2016.8
（北方阳光系列丛书）
ISBN 978－7－5047－6258－0

Ⅰ.①大…　Ⅱ.①杨…　②陈…　Ⅲ.①物理学—实验—高等学校—教材　Ⅳ.①O4－33

中国版本图书馆CIP数据核字（2016）第207430号

策划编辑	谷秀莉	**责任编辑**	谷秀莉		
责任印制	方朋远	**责任校对**	杨小静　梁　凡	**责任发行**	敬　东

出版发行	中国财富出版社		
社　　址	北京市丰台区南四环西路188号5区20楼	**邮政编码**	100070
电　　话	010－52227568（发行部）		010－52227588转307（总编室）
	010－68589540（读者服务部）		010－52227588转305（质检部）
网　　址	http://www.cfpress.com.cn		
经　　销	新华书店		
印　　刷	北京京都六环印刷厂		
书　　号	ISBN 978－7－5047－6258－0/O·0052		
开　　本	787mm×1092mm　1/16	**版　　次**	2016年8月第1版
印　　张	13.75	**印　　次**	2016年8月第1次印刷
字　　数	309千字	**定　　价**	32.00元

前　言

本书是理工科院校大学物理实验教学用书。

本书第一章比较详细地介绍了测量误差及数据处理的基本知识，适当引入不确定度的概念。在实验训练部分（第二章至第五章）编排了24个不同类型的实验，对每个实验原理都做了简明扼要的论述，并介绍了实验仪器的使用方法、实验内容和步骤，以便学生课前预习、设计合理的实验方案及进行实验。在每个实验后面都设有思考题，有的实验还提供实验方法和相关知识拓展，从而拓展学生视野，使学生的创新能力得到锻炼和提高。

全书实验训练内容分为力学和热学实验、电磁学实验、光学实验、近代物理与综合性实验四部分。在教学实施过程中，遵循由浅入深、由简到繁、循序渐进的原则，以利于培养并逐步提高学生的科学实验能力和素质。

本书的编写分工如下：桂林理工大学博文管理学院杨达莉编写绪论、第一章、不良导体导热系数的测量、电学元件伏安特性的测量、霍尔效应实验、薄透镜焦距的测定、光电效应实验及附录；桂林理工大学陈赛艳编写物体密度的测定、刚体转动惯量的测量、液体比热容的测定、直流单臂电桥测电阻、直流双臂电桥测低值电阻、分光计的调整和应用、硅光电池基本特性的研究；桂林理工大学博文管理学院王星编写拉伸法测量金属丝的弹性模量、测量热敏电阻的温度特性、示波器的原理及使用、光的等厚干涉实验（牛顿环）、弗兰克－赫兹实验、光纤传感器的设计与应用；桂林理工大学博文管理学院韦宁燕编写液体表面张力系数的测定、固定均匀弦振动的研究、动态法测定金属材料的弹性模量、迈克尔逊干涉仪的调节和使用、声光效应实验研究、光纤压力传感器实验。杨达莉负责统编和审稿。实验教材的编写实际上是同人们历年工作的总结，在编写本书时参阅了许多兄弟院校的相关教材，同时也得到本单位领导、物理教研室同行的热情帮助，在此表示衷心感谢。

由于编者知识水平和教学经验有限，书中错漏之处在所难免，恳请同行和广大读者批评指正。

编　者

2016年5月

contents | 目 录

绪 论

物理学从本质上说是一门实验科学。物理规律的研究一般都是以实验事实为基础，并不断接受实验的检验。物理学中的许多基本定律，如牛顿运动定律、动量守恒定律、库仑定律、法拉第电磁感应定律等，都是在大量实验的基础上总结出来的。因此，物理实验在物理学的发展过程中起着十分重要的作用。物理实验课与理论课教学具有同等重要的地位，两者既有深刻的内在联系，又有各自的任务和作用。

