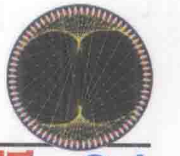
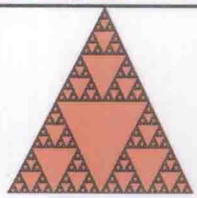
方程

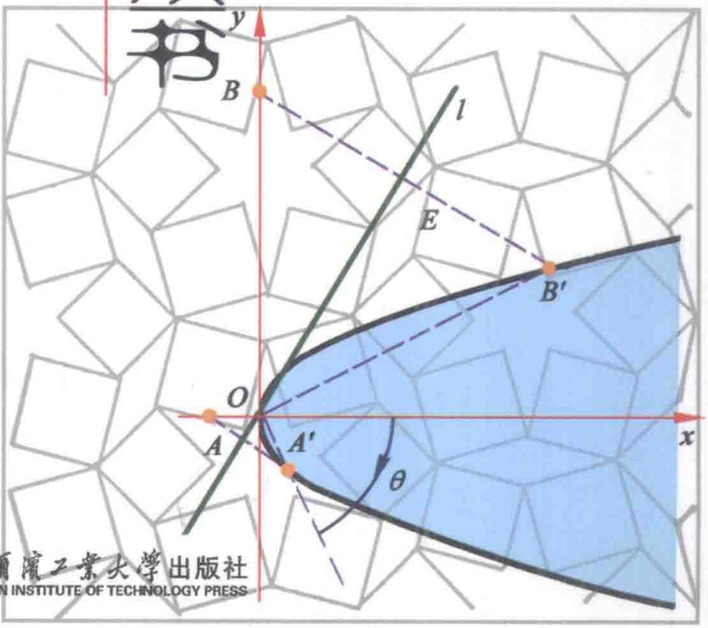
新编中学数学解题方法1000招丛书



高中版 04



刘培杰数学工作室 编



哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

高中版 04

新编中学数学解题方法1000招丛书

方程

刘培杰数学工作室 编

数本难穷，吾欲以力强穷之，彼其数不惟不能得其凡，而吾之力且惫矣。然则数果不可以穷耶？既以名之数矣，则又何为而不可穷也。故谓数为难穷，斯可；谓数为不可穷，斯不可。何则？彼其冥冥之中，故有昭昭者存。夫昭昭者其自然之数也，非自然之数其自然之理也。数一出于自然，吾欲以力强穷之，使隶首复生，亦未如之何也已。苟能推自然之理以明自然之数，则虽远而乾端坤倪，

圆海镜序》

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内容提要

本书以专题的形式对高中数学中方程的重点、难点进行了归纳、总结，涵盖面广，内容丰富，可使学生深入理解方程概念，灵活使用解题方法，可较大程度地提高学生在各类考试中的应试能力.

本书适合中学生、中学教师以及数学爱好者阅读参考.

图书在版编目(CIP)数据

新编中学数学解题方法1000招丛书. 方程/刘培杰数学工作室编. —哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社，2014. 1

ISBN 978-7-5603-4465-2

Ⅰ. ①新… Ⅱ. ①刘… Ⅲ. ①中学数学课—高中—题解 Ⅳ. ①G634. 605

中国版本图书馆CIP数据核字(2013)第291521号

策划编辑　刘培杰　张永芹
责任编辑　张永芹　宋晓翠
封面设计　孙茵艾
出版发行　哈尔滨工业大学出版社
社　　址　哈尔滨市南岗区复华四道街10号　邮编150006
传　　真　0451-86414749
网　　址　http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷　哈尔滨市石桥印务有限公司
开　　本　787mm×1092mm　1/16　印张12　字数276千字
版　　次　2014年1月第1版　2014年1月第1次印刷
书　　号　ISBN 978-7-5603-4465-2
定　　价　28.00元

总序

俗话说:"自古华山一条路",如果将学数学比作爬山,那么精通之道也只有一条,那就是做题,做大量的习题.

