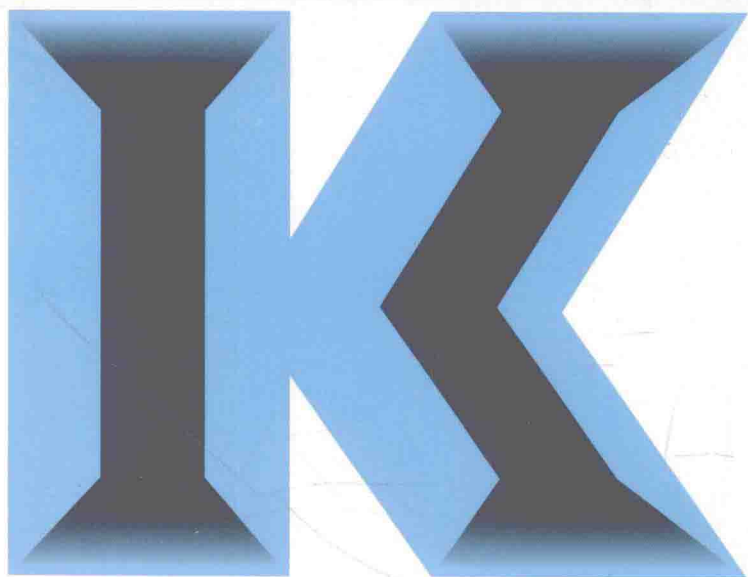


2017  
高教版

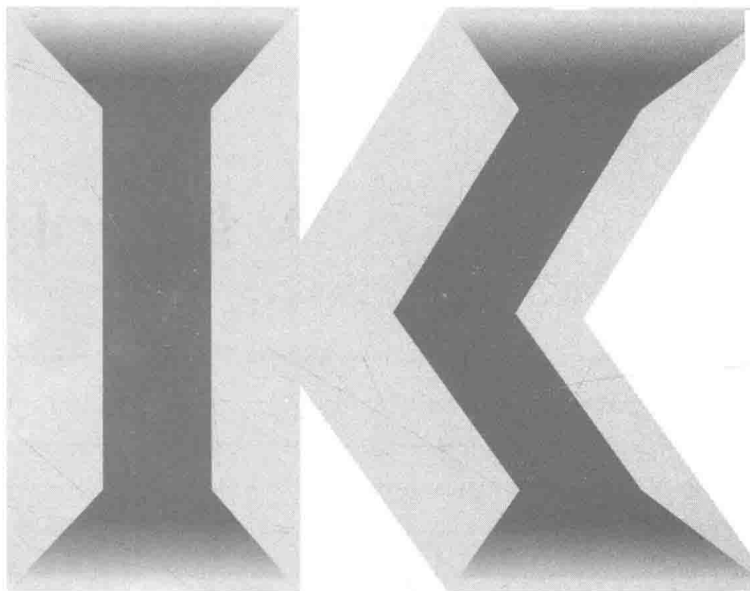


全国硕士研究生招生考试  
数学考试分析  
(2017年版)

教育部考试中心

教育出版社

2017  
高教版



全国硕士研究生招生考试  
数学考试分析  
(2017年版)

QUANGUO SHUOSHI YANJIUSHENG ZHAOSHENG KAOSHI  
SHUXUE KAOSHI FENXI (2017 NIAN BAN)

教育部考试中心

高等教育出版社·北京

### 图书在版编目(CIP)数据

全国硕士研究生招生考试数学考试分析:2017年版/  
教育部考试中心编. --北京:高等教育出版社,2016.8  
ISBN 978-7-04-045883-1

I. ①全… II. ①教… III. ①高等数学-研究生-入  
学考试-自学参考资料 IV. ①O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2016)第189977号

策划编辑 杨挺扬      责任编辑 雷旭波      封面设计 杨立新      版式设计 马云  
责任校对 刘春萍      责任印制 毛斯璐

---

出版发行	高等教育出版社	网 址	<a href="http://www.hep.edu.cn">http://www.hep.edu.cn</a>
社 址	北京市西城区德外大街4号		<a href="http://www.hep.com.cn">http://www.hep.com.cn</a>
邮政编码	100120	网上订购	<a href="http://www.hepmall.com.cn">http://www.hepmall.com.cn</a>
印 刷	国防工业出版社印刷厂		<a href="http://www.hepmall.com">http://www.hepmall.com</a>
开 本	787mm×1092mm 1/16		<a href="http://www.hepmall.cn">http://www.hepmall.cn</a>
印 张	12	版 次	2016年8月第1版
字 数	290千字	印 次	2016年8月第1次印刷
购书热线	010-58581118	定 价	26.00元
咨询电话	400-810-0598		

---

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换

版权所有 侵权必究

物料号 45883-00

# 目 录

<b>第一部分</b>	<b>数学科考试说明</b> .....	1
	一、考试性质 .....	1
	二、指导思想 .....	1
	三、基本原则 .....	2
	四、参考答案及评分参考的制订说明 .....	2
	五、试题、试卷和考试质量的评价指标 .....	3
<b>第二部分</b>	<b>2016 年数学考试分析</b> .....	6
	一、总体评价 .....	6
	二、统计数据分析 .....	7
	三、思考与建议 .....	9
	四、数学(一)试题分析 .....	9
	五、数学(二)试题分析 .....	32
	六、数学(三)试题分析 .....	50
<b>第三部分</b>	<b>2015 年数学试题分析</b> .....	71
	一、数学(一) .....	71
	二、数学(二) .....	90
	三、数学(三) .....	106
<b>第四部分</b>	<b>2014 年数学试题分析</b> .....	125
	一、数学(一) .....	125
	二、数学(二) .....	147
	三、数学(三) .....	166