物理实验是对理工科大学生系统地进行实验方法和实验技能训练的开端，也是对学生进行科学实验训练的重要基础。大学物理实验课将对学生进行基础实验方法和技能的训练，特别是有效数字概念和误差理论的学习、运用和训练。物理实验教学的基本教学内容，如实验数据处理、误差分析与计算以及物理量的测量方法等基本训练，在理论课教学中是无法学到的。通过实验课的学习还有助于巩固和加深对理论课所学内容的理解。

一、物理实验课的目的

通过观察物理现象、模拟物理过程、测量物理量、探讨物理技术，使学习者：了解科学实验的基本组成和实验程序，掌握物理实验的基础知识；通过实验全过程（预习、操作和写实验报告）的训练，培养实验设计的基本能力、提出问题、分析和解决问题的能力、知识的应用能力以及报告的撰写能力；养成严肃认真的实验作风（遵守纪律、实事求是、一丝不苟、科学分析、认真细致）。

二、做好实验的三个步骤及要求

（一）课前预习

上课操作实验之前要明确实验目的，清楚实验内容、实验原理、仪器的工作原理和仪器的正确使用方法，并准备好实验所需测量数据原始记录表格。

（二）上课操作

做好实验并记录原始数据（填在表格中）。

1. 考勤

按上课时间提前 5 ~ 10 分钟进入实验室，进实验室时要带教材，要交上次实验的

实验报告，并在《实验室教学日志》上签到。一般不得请假，特殊情况（如生病）需出具证明（班主任或辅导员在请假条上签字并盖院系公章）。

2. 按实验步骤规范操作

实验前先检查实验仪器，仪器完好无损时，在《实验室仪器使用（借用）记录表》上签字；实验过程中如果仪器有问题应该及时报告教师，不得擅自换实验仪器。否则出现仪器损坏情况，将按有关规定予以处罚并降低本次实验成绩。实验前，认真听教师做简要的讲解。实验操作过程中要认真仔细，特别要注意仪器的正确使用方法和注意事项，若因操作不当造成器材损坏或仪器严重磨损的，要按规定赔偿。

3. 整个实验过程中不能随意走动，不能讲话影响他人

每组单独完成实验操作，并且每人都能够单独完成实验。若有不清楚的地方及时请教教师，切不可盲目从事。

4. 认真记录好原始数据，记录的实验数据要整洁

伪造或抄袭他人数据的，其数据无效。数据记录要经过教师检查无误并签字才能生效。

5. 保持实验室清洁，不允许在实验室内进食

实验完毕，整理好实验仪器，关闭电源，摆放好座椅。经教师允许后方可离开。

（三）课后进行数据处理，完成实验报告

实验报告要统一写在专用的实验报告纸上，字迹工整、文句简明、版面美观。一份完整的实验报告应包括实验名称、实验目的、实验仪器、实验原理、实验数据和数据处理、小结等几项内容。

1. 实验仪器

包括实验用的所有仪器、量具和材料的名称、型号和规格等。

2. 实验原理

写出简要的物理原理、主要的计算公式（不写推导过程）和必要的原理图（如电路图、光路图等）。

3. 实验数据和数据处理

把测得的原始数据和必要的中间计算结果认真地填写在设计好的记录表格中（不能用教师签字的那张原始数据代替该部分，原始数据粘贴在实验报告纸背面）；进行所求物理量的公式计算，并进行误差分析（要有公式，代入具体数据，有计算过程，有单位）；最后完整地表达结果：$x=\bar{x}\pm U(x)$（单位）。若有利用数据的作图要作在坐标纸上，若上机处理数据要有打印结果。

4. 小结

讨论分析所得结果。还可以包括问题讨论、思考题、体会和建议等，可以根据教师的要求来做。

第一章　数据处理基础知识

第一节　测量与误差

一、基本概念

（一）测量

测量就是将待测物体的某物理量与相应的标准进行定量比较，得到此物理量的测量值。测量结果数值的大小与所选用的单位有关。因此，表示一个被测对象的测量值时必须包括数值和单位。必要时还要给出测量所用的量具或仪器、测量方法及条件等。例如，测量一个小钢球的直径，使用螺旋测微计测得 9.506 mm，测量环境温度为 22.0 ℃。