华罗庚曾将光看书不做习题比作"入宝山而空返".

著名数学家苏步青教授读书时为学好微积分,光是不定积分题就做了近万道.近年来,参加国际中学生数学奥林匹克的中国选手们,则更是因为遍解难题,才得以屡获金牌.正所谓"踏遍坎坷成大路".

然而解数学题却不是一件容易的事,世界级解题专家、美国数学教育家波利亚曾不无悲观地说:"解题同钓鱼术一样永远不会学会".但解题作为一项有规则的活动还是有一些方法可学,至少是可模仿的.华侨大学的王志雄教授曾说出这样的体会:"相对于问题似欲爆炸,题型不断更新,方法是较少也较稳定,如能较深入地、熟练地、灵活地掌握一些重要的解题方法,将使我们如乘快艇,得以优游于题海之上,达到数学王国的彼岸."

近年来,由《美国数学月刊》前主编、美籍加拿大老数学家哈尔莫斯(Halmos, Paul Richard)一句"问题是数学的心脏"的惊人之语,将解题运动推向高潮.1987年在上海举行的国际数学教育研讨会上,美国南伊利诺伊大学的J·P·贝克(Baker)教授在他的以《解题教学——美国当前数学教学的新动向》为题的报告论文中指出:"如果说确有一股贯穿20世纪80年代初期的潮流的话,那就是强调解题(Problem Solving)的潮流".

为了配合这股潮流，世界各国大量出版数学问题与解题的丛书，真是汗牛充栋，精品纷现．光是著名的斯普林格出版社(Springer Verlug)从1981年开始出版的一套高水平的《数学问题丛书》至今就出版了20多种．我国教育界及出版界十分重视这类书的出版工作，早在1949年2月，旧中国教育部曾举行会议为补救当时数学教育质量低下提出了四点建议，其中一条是提倡学生自己动手解题并“希望各大书局大量编印中学解题参考用书”．近些年我国各大出版社出版了一些中学数学教育方面的丛书，如江苏教育社的《数学方法论丛书》(13册)，北大出版社的《数学奥林匹克》系列及翻译的美国的《新数学丛书》，湖南教育社的《走向数学丛书》，但直至今天似乎还没有迹象表明要推出一套大型解题方法丛书．

哈尔滨工业大学出版社作为一“边陲小社”，出版这样一套丛书，尽管深感力所不逮，但总可算做一块引玉之砖．

最后编者有两点忠告：一是本丛书是一套入门书，不能包解百题，本丛书在编写之初曾以“贪大求全”为原则，试图穷尽一切方法，妄称“解题精技，悉数其间”．然而这实在是不可能的，也是不必要的．正所谓“有法法有尽，无法法无穷”．况且即使是已有的方法也不能生搬硬套．我国继徐光启和李善兰之后的清末第三大数学家华衡芳(1835—1902)曾指出：解题要随机应变，不能“执一而论”，死记硬背为“呆法”，“题目一变即无所用之矣”，须“兼综各法”以解之，方可有效．数学家惠特霍斯(Whitworth)说过“一般的解题之成功，在很大的程度上依赖于选择一种最适宜的方法”．

二是读者读本丛书一定要亲自动手解题．正如陕西师大罗增儒教授所指出：解题具有探索性与实战性的特征，解题策略要在解题中掌握．

最后，我们送给读者一句德国著名数学家普林斯海姆(1850—1941，Pringsheim，Alfred)的名言．

不下苦功是不能获得数学知识的，而下苦功却是每个人自己的事，数学教学方法的逻辑严格性并不能在较大程度上去增强一个人的努力程度．

愿读完本丛书后，解题对你不再是难事．

刘培杰

2013年12月15日

于哈工大

前言

华罗庚是中国人心目中的数学楷模，他是怎样出名的呢？这源自于他以一个杂货铺小伙计的身份在上海《科学》杂志上发表了一篇名为《论苏家驹之代数五次方程解法不成立之理由》的论文，被时任清华大学算学系主任的留法博士熊庆来发现，于是他被请到清华大学. 由此可见代数方程之重要.