## 第一部分

# 数学科考试说明

### 一、考试性质

全国硕士研究生招生考试数学科考试(以下简称数学考试)是为招收工学、经济学、管理学硕士研究生而设置的具有常模参照性的水平考试。

一方面,从数学考试成绩的使用功能上看,它是常模参照性的考试。所谓常模参照考试是指依据考生的成绩在全体考生成绩量表中的位置来评价考生成绩的优劣,离开考生群体解释考生的成绩意义不大。我国硕士研究生招生初试是从高分到低分择优确定参加复试人选,这种优胜劣汰的方式是常模参照考试的主要特征。数学考试成绩对于工学、经济学和管理学各专业的考生是否被录取起着至关重要的作用。从这个意义上讲,数学考试具有明显的选拔功能,是常模参照考试。

另一方面,从数学考试的测量功能上看,数学考试又是水平考试。水平考试是用来测量考生是否达到一定的水平,从而决定是否适应将来的某项任务的考试,其主要特征是命题不以《教学基本要求》或某一指定的教材为依据,而是以《考试大纲》为依据。《考试大纲》规定考试内容和考试要求,与《教学基本要求》没有直接的关系。数学考试是测量工学、经济学、管理学各专业的考生是否具备为完成相应专业研究生阶段的学习任务以及胜任工作后的研究任务所必需的数学知识和能力。数学《考试大纲》规定的考试内容和考试要求与《教学基本要求》不完全相同,《教学基本要求》中规定的有些教学内容《考试大纲》不要求考查,而《考试大纲》中的有些考试要求要略高于《教学基本要求》。可见,数学考试也符合上述水平考试的特征,因而也是水平考试。

为了体现工学、经济学、管理学不同学科专业对硕士研究生入学应具备的数学知识和能力的不同要求,从2009年开始,数学考试分为三个卷种,即数学(一)、数学(二)和数学(三),对不同卷种的考试内容有不同的要求。这种对不同学科、不同专业的考生提出不同考试要求的特征也是水平考试的重要标志。

### 二、指导思想

根据数学考试的性质和目的,数学科考试的命题工作一直坚持两个“有利于”的指导思想:既有利于国家对高层次人才的选拔,又有利于高等学校各类数学课程教学质量的提高。在这两个“有利于”中,重点是有利于国家对高层次人才的选拔。

有利于国家对高层次人才的选拔,就是要求这项考试具有较高的信度和效度,能对考生群体进行有效的测量和甄别,从而区分出考生成绩的优劣,并将数学基础好、有发展潜力并具有一定创新能力的考生选拔出来,进入更高层次的教育阶段学习和深造。

有利于高等学校各类数学课程教学质量的提高,就是要求数学考试试题的编制能结合高等学校的教学实际,试题水平既能反映教学的实际水平,也能考查考生应当具备的知识和能力,同时,利用考试这根“指挥棒”正确引导高等学校的数学教学向培养学生应用数学能力的方向发展,使得学生学而有功,学而会用,从而对数学教学质量的提高起到积极的促进作用。

### 三、基本原则

(1) 严格按照《全国硕士研究生招生考试数学考试大纲》(简称《考试大纲》)规定的考试内容和考试要求进行命题。

《考试大纲》主要包括以下内容:考试性质、考查目标、试卷分类及使用专业、考试形式和试卷结构、考试内容和考试要求、题型示例及参考答案等,它是法规性文件,是命题工作和考生复习的唯一依据。

按照《考试大纲》命题是指考查的内容不超过大纲的规定,各科目在试卷中的占分比例、题型比例与大纲要求基本一致,试卷的难易度与题型示例的难易度基本一致,试卷中不出现超纲题、偏题和怪题。

(2) 试题以考查数学的基本概念、基本方法和基本原理为主,在此基础上加强对考生的运算能力、抽象概括能力、逻辑思维能力、空间想象能力和综合运用所学知识解决实际问题能力的考查。