测量单位的大小是科学地人为规定的。国际单位制（简称 SI）是世界唯一公认的科学单位制，它选定了 7 个基本物理量，即长度（m）、质量（kg）、时间（s）、电流（A）、热力学温度（K）、物质的量（mol）和发光强度（cd）作为基本单位。其他物理量的单位均由这些基本单位推导出来，称为导出单位（见附录 1）。

对物理量的测量，按测量方式通常可分为直接测量和间接测量。直接用测量工具或仪表对被测量进行的测量，称为直接测量。例如，用钢直尺测量长度，用秒表测量时间，用天平测量质量，用电流表测量电流，等等。而有些物理量无法直接测量，需通过测量其他量再由其函数关系计算得到被测量，这种测量称为间接测量。例如，测量一个圆柱体的密度 ρ，可通过测量其质量 m、直径 d 和高度 h，然后根据公式 $\rho=\dfrac{4m}{\pi d^2 h}$ 计算得出。

测量按照测量条件还可分为等精度测量和非等精度测量。在测量过程中，影响测量结果的各种条件不发生变化的多次测量称为等精度测量。反之，多次测量时，只要有一个测量条件发生了变化，这种测量则称为不等精度测量。例如，在相同的环境下，同一个人在同一台仪器上，采用同样的方法对同一被测量进行测量，这就是等精度测量，其数据的可靠程度是相同的。本书要求的都是等精度测量。

除了上面的分类方式外，还有其他分类方法。如单次测量与多次测量，接触测量

与非接触测量，静态测量和动态测量等。

（二）真值

所谓真值，是指被测量在特定的时间、特定的环境条件下客观存在的真实大小。它是一个理想的概念。实际测量中只有最佳值，通常取多次测量的平均值作为最佳值。

（三）测量误差

由于被测量的真值是无法测得的，不管使用多么精密的仪器，测量出来的结果总是真值的近似值。误差自始至终存在于一切科学实验和测量过程之中，测量结果都存在误差，这就是误差公理。测量误差可分为绝对误差和相对误差。

1. 绝对误差

绝对误差的定义：

$$\text{绝对误差} = \text{测量值} - \text{真值}$$

若某物理量的测量值为 x，真值为 a，则绝对误差为：

$$\Delta x = x - a \tag{1-1-1}$$

上式定义的测量误差反映了测量值偏离真值的大小和方向，因此称 Δx 为绝对误差。由于真值一般是得不到的，所以误差也无法计算。实际测量中是用多次测量的算术平均值 $\bar{x}$ 来代替真值，测量值 x 与算术平均值 $\bar{x}$ 之差称为偏差。

$$\Delta x = x - \bar{x} \tag{1-1-2}$$

2. 相对误差

绝对误差只能表示某一测量结果偏离真值的大小，但却不能说明不同测量结果的优劣。例如，测量长度为 10 m、绝对误差为 1 mm 的量与长度为 1 m、绝对误差为 1 mm 的量，两者相比绝对误差相同，但测量结果的准确程度却大不一样。因此，评价一个测量结果的准确程度，不仅要看绝对误差，还要看测量值本身的大小，即相对误差。相对误差定义为：

$$E_r = \frac{\Delta x}{\bar{x}} \times 100\% \tag{1-1-3}$$

上述第一个被测量的相对误差 $E_r = \frac{1}{10^4} \times 100\% = 0.01\%$，第二个被测量的相对误差 $E_r = \frac{1}{10^3} \times 100\% = 0.1\%$。

有时将测量值与理论值或公认值比较，则用百分误差 E_0 表示，即：

$$E_0 = \frac{|\text{测得值} - \text{理论值}|}{\text{理论值}} \times 100\%$$

（四）测量不确定度

由于被测量的真值不可测得，测量误差也不可得，所以我们只能给出被测量的最

佳估计值及对其不确定范围做出近似估计。测量不确定度是用来表征被测量值分散性的。

不确定度：表示一定置信概率下误差限值的绝对值，反映了对被测量值不能肯定的程度。

扩展不确定度：在95%置信概率下评定得到的不确定度。

例如，一袋大米的质量表示为50.0 kg ±0.4 kg，其含义是在95%置信概率下，其真值α落在区间［49.6 kg，50.4 kg］的可能性是95%，或者说对于任何一次测量，其测量值在区间［49.6 kg，50.4 kg］内的置信概率为95%（对正态分布而言）。