代数方程(algebraic equation)指多项式方程，其一般形式为

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$

是代数学中最基本的研究对象之一.

在20世纪以前，解方程一直是代数学的一个中心问题. 二次方程的求解问题历史久远. 在巴比伦泥板中(公元前18世纪)就载有二次方程的问题. 古希腊人也解出了某些二次方程. 中国古代数学家赵爽(公元3世纪)在求解一个有关面积的问题时，相当于给出了二次方程 $-x^2+kx=A$ 的一个根 $x=\frac{1}{2}(k-\sqrt{k^2-4A})$. 7世纪印度数学家婆罗摩笈多给出方程 $x^2+px-q=0$ 的一个根

的公式 $x=\frac{1}{2}(\sqrt{p^2+4q}-p)$. 一元二次方程的一般解法是 9 世纪阿拉伯数学家花拉子米建立的.

对三次方程自古以来也有很多研究,在巴比伦泥板中,就有相当于三次方程的问题. 阿基米德也曾讨论过方程 $x^3+a=cx^2$ 的几何解法. 11 世纪波斯数学家奥马·海亚姆创立了用圆锥曲线解三次方程的几何方法,他的工作可以看作是代数与几何相结合的最早尝试. 但是三、四次方程的一般解法(即给出求根公式),却直到 15 世纪末也还没有被发现. 意大利数学家帕乔利在 1494 年出版的著作中还说:"$x^3+mx=n$, $x^3+n=mx$ (m, n 为正数) 现在之不可解,正像化圆为方问题一样." 但到 16 世纪上半叶,三次方程的一般解法就由意大利数学家费罗、塔塔利亚和卡尔丹等得到,三次方程的求根公式最早出现在卡尔丹的《大术》(1545 年) 之中. 四次方程的求根公式由卡尔达诺的学生费拉里首先得到,也记载于卡尔达诺的《大术》中.

在16世纪末到17世纪上半叶,数学家们还探讨了如何判定方程的正根、负根和复根的个数. 卡尔达诺曾指出一个实系数方程的复根是成对出现的,牛顿在他的《广义算术》中证明了这一事实. 笛卡儿在他的《几何学》中给出了正负号法则(通称笛卡儿法则),即多项式方程 $f(x)=0$ 的正根的最多数目等于系数变号的次数,而负根的最多数目等于两个正号和两个负号连续出现的次数. 但笛卡儿本人没有给出证明,这个法则是 18 世纪的几个数学家证明的. 牛顿在《广义算术》中给出确定正负根数目上限的另一法则,并由此推出至少能有多少个复数根.

研究代数方程的根与系数之间的关系,也是这一时期代数学的重要课题. 卡尔达诺发现方程所有根的和等于 x^{n-1} 的系数取负值,每两个根的乘积之和等于 x^{n-2} 的系数,等等. 韦达和牛顿也都在他们的著作中分别叙述了方程的根与系数之间的关系,现在称这个结果为韦达定理. 这些工作在 18 世纪发展为关于根的对称函数的研究.

另一个重要课题是今天所谓的因子定理. 笛卡儿在他的《几何学》中指出, $f(x)$ 能被 $(x-a)$ 整除,当且仅当 a 是 $f(x)=0$ 的一个根. 由此及其他结果,笛卡儿建立了求多项式方程有理根的现代方法. 他通过简单的代换,把方程的首项化为 1,并使所有系数都变为整数,这时他判断,原方程的各有理根必定是新

方程常数项的整数因子.牛顿还发现了方程的根与其判别式之间的关系,他在《广义算术》中还给出了确定方程根上界的一些定理.此外,数学归纳法也在16世纪末期开始明确地用于代数学中.