(3) 试题编制要符合各种题型编制原则。

(4) 保持历年试题难度的稳定。

(5) 试题编制应科学、公正、规范。

### 四、参考答案及评分参考的制订说明

制订参考答案及评分参考是命题工作的一个重要组成部分,它为全国范围内统一的评卷工作提供了一个公正、科学的量表和尺度,是考试公平性的重要保证。

数学填空题要求答案是确定的和唯一的,参考答案只给出应填的结果,不给出推导计算过程。一般每题4分,答对4分,答错0分。对于四选一的选择项有A、B、C、D四个备选项,其中三个是干扰项,一个是正确选项,参考答案只给出正确选项前的字母,不给出推导过程。选对得满分,选错得0分,不倒扣分,鼓励考生在不会作答时猜测选项。对于计算题、证明题以及其他解答题,一般提供一至两种参考解答或证明方法,有些试题有更多的解法甚至包括初等解法,但所提供的参考解答必须是与《考试大纲》规定的考试内容和考试目标相一致的解法和证明方法。参考解答的文字表述必须规范,推理过程必须表述清楚,避免因参考答案表述不清而造成评分误差。每题分值的设置与完成该题所花费的平均时间以及考核目标的层次有关。一般地说,综合性较强的试题、推理过程较多的试题和应用性的试题赋分的权重较大,分值较高;基本计算题、常规性试题和简单应用题的分值较低。各题的分值设定之后,就需要确定评分参考,即运算过程中关键步骤的赋分权重。计算题和证明题的评分标准是按照计算或推理的过程连续赋分的,比如,完成一道分值为10分的计算题需要三个关键步骤,完成到第一个步骤给3分,完成到第二个步骤给6分,三个步骤全部完成给10分。对于文科试题常常是按照要点单独赋分。为什么数学题不宜按每个步骤单独给分呢?这是考虑到对于数学计算或证明题,只有做对了前面的步骤,才能完成后面的步

骤这一特点.对于有多个解法的试题,一般到达同一结果即给相同的分数,每一步骤分值的给定不是随意的,如同确定每题的分值一样,需要考虑该步骤在解答和证明过程中的复杂和重要程度,关键的步骤分值较高,反之较低.

参考答案与评分参考是评分的原则依据,一般各地在试卷评阅前要组织专家依照参考答案与评分参考对部分考卷进行试评,对评分参考做进一步的细化,制定评分细则,使评卷工作更具可操作性.

评分参考的制订直接关系到试卷的平均分,一份由很难的试题构成的试卷,可以通过较松的评分使其平均分较高,反之亦然.因此,评分参考制订的科学性和逐年稳定性是试卷质量的重要组成部分.

## 五、试题、试卷和考试质量的评价指标

根据全国硕士研究生招生数学考试的性质,它是常模参照性的水平考试.对于常模参照考试,通常用难度和区分度评价试题的质量;用平均分和标准差反映考生成绩的分布情况,同时也作为评价试卷质量的重要指标;用信度和效度评价考试的质量.

### 1. 试题的评价指标

试题难度是反映试题难易程度的指标,它是考生在该题上的得分率,即考生在该题上的平均得分与该题满分之比,通常以小写的  $p$  表示,取值范围在 0 与 1 之间.由于不同的考生群体水平是有差异的,他们在同一题上的平均得分也不同,因此,同一题目相对于不同的考生群体,其难度值是不同的,也就是说题目难度依赖于考生样本.

但对于全国统一考试而言,由于参加考试的考生群体的水平是相对稳定的,可以把每年的考生群体视作基本不变的(实际上每年考生水平是存在一定差异的),这样试题的统计难度值或估计值就可以用于比较和控制试卷质量.

对于数学考试而言,难度值在 0.3 以下的为难题,难度值在 0.3~0.8 的视为中等难度的试题,难度值在 0.8 以上的视为易题.试卷难度一般控制在 0.5 左右,一份试卷中难、中、易试题要有一个合适的比例.

在命题过程中,为了保证试题的质量,需要估计题目难度.根据难度的定义,估计难度不仅要考虑题目自身的内容难度,而且要考虑考生群体的水平以及该题的评分参考的设计.

试题区分度是指题目对不同水平的考生加以区分的程度或鉴别的能力.区分度通常表示某一群体的全体考生在该题上的得分与他们的试卷总分之间的相关系数,用  $D$  表示,一般  $-1 < D < 1$ .对于主观性试题,一般用积矩相关系数;对于客观性试题,如填空题和选择题,一般用双列相关计算公式.该公式比较复杂,可参考有关教育测量书籍,在此不做介绍.

一种近似的、适合于主观性试题区分度的计算方法是先将考生群体分出一个高分组和一个低分组,然后分别计算出高分组、低分组的得分率  $p(H)$ 、 $p(L)$ ,  $D = p(H) - p(L)$ .高分组一般是考生群体中成绩在前面的 27% 的考生,低分组一般是考生群体中成绩在后面的 27% 的考生.这种方法适合较小规模的考试,不适用于大规模的考试.

一般认为区分度在 0.3 以上的试题为合格,0.2~0.3 的试题应予以修正,0.2 以下的试题为不合格,应予以淘汰.

区分度与难度有一定的关系,难度较大或难度较小的试题其区分度通常较小,难度中等的试

题区分度通常较大.为了综合难度和区分度这两项指标对试题进行评价,我们通常将试题分为六类,如下表所示.

试题的六大类型分类表

特征 类型	$p$	$D$	试题特征
I	(0, 0.3)	(0, 0.3)	难度大且区分能力差
II	[0.3, 0.8]	(0, 0.3)	难度适中但区分能力差
III	(0.8, 1)	(0, 0.3)	难度小且区分能力差
IV	(0, 0.3)	(0.3, 1.0)	难度大但区分能力强
V	[0.3, 0.8]	(0.3, 1.0)	难度适中且区分能力强
VI	(0.8, 1)	(0.3, 1.0)	难度小但区分能力强

在上述分类中,我们没有考虑区分度小于零的情况,因为这种试题一般不会出现.我们认为,第V类试题是测量效果较好的试题,在试卷中应占较大比例(达80%以上).第I类试题属于“题太难谁都不会做”,第III类试题属于“题太易谁都会做”,它们在试卷中仅起到降低或提高平均分、降低标准差的作用,因此,命题中我们严格控制出现这两类试题.同时,我们也不要求出现太多的第II类和第VI类试题.第IV类试题在选拔性的研究生招生数学考试中具有非常重要的作用,它对区分中、高水平的考生十分有效,通过多年对试题的分析,这类试题往往是考查考生综合应用能力的试题.