二、误差的分类

由于实验方法、仪器精度和环境条件的不同，误差存在于一切科学实验和测量过程中。误差按其性质和产生的原因可分为系统误差、随机误差和粗大误差三类。

（一）系统误差

在一定条件下（指方法、仪器、环境和人员），对同一物理量进行多次重复测量时，其测量结果总是偏向某一个方向，其数值按一定规律变化。这类误差就称为系统误差，其特点是确定性。系统误差产生的原因往往可知或能掌控，查明后应设法加以修正，清除其影响。

系统误差主要来源于仪器误差、方法误差、环境误差和人为误差四个方面。仪器误差是由仪器本身缺陷或没有按规定条件使用仪器造成的。如螺旋测微计零点不准、等臂天平不等臂、仪器未调水平或垂直、分光计读数标线与角度盘不同心、电表的示值与实际值不符等，这类误差采用适当的方法可以消除。方法误差是由于实验方法和理论不完善、实验所依据的理论公式为近似公式或者实验条件达不到理论要求等而引起的。如单摆测重力加速度时所用公式的近似性；伏安法测电阻时，没有考虑电表内阻的影响等。环境误差是由于实验的外部环境，如温度、湿度、光照、气压等与仪器要求的环境条件不一致而引起的误差。人为误差是由实验人员生理或心理特点，如最小分辨力、反应速度和固有习惯等所造成的误差。例如使用停表计时的时候，总是超前或滞后；用仪表读数时总是偏向一方斜视等。

（二）粗大误差

明显偏离了测量结果的误差称为粗大误差。它是由于实验者使用仪器方法不正确，或粗心大意读错、记错测量数据，或实验条件突变等原因造成的。在实验测量中要极力避免过失错误，在数据处理中应将粗大误差剔除掉。但在没有充分的依据时，不能按主观意愿轻易去除，应按一定的统计准则慎重地予以剔除。

（三）随机误差

即使消除了系统误差，在等精度条件下多次重复测量同一物理量时，仍不能得到

完全相同的结果。其测量值会分散在一定的范围内，所得误差时正时负，绝对值时大时小，既不能预测，也无法控制，呈现无规则的起伏。这种由于偶然的或不确定的因素所造成的每一次测量值无规则的涨落，称为随机误差，也称偶然误差。

随机误差的产生，一方面是由于测量过程中一些随机的无法控制的可变因素或不确定因素引起的，如由于人的感官灵敏度、周围环境干扰而导致读数的微小变化，或其他不可预测的随机因素的影响等。另一方面是由于被测对象本身的不稳定性引起的，如被测样品本身存在的微小差异。

随机误差就个体而言是不确定的，但在相同条件下，对同一量进行大量的重复测量，会发现随机误差服从一定的统计规律，因此我们可以用统计方法估算其对测量结果的影响。

三、随机误差的估算

（一）直接测量结果的确定和误差的估计

1. 单次直接测量

（1）单次直接测量结果的估计值

对某些测量量，由于使用的仪器精度足够高，并不需要进行多次测量，只需测量一次；有时候仪器的准确度较低，多次测量的结果相同；有些实验是在变化过程中进行测量的，只能测量一次等，这些情况就用单次测得值近似地表示被测量的真值。

（2）单次直接测量结果的误差估算

单次测量结果的误差一般用仪器的额定误差来表示。例如用0～25 mm的一级千分尺测量圆柱体的直径，从手册可查到示值误差为0.004 mm。当测量不能在正常状态下进行时，单次测量结果的误差还应考虑测量的实际情况。例如用秒表测量时间时，误差主要是由启动和停止按钮时手的反应速度不够快引起的，估计启动和停止各有0.1 s的误差，则估算误差为0.2 s。