18世纪以后,数学家们的注意力开始转向寻求五次以上方程的根式解.经过两个多世纪的努力,在欧拉、范德蒙德、拉格朗日、鲁菲尼等人工作的基础上,在19世纪上半叶,阿贝尔和伽罗瓦几乎同时证明了五次以上的方程不能用公式求解.他们的工作开创了用群论的方法来研究代数方程的解的理论,为抽象代数学的建立开辟了道路.

代数方程理论的另一个问题是一个方程能有多少个根.中世纪阿拉伯和印度的数学家们都已认识到二次方程有两个根.到了16世纪,意大利数学家卡尔达诺引入了复数根,并认识到一个三次方程有3个根,一次四次方程有4个根等等.荷兰数学家吉拉尔在1629年曾推测并断言任意一个n次方程,如果把复根算在内并且k重根算作k个根的话,那它就有n个根.这就是代数基本定理.这个定理在18世纪被许多著名的数学家认识到并试图证明之,直到1799年高斯才给出第一个实质性的证明.

对代数方程理论的研究,使数学家们引进了在近世代数中具有头等重要意义的新概念,这些新概念很快被发展成为有广泛应用的代数理论.

方程的问题曾经是数学的中心问题,笛卡儿认为自然界中的一切事物都可以用数学来描述,而所有的数学问题又都可以转化为方程问题(几何问题原则上都可用他发明的解析几何转化为代数方程问题),这个时期一个人数学水平的高低完全取决于他解方程的能力.所以历史上第一次有记载的数学竞赛就是1535年2月22日在意大利米兰大教堂举行的由塔塔利亚与费罗之间的对决,每人30道解三次方程题,结果由于塔塔利亚发现了新方法在两个小时内全部解出而大获全胜,今天数学手册中三次方程的解法公式虽称为卡尔丹公式,但实际上是塔塔利亚发现的.

后来从事方程研究的数学家的下场都不妙,意大利的鲁菲尼(P. Ruffini)被人遗忘.挪威数学家阿贝尔(N. H. Abel)死于贫困,年仅27岁.法国数学家伽罗瓦(E. Galois)死于决斗,年仅21岁.

下面,我们简要回顾一下高次代数方程求根(finding roots of polynomial equation)的历史.

左边为多项式的方程

$$P_n(x) \equiv a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

称为 n 次代数方程，又称多项式方程，其中 $n=1,2,\cdots$，a_k 是实系数或复系数，$a_0 \neq 0$. 当 $n>1$ 时，叫作高次代数方程，其次数就是 n. 左边多项式的零点就是对应代数方程的根.

人们很早就探索了高次方程的数值解求法的问题. 巴比伦泥板中有平方表和立方表，利用它们可解某些特殊的二次和三次方程；中国古人则相当系统地解决了求高次方程数值解的问题：《九章算术》以算法形式给出了求二次方程及正系数三次方程正根的具体计算程序：7 世纪王孝通也给出求三次方程正根的数值解法；11 世纪贾宪《黄帝九章算法细草》创："开方作法本源图"，用"立成释锁法"解三次和三次以上的高次方程，同时他又提出一种更为简便的"增乘开方法"，在 13 世纪由秦九韶《数书九章》的"正负开方术"最后完成，提供了一个用算筹布列解任何数字方程的可行可计算的算法，可求出任意次代数方程的正根. 阿拉伯人对高次代数方程的数值解法亦有研究，花拉子米（9 世纪人）第一个给出了二次方程的一般解法，奥马·海亚姆（1100 年）给出了一些特殊三次方程的解法. 1736 年出版的牛顿的《流数法》一书中，给出了著名的高次代数方程的一种数值解法，1690 年 J·拉福生也提出了类似的方法，它们的结合就是现代常用的方法——牛顿法，是一种广泛用于高次代数方程和方程组求解的迭代法，亦称为切线法，一直为数学界所采用，不断产生新的变形，如修正牛顿法、拟牛顿法等. 1797 年，高斯给出"代数基本定理"，指出高次代数方程根的存在性. 1819 年，霍纳提出求高次方程数值解的另一种方法——霍纳法，其思想及计算程序与秦九韶的方法相近，类似的方法鲁菲尼在 1804 年也提出过，霍纳法也有着广泛的应用，它的现代改进形式叫作劈因子法. 现在常用的高次代数方程数值解法还有伯努利法和劳思表格法等.