## 2. 试卷的评价指标

若将一份试卷看作一个题目,则像计算题目难度一样,也有一个试卷难度指标,即全体考生的平均分与试卷满分之比.在某项考试的满分逐年保持不变的情况下,全体考生的平均分成为衡量试卷难易程度的重要指标,试卷的平均分反映全体考生的平均得分.试卷的标准差是反映考生成绩离散程度的指标,标准差愈大,说明考生成绩分布得愈广,该考试将不同水平的考生区分开来的效果愈强;标准差愈小,说明考生成绩都集中在平均分附近,没有把不同水平的考生拉开.

试卷平均分和标准差是反映试题难易度是否稳定的非常重要的指标.因为不同年份的同一科试卷是否稳定主要看考后考生成绩的分布是否稳定,在大规模考试中,一般情况下考生的成绩近似服从正态分布,而正态分布由均值和标准差决定,试卷的平均分和标准差是考生成绩总体均值和标准差的良好估计.因此,控制试卷难易度的稳定性,关键是控制试卷的平均分和标准差.

试卷的平均分与构成试卷的试题的难度有一种确定的关系式,即试卷的平均分等于每题的题分乘以该题的难度值后的相加值,在命题过程中可以通过有经验的命题教师对试题难度进行估计,就可以利用上述关系式估计出试卷的平均分,从而达到控制试卷难度的目的.试题的区分度与试卷的标准差虽然没有确定的关系,但一般来说,试题的区分度愈大,该题对试卷标准差的贡献值就愈大.特别地,中等难度、区分度较大的第V类试题对标准差的贡献最大.因此,在命题中应尽量使第V类试题在试卷中占分比例较大.

试卷的及格率是指获得满分的60%以上成绩的考生占考生总人数的比例,若满分为150分,试卷的及格率是考生成绩分布曲线下大于90分的面积,此面积与成绩分布的均值和标准差有



关,在命题中难以单独控制,把它作为评价考试情况的一个粗略的指标是可以的,但一般情况下,不把它作为试卷质量的评价指标。

### 3. 考试质量的评价指标

教育测量学认为考试的信度和效度是评价考试质量的重要指标.信度是反映考试可靠性的指标,可形象地解释为:只要测量对象本身没有变化,用同样的“尺子”去测量总可以得到相同的结果.常用的信度类型主要有再测信度、复本信度、分半信度和内部一致性信度.由主观性试题构成的考试的内部一致性系数又称为 $\alpha$ 系数.目前我们采用的是分半信度和 $\alpha$ 系数.效度反映一个考试是否测量了想要测量的东西.常用的效度类型主要有内容效度、效标关联效度和构想效度.关于信度和效度的计算公式可参照有关教育测量书籍.

在后面的试卷分析和试题分析部分将应用上述关于试题和试卷的评价指标.

## 第二部分

# 2016 年数学考试分析

### 一、总体评价

2016 年全国硕士研究生招生考试的数学(一)、数学(二)与数学(三)试卷严格依据教育部颁布的《2016 年全国硕士研究生招生考试数学考试大纲》命制,没有超纲问题,也没有科学性问题的。试卷考查的是高等数学、线性代数和概率统计课程中的核心内容,在考查基本概念、基本理论和基本方法等通性通法的基础上,着重考查考生的运算能力、逻辑推理能力、应用数学知识分析问题和解决问题的能力。各类试题命制科学、规范,符合命题的一般原则,能够实现不同题型的考查功能。试题叙述严谨、清晰,考查目标合理、明确;参考答案给出的都是一般解法,解答过程简洁、完整,结果书写规范;评分标准赋分合理,可操作性强,赋分的多少及得分点的标注很好地体现了命题目的,这既有利于提高阅卷质量,也有利于考出考生的学科水平。试卷在注意对课程进行全面考查的同时,也注意控制试卷的整体难度,三套试卷的难度适中,都具有较好的区分度,体现了选拔性考试的特点,有利于不同水平学校的招生。

#### 1. 考查全面、关注基础

2016 年的三套试卷考查的均是相关课程的主干知识,而且都是核心概念、基本理论和常用方法,都是课程中的基本内容。

“高等数学”课程考查的主要内容是:

(1) 极限与连续。例如数学(一)的第 4 题是关于连续概念的基本问题;数学(一)的第 9 题、数学(二)与数学(三)共有的第 15 题均是基本的极限运算问题,考查的是利用导数求极限的基本方法。

(2) 导数和微分的概念、运算及应用。与导数和微分的运算有关的试题有数学(一)的第 12 题,数学(二)的第 12 题、第 13 题;与导数应用有关的试题是数学(一)的第 19 题,数学(三)的第 16 题等。

(3) 一元函数积分学。例如数学(一)的第 1 题、第 2 题、第 16 题,数学(二)的第 3 题、第 10 题、第 16 题、第 20 题、第 21 题,数学(三)的第 18 题等。