（3）单次直接测量结果的表示

测量结果的完整表示除了测量值以外，还应包括测量误差——绝对误差和相对误差。这样测量结果的表达式为：

$$\begin{cases} x = \bar{x} \pm \Delta x \ (\text{单位}) \\ E_r = \dfrac{\Delta x}{\bar{x}} \ (\%) \end{cases} \tag{1-1-4}$$

在上述例子中，用0～25 mm的一级千分尺测量圆柱体的直径D为9.054 mm，从手册可查到示值误差为0.004 mm，则此单次测量的结果表示为：

$D = (9.054 \pm 0.004)\,\text{mm}$

$E_r = \dfrac{0.004}{9.054} \times 100\% = 0.044\%$

2. 等精度多次直接测量

大量的数据表明，随机误差的总体服从一定的统计规律，其中最典型的是高斯分布，又称正态分布（具体请参看数理统计相关书籍），其分布曲线如图 1 - 1 - 1 所示。图1 - 1 - 1 中的横坐标为随机误差 δ，纵坐标表示随机误差出现的概率 $f(\delta)$。

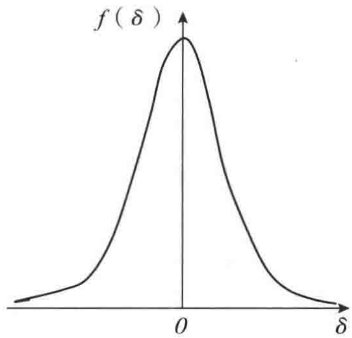


图 1 - 1 - 1　随机误差的正态分布

从图 1 - 1 - 1 中可以看到，其特征如下。

单峰性：绝对值小的误差出现的概率大，绝对值大的误差出现的概率小。

有界性：绝对值非常大的误差出现的概率趋于零，即随机误差分布在有限范围内。

对称性：绝对值相等的正负误差出现的概率相同。

由此可见，随机误差虽因不可预知而无法避免，但却可以通过多次测量，利用其统计规律而实现互相抵偿，因而能找到真值的最佳估计值（又叫最佳近似值或最近真值）。

（1）等精度多次直接测量结果的最佳估计值——算术平均值

在相同条件下对一个物理量进行了 n 次独立的直接测量，所得测量值为 x_1，x_2，…，x_n，其算术平均值为：

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i \qquad (1-1-5)$$

在无系统误差或已消除系统误差的情况下，当测量次数 $n \to \infty$ 时，由随机误差的抵偿性可知，多次测量的平均值 $\bar{x}$ 是真值 x_0 的最佳估计值。或者说测量次数越多，多次测量的算术平均值就越趋于真值。

（2）等精度多次直接测量结果的随机误差

对物理量 x 进行多次测量时，其算术平均值的绝对误差可以用算术平均误差和算术平均值的标准误差来表示。

①算术平均误差。将各次测量值与平均值之差的绝对值求和再除以测量次数 n，即得到多次测量值的算术平均误差，即：

$$\Delta x = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} |x_i - \bar{x}| \qquad (1-1-6)$$

②算术平均值的标准误差。由统计理论可以证明，算术平均值的标准误差用式（1－1－7）表示：

$$\sigma_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2} \tag{1-1-7}$$

其中，n 为测量次数，x_i 为 n 次测量中第 i 次测量值，$\bar{x}$ 为 n 次测量的算术平均值。在图 1－1－1 正态分布曲线下的总面积表示各随机误差出现的总概率为 100%，给定的区间不同，误差出现的概率也不同。算术平均值的标准误差的统计意义是：待测物理量落在$[\bar{x}-\sigma_{\bar{x}},\ \bar{x}+\sigma_{\bar{x}}]$区间内的概率为 68.3%，落在$[\bar{x}-2\sigma_{\bar{x}},\ \bar{x}+2\sigma_{\bar{x}}]$区间内的概率为 95.4%，落在$[\bar{x}-3\sigma_{\bar{x}},\ \bar{x}-3\sigma_{\bar{x}}]$区间内的概率为 99.7%。