今天人们已把方程当成了日常语言，在各个方面大量使用，比如

匹兹堡领导力基金会主席兼 CEO John Stahl-Wert 写了一本新书叫《一万匹马》(Ten Thousand Horses) 中提出了一个信任方程式

$$T \times 3C = E$$

T——Trust（信任）

C——Challenge（挑战）

C——Charge(实施)

C——Cheer(喝彩)

E——Engagement(投入)

当然,人们最熟悉的还是爱因斯坦提出的那个著名公式

$$E=cm^2$$

学好方程,它将会使你终身受益.

刘培杰

2013年12月11日

于哈工大

目录

第一编　解题方法编

怎样用初等方法解函数方程　/3
怎样用图象法解一类含参数方程　/8
怎样巧解形状整齐的方程组　/10
怎样用多项式的性质证明恒等式　/13
怎样利用函数的性质求方程的解　/15
怎样用图象法确定二次方程中参数的取值范围　/17
怎样解含参数的对数方程　/20
怎样对对数方程的根进行舍取　/23
怎样解 $f(x)\sqrt{h(x)-g^2(x)}+g(x)\sqrt{h(x)-f^2(x)}=h(x)$ 型方程　/26
怎样用最小周期解三角函数方程　/28
怎样应用函数值相同解三角函数方程　/30
怎样运用三角函数知识讨论方程解的个数　/33
怎样在指定区间上解三角函数方程　/35
怎样判断三角函数方程的解集是否相等　/39
怎样对三角函数方程通值式进行化简与对增根进行分离　/44
怎样求方程 $x^2f(x)+xg(x)+q(x)=0$ 的实根($f(x)$或 $g(x)$为三角函数)　/51
怎样求多动点轨迹方程　/54

怎样求伴随曲线的方程　/59
怎样应用两直线方程的合成　/64
怎样解有关圆锥曲线的割线方程问题　/66
怎样利用两条二次曲线公共点的个数与方程的判别式解题　/71
怎样用曲线系方程解题　/74
怎样巧用曲线系方程解题　/76
怎样应用曲线方程 $f(x,y)+\lambda g(x,y)=0$ 解题　/78
怎样求一类曲线系的方程　/81
怎样在曲线系方程中应用退化圆锥曲线　/85
怎样应用直线参数方程 $\begin{cases}x=x_0+t\cos\theta\\y=y_0+t\sin\theta\end{cases}$　/89
怎样妙用直线参数方程　/95
怎样用直线参数方程的变式解题　/98
怎样利用直线系讨论参数方程的有解条件　/104
怎样推导并应用抛物线参数方程　/106
怎样判定参数方程的等价性　/112
怎样用简单方法求关于点或直线对称的曲线方程　/117
怎样利用复数方程解题　/120
怎样在圆的复数方程中使用配积技巧　/124
怎样求复数方程中参数的取值范围　/126
怎样运用复数求轨迹方程　/129
怎样利用复数求一类伴随曲线的方程　/132
怎样运用函数思想解决方程有解问题的两条途径　/137
怎样用初等求法求过一点切线方程　/141
怎样巧用条件等式 $a^3+b^3+c^3=3abc$　/143
怎样利用多变量方程组求轨迹方程　/147
怎样求方程整体解　/152
怎样解高考中的直线方程问题　/155

第二编　试题精粹编

第一编

解题方法编

怎样用初等方法解函数方程

一、定义法

定义法是根据函数本质属性，通过凑项、配方求出 $f(x)$ 的表达式的方法.