(4) 多元函数微分学。例如数学(一)的第 11 题,数学(二)的第 6 题、第 17 题,数学(三)的第 2 题、第 11 题等。

(5) 重积分与曲线、曲面积分。例如数学(一)的第 15 题、第 17 题、第 18 题,数学(二)的第 18 题,数学(三)的第 3 题、第 12 题等。

(6) 无穷级数。例如数学(一)的第 19 题,数学(三)的第 4 题、第 19 题。

(7) 微分方程。例如数学(一)的第 3 题、第 16 题,数学(二)的第 11 题、第 19 题。

“线性代数”课程在选择题和填空题部分考查了行列式的计算(数学(一)和数学(三)的第13题)、二次型(数学(一)的第6题)、矩阵的相似(数学(二)的第7题)等内容,在解答题部分考查了矩阵运算(数学(一)和数学(三)的第21题、数学(二)的第23题)、线性方程组求解(数学(一)的第20题、数学(二)的第22题)。

“概率统计”课程主要考查随机事件概率的计算(数学(三)的第7题)、随机变量的数字特征(数学(三)的第8题)、随机变量概率的性质及相关系数(数学(一)的第7题、第8题)、随机变量的概率分布和密度函数(数学(一)和数学(三)的第22题、第23题)等内容。

2016年的三套试卷涵盖《考试大纲》中的主要内容,不同课程之间及同一门课程不同内容之间的比例符合大纲要求。以数学(一)试卷为例,“高等数学”“线性代数”“概率统计”三门课程所占分值依次为82,34,34;在“高等数学”课程中,一元函数微积分、多元函数微积分、无穷级数与微分方程三部分内容所占分值依次为28,38,16,分别占“高等数学”分数的34%、46%和20%。

## 2. 强调重点、注重能力

在考查基本内容的基础上,2016年的试卷坚持能力立意的命题思想,注重学科内容的内在联系和知识的综合运用,对课程的重点内容、核心概念、重要方法进行了重点考查。如在数学(一)中,第16题将微分方程的特征法、反常积分的收敛性、定积分的牛顿—莱布尼茨公式等内容有机地融合在一起,第17题将偏导数的概念、不定积分、曲线积分、函数最值问题联系在一起,第19题则用到了级数收敛的概念、微分中值定理、连续函数的概念和性质等。

## 3. 控制难度、有利选拔

2016年的三套试卷都注意了对整体难度的控制,中等和中等难度以下的试题占到了70%以上。选择题和填空题中的大部分试题只涉及一个或两个知识点,都是基本题;解答题中的基本题也超过了一半,即使在综合性较强的试题中,在设问上也做了处理,为考生作答搭了桥、铺了路。整张试卷的设计有利于考生发挥出水平,有利于区分不同水平的考生,有利于高校的招生。

# 二、统计数据分析

## 1. 难度分析

2016年数学各卷种的抽样统计数据如表1所示。由表1可以看出,三份试卷难度稍大,数学(一)(二)(三)均在0.41左右,比2015年难度有所提高。各卷种难度符合选拔性考试的要求,有利于不同类型的学校选拔不同层次的考生。在每种试卷中,绝大多数客观题和主观题都是中等难度的基本问题。即使是要求较高的题目,在设问上也做了处理,采取分步设问的方法,为考生答题铺设了台阶。如数学(一)的第19题、第21题、第22题与第23题,数学(二)的第21题、第22题与第23题,数学(三)的第20题、第21题、第22题与第23题,这些题目的第一问都很基本,有利于考生入手,并逐步深入,发挥出自身的水平。

从表2各卷种在三种题型上的平均难度值可以看出,各卷种三种题型的平均难度值均在中等难度范围内,为了体现不同题型不同的考查功能,选择题较填空题、解答题容易。选择题主要考查考生对数学概念、数学性质的理解并能进行简单的推理、判定、计算和比较;填空题主要考查“三基”及数学的重要性质,一般不考计算量大的题,以中、低难度的试题为主;解答题在考查基本运算的基础上,主要考查考生的逻辑推理和综合运用能力。试题排列有一定的坡度,因而能力要求逐渐增高,试题难度逐步增大。

表 1 2016 年数学各卷种抽样统计数据

卷种	样本量	平均分	难度	标准差	$\alpha$ 信度
数学(一)	28 677	60.65	0.404	27.42	0.844 7
数学(二)	21 972	60.56	0.404	27.16	0.855 6
数学(三)	27 379	62.49	0.417	32.36	0.889 5

表 2 2016 年数学各卷种在三种题型上的难度值

题型	数学(一)	数学(二)	数学(三)
选择题	0.509	0.608	0.539
填空题	0.431	0.405	0.405
解答题	0.362	0.334	0.378

## 2. 区分度分析

从下面的表 3 可以看出,数学(一)、数学(二)、数学(三)区分度在 0.2 以下的试题只有 1 道,其余试题的区分度均在 0.2 以上,数学(一)有 86.6%、数学(二)有 97.3%、数学(三)有 92% 的试题均达到了 0.3 以上的合格水平.从图 1 至图 3 的考生分数分布直方图可以看出,数学(一)(二)(三)都呈正态分布.而根据表 1 的数据可知,各卷种的标准差均在 30 左右,说明数学各卷种对考生区分良好,有利于高等院校和科研机构选拔新生.