算术平均误差只是粗略地反映了测量的误差大小，而标准误差则反映了误差的分布，因此用算术平均值的标准误差来表示算术平均值的误差更合理。不过算术平均误差计算比较简单，在要求不高或数据离散程度不大时，还是一种比较方便的方法。

（3）等精度多次直接测量结果的表示

对于多次直接测量而言，其测得值为算术平均值，其误差用平均值的标准误差来表示。这样测量结果的表达式为：

$$\begin{cases} x = \bar{x} \pm \sigma_{\bar{x}}\ (\text{单位}) \\ E = \dfrac{\sigma_{\bar{x}}}{\bar{x}}\ (\%) \end{cases} \tag{1-1-8}$$

【例 1】 利用千分尺测量钢球的直径，共测量 6 次。消去系统误差后，所得测量值分别为：$d_1=2.003$，$d_2=2.001$，$d_3=1.996$，$d_4=1.998$，$d_5=2.004$，$d_6=1.997$，其中单位为 mm。求钢球的直径及其标准误差，并将结果表示出来。

解：先求出钢球直径的算术平均值为：

$$\bar{d} = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6} d_i = 2.000\ (\text{mm})$$

将各次测量值减去平均值得到各次测量的绝对误差为（单位为 mm）：

$\Delta d_1=0.003$，$\Delta d_2=0.001$，$\Delta d_3=-0.004$，$\Delta d_4=-0.002$，$\Delta d_5=0.004$，$\Delta d_6=-0.003$

由式（1－1－7）可以求得算术平均值的标准误差为：

$$\sigma_{\bar{d}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(d_i-\bar{d})^2}{n(n-1)}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{6}(\Delta d_i)^2}{6\times(6-1)}} = 0.001\ (\text{mm})$$

于是测量结果为：

$$d = \bar{d} \pm \sigma_{\bar{d}} = 2.000 \pm 0.001\ (\text{mm})$$

$$E = \frac{\sigma_{\bar{d}}}{\bar{d}} \times 100\% = \frac{0.001}{2.000}\times 100\% = 0.050\%$$

注意：一般大学物理实验中，绝对误差只取一位有效数字，相对误差取两位有效

数字。

（4）等精度多次测量的次数确定

增加测量次数 n 可以减少随机误差，但在 n 较大时随机误差的减少已经很不明显。所以，在物理实验中，实际测量次数一般在 5 ~ 10 次。片面地增加测量次数，不仅误差的减小不明显，而且拖长工作时间，环境条件的不变性也很难保证。

（二）间接测量结果随机误差的计算——标准误差的传递与合成

在物理实验中，某些物理量通常只能通过另外一些物理量间接计算得到。由于直接测量量存在误差，间接测量量也不可避免地存在误差，由直接测量量的误差引起的间接测量量的误差称为误差传递。

1. 误差传递的基本公式

设间接测量量 y 是由相互独立的多个直接测量量 x_1，x_2，…，x_n 通过函数关系 $y = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 计算得到。由于每个直接测量量在测量过程中都存在误差 Δx_1，Δx_2，…，Δx_n，那么间接测量量也存在误差 Δy。Δx_1，Δx_2，…，Δx_n 与数学中自变量的增量相似，Δy 与函数的增量相似。由高等数学函数增量和全微分公式有：

$$\Delta y = \left|\frac{\partial f}{\partial x_1}\right|\Delta x_1 + \left|\frac{\partial f}{\partial x_2}\right|\Delta x_2 + \cdots + \left|\frac{\partial f}{\partial x_n}\right|\Delta x_n \qquad (1-1-9)$$

或

$$\mathrm{d}y = \frac{\partial f}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\mathrm{d}x_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\mathrm{d}x_n \qquad (1-1-10)$$