例 1　设 $f(x)$ 是定义在实数集 $\mathbf{R}$ 上的函数，且满足 $f(x-2)=x^2-7x+11$，求 $f(x)$.

分析　$f(x-2)$ 是以 $x-2$ 为自变量的函数，欲求 $f(x-2)$ 与 $x-2$ 的对应关系，需把已知式右边凑拼配方成为以 $x-2$ 为自变量的多项式.

解　$f(x-2)=(x^2-4x+4)-3(x-2)+1=(x-2)^2-3(x-2)+1$

故
$$f(x)=x^2-3x+1$$

例 2　已知 $f(x+\frac{1}{x})=x^2+\frac{1}{x^2}$，$\varphi(x+\frac{1}{x})=x^3+\frac{1}{x^3}$.

(1) 求 $f(\varphi(x))$；

(2) 求证：$f(\varphi(x))=\varphi(f(x))$.

解　(1) 因为 $f(x+\frac{1}{x})=(x+\frac{1}{x})^2-2$，所以 $f(x)=x^2-2$. 又因为

$$\varphi(x+\frac{1}{x})=(x+\frac{1}{x})(x^2-1+\frac{1}{x^2})=(x+\frac{1}{x})[(x+\frac{1}{x})^2-3]=$$
$$(x+\frac{1}{x})^3-3(x+\frac{1}{x})$$

所以 $\varphi(x)=x^3-3x$. 故
$$f(\varphi(x))=(x^3-3x)^2-2=x^6-6x^4+9x^2-2$$

(2) 因为
$$\varphi(f(x))=(x^2-2)^3-3(x^2-2)=x^6-6x^4+9x^2-2$$

所以
$$f(\varphi(x))=\varphi(f(x))$$

二、换元法

换元法是通过设中间变量，找出函数对于中间变量的对应关系，从而求出 $f(x)$ 的表达式的方法.

例 3　已知 $f(2x-1)=8x^3-6x$，求 $f(x)$.

分析　本题可用定义法来解，但亦可用下法.

解　令 $y=2x-1$，则 $x=\frac{y+1}{2}$，所以

$$f(y)=8(\frac{y+1}{2})^3-6\cdot\frac{y+1}{2}=y^3+3y^2+3y+1-3y-3=y^3+3y^2-2$$

故
$$f(x)=x^3+3x^2-2$$

例 4　若 $x>0$ 且满足 $f(\frac{1+x}{x})=\ln\frac{2x}{1+2x}$，求 $f(x)$.

分析 函数 $f(\frac{1+x}{x})$ 的自变量是 $\frac{1+x}{x}$,其对应规律是 $\ln\frac{2x}{1+2x}$,若用定义法不易求,用换元法可转化为代数运算,则极易求解.

解 令 $t=\frac{1+x}{x}$,则 $x=\frac{1}{t-1}$. 所以

$$f(t)=\ln\frac{2\frac{1}{t-1}}{1+2\frac{1}{t-1}}=\ln\frac{2}{t+1}$$

故

$$f(x)=\ln\frac{2}{x+1}$$

注 若所给函数的自变量不是一次式或对应规律复杂,往往采用换元法.

三、待定系数法

待定系数法是根据已知条件先确定 $f(x)$ 的次数,写出它的一般表达式,然后利用多项式的恒等定理确定它的待定系数,求出 $f(x)$ 表达式的方法.

例 5 求实系数函数 $f(x)$,使 $f(f(f(x)))=8x+21$.

分析 因为对于线性函数 $f(x)$,其复合函数 $f(f(f(x)))$ 不改变 $f(x)$ 的次数,所以可设 $f(x)$ 是线性函数.