表 3 2016 年数学各卷种区分度分布表

区分度区间	数学(一)	数学(二)	数学(三)
0.2 以下	2.7%	0%	0%
0.2~0.3	10.7%	2.7%	8%
0.3 以上	86.6%	97.3%	92%

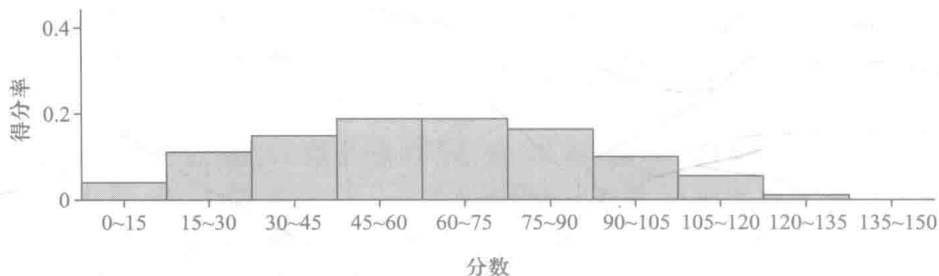


图 1 数学(一)考生分数分布直方图

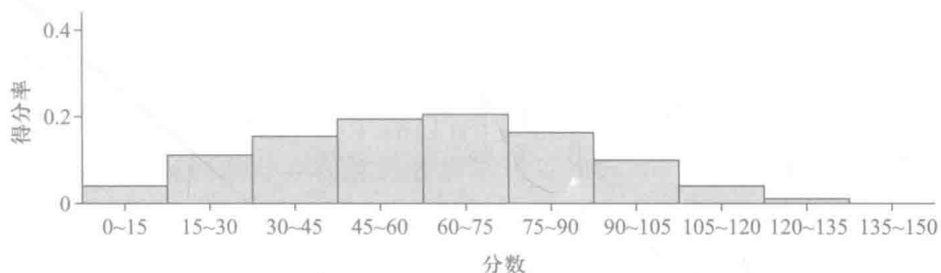


图2 数学(二)考生分数分布直方图

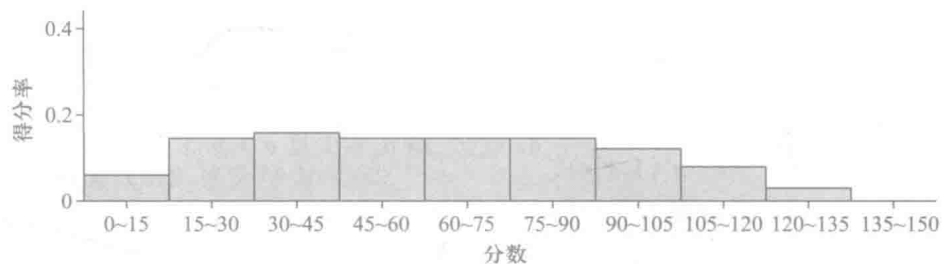


图3 数学(三)考生分数分布直方图

### 三、思考与建议

(1) 从阅卷情况看,一些考生的基础还不够扎实,首先是对基本概念的理解不准确,例如将极值和最值的概念混淆.其次运算能力比较薄弱.数学考试对运算能力的考查不是简单的数字计算,而是对概念、算理的考查.考试中重点强调的是:在运算过程中使用的概念要准确无误,使用的公式要准确无误,使用的法则要准确无误,数字计算要准确无误.因此,考生在学习和复习中要加强对概念的理解,在掌握基础知识的同时加强对运算能力的培养.

(2) 注重数学基础,继续加强应用性考查.对数学基础知识的考查,要求既全面又突出重点、注意层次.重点知识是支撑学科知识体系的主要内容,考查时要保持较高的比例,并达到必要的深度.应用性是数学学科的特点之一,解答数学应用问题是考生分析问题和解决问题能力的高层次表现,反映出考生的创新意识和实践能力,在数学试卷中应有所体现和加强.

### 四、数学(一)试题分析

#### 1. 选择题

(1) 若反常积分  $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^a(1+x)^b} dx$  收敛,则

(A)  $a < 1$  且  $b > 1$ .

(B)  $a > 1$  且  $b > 1$ .

(C)  $a < 1$  且  $a+b > 1$ .

(D)  $a > 1$  且  $a+b > 1$ .

【答】 应选(C).

【分析】 本题主要考查了反常积分收敛的概念和比较判敛法,考查了简单瑕积分与无穷积分的敛散性结论,考查了具体反常积分判敛问题的处理方法,是一道考查概念和性质的基本题.

【解】 记  $f(x) = \frac{1}{x^a(1+x)^b}$ , 则

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^a(1+x)^b} dx = \int_0^1 f(x) dx + \int_1^{+\infty} f(x) dx.$$

因为  $f(x)$  在  $x \rightarrow 0^+$  时与  $\frac{1}{x^a}$  等价, 且瑕积分  $\int_0^1 \frac{1}{x^a} dx$  当且仅当  $a < 1$  时收敛, 所以  $\int_0^1 f(x) dx$  当且仅当  $a < 1$  时收敛.