如果将 Δx_1，Δx_2，…，Δx_n 视为直接测量量的误差，则 Δy 为间接测量量的误差。式（1-1-9）称为误差传递基本公式。其中，$\frac{\partial f}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1$，$\frac{\partial f}{\partial x_2}\mathrm{d}x_2$，…，$\frac{\partial f}{\partial x_n}\mathrm{d}x_n$ 称为各直接测量量的分误差，$\frac{\partial f}{\partial x_1}$，$\frac{\partial f}{\partial x_2}$，…，$\frac{\partial f}{\partial x_n}$则称为误差传递系数。式（1-1-9）说明，一个测量量的误差对总误差的贡献，不仅取决于本身误差的大小，还与误差传递系数有关。

如果 $y = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 是积或商的函数关系，为了简便起见，将函数关系式两边取对数后再求全微分，即先算 $\ln y = \ln f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，然后再求全微分，得到误差传递的基本公式。

$$\frac{\Delta y}{y} = \left|\frac{\partial \ln f}{\partial x_1}\right|\Delta x_1 + \left|\frac{\partial \ln f}{\partial x_2}\right|\Delta x_2 + \cdots + \left|\frac{\partial \ln f}{\partial x_n}\right|\Delta x_n \qquad (1-1-11)$$

或

$$\frac{\mathrm{d}y}{y} = \frac{\partial \ln f}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1 + \frac{\partial \ln f}{\partial x_2}\mathrm{d}x_2 + \cdots + \frac{\partial \ln f}{\partial x_n}\mathrm{d}x_n \qquad (1-1-12)$$

式（1-1-11）实际上是以相对误差形式表示的误差传递的基本公式。

若间接测量量是由独立相加减的函数关系确定，先计算间接测量量的绝对误差，再求相对误差比较方便；若间接测量量是由积或商的函数关系确定，先计算相对误差，再求绝对误差比较方便。

2. 间接测量量标准误差传递公式

设 x_1，x_2，…，x_n 之间为相互独立的直接测量量，它们各自的标准误差分别为 σ_{x_1}，σ_{x_2}，…，σ_{x_n}，且它们的测量次数足够多，可以证明间接测量量的标准误差为：

$$\sigma_{\bar{y}}=\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2\sigma_{x_1}^2+\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2\sigma_{x_2}^2+\cdots+\left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^2\sigma_{x_n}^2} \tag{1-1-13}$$

或

$$\frac{\sigma_{\bar{y}}}{y}=\sqrt{\left(\frac{\partial \ln f}{\partial x_1}\right)^2\sigma_{x_1}^2+\left(\frac{\partial \ln f}{\partial x_2}\right)^2\sigma_{x_2}^2+\cdots+\left(\frac{\partial \ln f}{\partial x_n}\right)^2\sigma_{x_n}^2} \tag{1-1-14}$$

式（1－1－14）也是以相对误差形式表示的间接测量量的标准误差公式。

3. 间接测量的结果表示

$$\begin{cases} x=\bar{x}\pm\sigma_{\bar{x}}\ (\text{单位}) \\ E=\dfrac{\sigma_{\bar{x}}}{\bar{x}}\ (\%) \end{cases} \tag{1-1-15}$$

【例 2】 推导圆环面积 $s=\frac{\pi}{4}(D^2-d^2)$ 的误差传递公式。

解：$\Delta S=\left|\frac{\partial S}{\partial D}\right|\Delta D+\left|\frac{\partial S}{\partial d}\right|\Delta d=\frac{\pi}{4}(2D\Delta D+2d\Delta d)=\frac{\pi}{2}(D\Delta D+d\Delta d)$

$E_S=\frac{\Delta S}{S}=\frac{2D}{D^2-d^2}\cdot\Delta D+\frac{2d}{D^2-d^2}\cdot\Delta d$

【例 3】 等精度多次测量某圆柱体的高 h 和直径 d，测量结果如下：

$h=\bar{h}\pm\sigma_{\bar{h}}=$（13.322 ± 0.006）cm

$d=\bar{d}\pm\sigma_{\bar{d}}=$（1.541 ± 0.005）cm

计算圆柱体的体积 V 及其误差。

解：$\bar{V}=\frac{\pi}{4}\bar{d}^2\ \bar{h}=\frac{1}{4}\times3.1416\times1.541^2\times13.322=24.847\ \text{cm}^3$