解 设 $f(x)=kx+b(k\neq 0)$,则有

$$f(f(x))=k(kx+b)+b$$

所以

$$f(f(f(x)))=k[k(kx+b)+b]+b=k^3x+(k^2b+kb+b)=8x+21$$

所以 $\begin{cases}k^3=8\\k^2b+kb+b=21\end{cases}$,解得 $\begin{cases}k=2\\b=3\end{cases}$.

所以 $f(x)=2x+3$.

例 6 已知 $f(x)$ 为有理整式函数,且 $mf(x+1)+mf(x-1)=2x^2-2mx+2$,又 $m\neq 0$,求 $f(x)$.

分析 因为 $f(x)$ 为有理整式函数,所以 $f(x+1)$ 与 $f(x-1)$ 不会改变 $f(x)$ 的次数,根据已知条件可知 $f(x)$ 必为二次函数.

解 设 $f(x)=ax^2+bx+c(a\neq 0)$,则

$$f(x+1)=a(x+1)^2+b(x+1)+c=ax^2+(2a+b)x+(a+b+c)$$
$$f(x-1)=a(x-1)^2+b(x-1)+c=ax^2+(b-2a)x+(a-b+c)$$

所以

$$\begin{aligned}m[f(x+1)+f(x-1)]=&m(2ax^2+2bx+2a+2c)=\\&2max^2+2mbx+2m(a+c)=\\&2x^2-2mx+2\end{aligned}$$

所以 $\begin{cases}2ma=2\\2mb=-2m\\2m(a+c)=2\end{cases}$,解得 $\begin{cases}a=\frac{1}{m}\\b=-1\\c=0\end{cases}$.

所以 $f(x)=\dfrac{1}{m}x^2-x$.

注 在未知函数为整函数时，可用待定系数法求解.

四、消去法

消去法是根据已知条件的特征，对函数中的自变量作几次代换，就可以把函数方程转化为方程组，求出 $f(x)$ 的表达式的方法.这种方法也称为解方程组法或代换法.

例 7 求适合 $xf(x)-f(1-x)=-x^3+x^2-1$ 的多项式 $f(x)$.

分析 左边函数 $f(x)$ 的自变量为 x，函数 $f(1-x)$ 的自变量为 $1-x$，如果再能造出一个方程既含有函数 $f(x)$ 又含有 $f(1-x)$，那问题就可解决了.

解 因为

$$xf(x)-f(1-x)=-x^3+x^2-1 \tag{①}$$

用 $1-x$ 代换 ① 中的 x，得

$$(1-x)f(1-x)-f(x)=-(1-x)^3+(1-x)^2-1=x^3-2x^2+x-1 \tag{②}$$

因此有

$$\begin{cases}xf(x)-f(1-x)=-x^3+x^2-1 & ③\\ -f(x)+(1-x)f(1-x)=x^3-2x^2+x-1 & ④\end{cases}$$

解方程组，消去 $f(1-x)$，得

$$f(x)=-x^2+2$$

代入原式验证适合.

注 上面的自变量之和是一个常数，用变量代换得出方程组后就可获得.

例 8 已知 $f(x)-f(\dfrac{1}{x})\lg x=1$，求 $f(x)$.

解 用 $\dfrac{1}{x}$ 去代换已知式中的 x，得

$$f(\frac{1}{x})-f(x)\lg\frac{1}{x}=1$$

从两式中消去 $f(\dfrac{1}{x})$，得 $f(x)=\dfrac{1+\lg x}{1+\lg^2 x}$，代回验算适合.

注 上面的自变量具有互倒关系，可用 $\dfrac{1}{x}$ 代换 x 得出新方程和原方程联立，消去 $f(\dfrac{1}{x})$ 即可获解.

五、特殊值法

特殊值法是在所给的函数方程中，自变量在定义域内任意取值，方程总成立，此时令自变量取某些特殊值，求出 $f(x)$ 的表达式的方法.

例 9 若函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，且满足：1) $f(x)\neq 0$；2) 对任意的 $x,y\in\mathbf{R}$ 有 $f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y)$，求证：

(1) $f(0)=1$；