又因为  $f(x)$  在  $x \rightarrow +\infty$  时与  $\frac{1}{x^{a+b}}$  等价, 且无穷积分  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{a+b}} dx$  当且仅当  $a+b > 1$  时收敛, 所以  $\int_1^{+\infty} f(x) dx$  当且仅当  $a+b > 1$  时收敛.

综上所述, 若反常积分  $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^a(1+x)^b} dx$  收敛, 则  $a < 1$  且  $a+b > 1$ , 故选 (C).

本题难度值为 0.455, 区分度为 0.149.

(2) 已知函数  $f(x) = \begin{cases} 2(x-1), & x < 1, \\ \ln x, & x \geq 1, \end{cases}$  则  $f(x)$  的一个原函数是

$$(A) F(x) = \begin{cases} (x-1)^2, & x < 1, \\ x(\ln x - 1), & x \geq 1. \end{cases} \quad (B) F(x) = \begin{cases} (x-1)^2, & x < 1, \\ x(\ln x + 1) - 1, & x \geq 1. \end{cases}$$

$$(C) F(x) = \begin{cases} (x-1)^2, & x < 1, \\ x(\ln x + 1) + 1, & x \geq 1. \end{cases} \quad (D) F(x) = \begin{cases} (x-1)^2, & x < 1, \\ x(\ln x - 1) + 1, & x \geq 1. \end{cases}$$

【答】 应选 (D).

【分析】 本题主要考查了原函数的概念和函数在一点连续的定义, 考查了简单函数的积分法, 是一道考查概念和运算的基本题.

【解】 由题意可知:

$$\text{当 } x < 1 \text{ 时, } F(x) = \int 2(x-1) dx = (x-1)^2 + C_1;$$

$$\text{当 } x > 1 \text{ 时, } F(x) = \int \ln x dx = x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x \ln x - x + C_2.$$

因为  $F(x)$  在  $x=1$  处连续, 所以

$$F(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} F(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} F(x), \text{ 即 } F(1) = C_1 = C_2 - 1.$$

若取  $C_1 = 0$ , 则  $F(1) = 0, C_2 = 1$ , 所以  $F(x) = \begin{cases} (x-1)^2, & x < 1, \\ x(\ln x - 1) + 1, & x \geq 1 \end{cases}$  为  $f(x)$  的一个原函数, 故选 (D).

本题难度值为 0.670, 区分度为 0.283.

(3) 若  $y = (1+x^2)^2 - \sqrt{1+x^2}, y = (1+x^2)^2 + \sqrt{1+x^2}$  是微分方程  $y' + p(x)y = q(x)$  的两个解, 则  $q(x) =$

$$(A) 3x(1+x^2). \quad (B) -3x(1+x^2).$$

$$(C) \frac{x}{1+x^2}. \quad (D) -\frac{x}{1+x^2}.$$

【答】 应选(A).

【分析】 本题主要考查了微分方程解的概念和线性微分方程解的叠加原理,考查了简单函数的导数运算,是一道考查概念、性质和运算的基本题.

【解】 由题设及线性微分方程解的叠加原理可知, $y = \sqrt{1+x^2}$ 是齐次线性微分方程  $y' + p(x)y = 0$ 的解,所以

$$p(x) = -\frac{y'}{y} = -\frac{x}{1+x^2}.$$

又因为  $y = (1+x^2)^2 - \sqrt{1+x^2}$ 是微分方程  $y' + p(x)y = q(x)$ 的解,所以

$$q(x) = y' + p(x)y = 4x(1+x^2) - \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{x}{1+x^2} [(1+x^2)^2 - \sqrt{1+x^2}] = 3x(1+x^2),$$

故选(A).

本题难度值为 0.618,区分度为 0.380.

(4) 已知函数  $f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 0, \\ \frac{1}{n}, & \frac{1}{n+1} < x \leq \frac{1}{n}, n = 1, 2, \dots, \end{cases}$  则

- (A)  $x=0$  是  $f(x)$  的第一类间断点.      (B)  $x=0$  是  $f(x)$  的第二类间断点.  
(C)  $f(x)$  在  $x=0$  处连续但不可导.      (D)  $f(x)$  在  $x=0$  处可导.

【答】 应选(D).

【分析】 本题主要考查了函数在一点连续和可导的定义,考查了间断点的分类,考查了利用定义处理问题的方法,是一道要求较高的试题.

【解】 因为  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} x = 0 = f(0)$ ,所以  $f(x)$  在  $x=0$  处左连续.

对于任意的  $\varepsilon > 0$ ,总存在正整数  $n_0$ ,使得  $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$ .取  $\delta = \frac{1}{n_0}$ ,由  $f(x)$  的定义可知,当  $0 \leq x < \delta$  时,总有

$$|f(x) - f(0)| \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon,$$

所以  $f(x)$  在  $x=0$  处右连续.

综上所述可知  $f(x)$  在  $x=0$  处连续.

因为

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x},$$

且当  $\frac{1}{n+1} < x \leq \frac{1}{n}$  时,  $1 \leq \frac{f(x)}{x} < \frac{n+1}{n}$ ,所以  $f'_+(0) = 1$ .

又因为  $f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x-0}{x} = 1$ ,所以  $f(x)$  在  $x=0$  处可导,故选(D).