$E_V=\frac{\Delta V}{V}=\left|\frac{\partial \ln V}{\partial d}\right|\Delta d+\left|\frac{\partial \ln V}{\partial h}\right|\Delta h=\frac{2\Delta d}{\bar{d}}+\frac{\Delta h}{\bar{h}}=2\times\frac{0.005}{1.541}+\frac{0.006}{13.322}=0.69\%$

$\Delta V=\bar{V}E_V=24.847\times0.69\%=0.2\text{cm}^3$

圆柱体体积测量结果为：

$V=\bar{V}\pm\Delta V=$（24.8 ± 0.2）cm^3

其相对误差为：

$E_V=0.69\%$

若用标准误差计算，则有：

$E_V=\sqrt{\left(\frac{\partial \ln V}{\partial d}\right)^2\sigma_{\bar{d}}^2+\left(\frac{\partial \ln V}{\partial h}\right)^2\sigma_{\bar{h}}^2}=\sqrt{\frac{4\sigma_{\bar{d}}^2}{\bar{d}^2}+\frac{\sigma_{\bar{h}}^2}{\bar{h}^2}}=\sqrt{\frac{4\times0.005^2}{1.541^2}+\frac{0.006^2}{13.322^2}}=0.65\%$

$\Delta V=\bar{V}E_V=24.847\times0.65\%=0.2\ \text{cm}^3$

测量结果：

$V=\overline{V}\pm\Delta V=(24.8\pm0.2)\ \text{cm}^3$

$E_V=0.65\%$

常用函数的相关公式如表 1－1－1 至表 1－1－2 所示。

表 1－1－1　　常用函数误差传递的基本公式

函数关系式	误差传递公式
$N=x\pm y$	$\Delta N=\Delta x+\Delta y$
$N=xy,\ N=\frac{x}{y}$	$\frac{\Delta N}{N}=\frac{\Delta x}{x}+\frac{\Delta y}{y}$
$N=kx$	$\Delta N=k\Delta x,\ \frac{\Delta N}{N}=\frac{\Delta x}{x}$
$N=\sqrt[k]{x}$	$\frac{\Delta N}{N}=\frac{1}{k}\cdot\frac{\Delta x}{x}$
$N=\frac{x^k y^m}{z^n}$	$\frac{\Delta N}{N}=k\cdot\frac{\Delta x}{x}+m\cdot\frac{\Delta y}{y}+n\cdot\frac{\Delta z}{z}$
$N=\sin x$	$\Delta N=\lvert\cos x\rvert\Delta x,\ \frac{\Delta N}{N}=\text{ctg}x\Delta x$
$N=\ln x$	$\Delta N=\frac{\Delta x}{x}$

表 1－1－2　　常用函数的标准偏差传递公式

函数关系式	标准偏差传递公式
$N=x\pm y$	$S_N=\sqrt{S_x^2+S_y^2}$
$N=xy,\ N=\frac{x}{y}$	$\frac{S_N}{N}=\sqrt{\left(\frac{S_x}{x}\right)^2+\left(\frac{S_y}{y}\right)^2}$
$N=kx$	$S_N=kS_x,\ \frac{S_N}{N}=\frac{S_x}{x}$
$N=\sqrt[k]{x}$	$\frac{S_N}{N}=\frac{1}{k}\cdot\frac{S_x}{x}$
$N=x^k$	$\frac{S_N}{N}=k\cdot\frac{S_x}{x}$
$N=\frac{x^k y^m}{z^n}$	$\frac{S_N}{N}=\sqrt{k^2\left(\frac{S_x}{x}\right)^2+m^2\left(\frac{S_y}{y}\right)^2+n^2\left(\frac{S_x}{z}\right)^2}$
$N=\sin x$	$S_N=\lvert\cos x\rvert S_x$
$N=\ln x$	$S_N=\frac{S_x}{x}$

四、测量不确定度

根据国际计量局关于“实验不确定度的规定建议书 INC－1（1980）”的精神，采