本题难度值为 0.174,区分度为 0.225.

(5) 设  $A, B$  是可逆矩阵,且  $A$  与  $B$  相似,则下列结论错误的是

(A)  $A^T$  与  $B^T$  相似.

(B)  $A^{-1}$  与  $B^{-1}$  相似.

(C)  $A+A^T$  与  $B+B^T$  相似.

(D)  $A+A^{-1}$  与  $B+B^{-1}$  相似.

【答】 应选(C).

【分析】 本题主要考查了矩阵相似的概念、矩阵相似的相关性质及其应用.

【解】 因为  $A$  与  $B$  相似,即存在可逆矩阵  $P$ ,使得

$$P^{-1}AP=B. \quad ①$$

将①式分别求转置和求逆,得

$$P^T A^T (P^T)^{-1} = B^T, \quad ②$$

$$P^{-1} A^{-1} P = B^{-1}, \quad ③$$

即  $A^T$  与  $B^T$  相似,  $A^{-1}$  与  $B^{-1}$  相似.再将①式与③式相加,得

$$P^{-1}(A+A^{-1})P=B+B^{-1},$$

即  $A+A^{-1}$  与  $B+B^{-1}$  相似.

由此可知,(A)(B)(D)的结论都是正确的.而对于(C),取

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

易知  $A$  与  $B$  相似,但  $A+A^T$  与  $B+B^T$  不相似,故选(C).

【典型错误】 考生将矩阵的合同与矩阵的相似两个概念混淆,在选择时易产生困惑.由于教材中对于(A)与(B)有相应的结论,部分不会解答的考生往往会在(C)和(D)之间猜一个结论.

本题难度值为 0.495,区分度为 0.300.

(6) 设二次型  $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$ , 则  $f(x_1, x_2, x_3) = 2$  在空间直角坐标下表示的二次曲面为

(A) 单叶双曲面.

(B) 双叶双曲面.

(C) 椭球面.

(D) 柱面.

【答】 应选(B).

【分析】 本题主要考查了用可逆线性变换将二次型化为标准形的方法、实二次型与空间曲面之间的关系、二次型的标准形与二次曲面的标准形之间的关系,同时考查了考生对几种常见二次曲面的了解程度.

【解】 因为  $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$

$$= (x_1 + 2x_2 + 2x_3)^2 - 3\left(x_2 + \frac{2}{3}x_3\right)^2 - \frac{5}{3}x_3^2,$$

作可逆线性变换

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + 2x_2 + 2x_3, \\ y_2 = x_2 + \frac{2}{3}x_3, \\ y_3 = x_3, \end{cases}$$

则曲面  $f(x_1, x_2, x_3) = 2$  为标准形曲面  $y_1^2 - 3y_2^2 - \frac{5}{3}y_3^2 = 2$ , 即为双叶双曲面, 故选(B).

【典型错误】

① 由于题中给出的二次型  $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$  的每一项系数都是正



的,没有通过化二次型为标准形,而直接将曲面认定为椭球面.

② 部分考生对单叶双曲面和双叶双曲面的标准形没有明确区分,导致选(A).

本题难度值为 0.594,区分度为 0.299.

(7) 设随机变量  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$  ( $\sigma > 0$ ), 记  $p = P\{X \leq \mu + \sigma^2\}$ , 则

(A)  $p$  随着  $\mu$  的增加而增加.

(B)  $p$  随着  $\sigma$  的增加而增加.

(C)  $p$  随着  $\mu$  的增加而减少.

(D)  $p$  随着  $\sigma$  的增加而减少.

【答】 应选(B).

【分析】 本题考查了正态分布及正态分布的概率计算,是基本题.

【解】 
$$p = P\{X \leq \mu + \sigma^2\} = \Phi\left(\frac{\mu + \sigma^2 - \mu}{\sigma}\right) = \Phi(\sigma).$$

由于标准正态分布的分布函数  $\Phi(z)$  是严格单调增加函数,所以  $p$  随着  $\sigma$  的增加而增加,故选(B).

【典型错误】 本题部分考生得不出正确答案的主要原因是,对正态分布的概率计算不熟悉,比如不熟悉正态分布的概率计算的基本公式;若  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ , 则

$$P\{X \leq x\} = \Phi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right);$$

也有的考生把上面的公式记错了.

本题难度值为 0.628,区分度为 0.396.

(8) 随机试验  $E$  有三种两两不相容的结果  $A_1, A_2, A_3$ , 且三种结果发生的概率均为  $\frac{1}{3}$ . 将试验  $E$  独立重复做 2 次,  $X$  表示 2 次试验中结果  $A_1$  发生的次数,  $Y$  表示 2 次试验中结果  $A_2$  发生的次数, 则  $X$  与  $Y$  的相关系数为

(A)  $-\frac{1}{2}$ .      (B)  $-\frac{1}{3}$ .      (C)  $\frac{1}{3}$ .      (D)  $\frac{1}{2}$ .

【答】 应选(A).

【分析】 本题考查了相关系数的概念及计算,考查了独立重复试验序列模型.这是一道对概念和计算要求较高的题.

【解法 1】 由题设知  $(X, Y)$  的概率分布为

$Y \backslash X$	0	1	2
0	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$
1	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$	0
2	$\frac{1}{9}$	0	0