

全国普通高校  
电子信息与  
电气学科  
基础规划教材

# 现代控制系统

肖建 于龙 编著



清华大学出版社

全国普通高校电子信息与电气学科基础规划教材

# 现代控制系统

肖建 于龙 编著

清华大学出版社  
北京

## 内 容 简 介

全书吸收了现代控制系统的最新研究成果,重视理论与实际的结合,在阐述理论和方法时,注重物理意义的解释,尽量减少繁杂的数学推导,并适当引入了工程设计的实例,使读者对这些方法有较全面的了解和认识,并能正确地运用这些方法来解决工程中的实际问题。

本书从工程实践角度出发,系统地介绍现代控制系统的理论和方法。全书包括了现代控制系统的5个基本分支:线性控制系统(线性控制系统状态空间分析、线性反馈控制系统综合与设计)、最优控制(变分法与最优控制、最小值原理及其应用、动态规划、线性二次型最优控制、线性系统的鲁棒及最优控制)、最优估计(基本估计方法、最优滤波)、系统辨识(建模与系统辨识基础、非参数辨识方法、最小二乘辨识、极大似然估计、系统辨识中的实际问题)和自适应控制(参考模型自适应控制系统、自校正控制)。

本书可以作为控制类、电气信息类各专业高年级学生和研究生教材,也可以供广大工程技术人员和其他大专院校专业师生参考。

本书封面贴有清华大学出版社防伪标签,无标签者不得销售。

版权所有,侵权必究。侵权举报电话:010-62782989 13701121933

### 图书在版编目(CIP)数据

现代控制系统/肖建,于龙编著.--北京:清华大学出版社,2016

全国普通高校电子信息与电气学科基础规划教材

ISBN 978-7-302-42635-6

I. ①现… II. ①肖… ②于… III. ①控制系统—高等学校—教材 IV. ①TP271

中国版本图书馆CIP数据核字(2016)第013807号

责任编辑:曾 珊 赵晓宁

封面设计:傅瑞学

责任校对:李建庄

责任印制:杨 艳

出版发行:清华大学出版社

网 址: <http://www.tup.com.cn>, <http://www.wqbook.com>

地 址:北京清华大学学研大厦A座 邮 编:100084

社 总 机:010-62770175 邮 购:010-62786544

投稿与读者服务:010-62776969, [c-service@tup.tsinghua.edu.cn](mailto:c-service@tup.tsinghua.edu.cn)

质量反馈:010-62772015, [zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn](mailto:zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn)

课件下载: <http://www.tup.com.cn>, 010-62795954

印 装 者:北京密云胶印厂

经 销:全国新华书店

开 本:185mm×260mm

印 张:22.25

字 数:559千字

版 次:2016年7月第1版

印 次:2016年7月第1次印刷

印 数:1~2000

定 价:49.00元

# 前言

自动控制技术对工农业生产、交通运输、国防建设和空间技术等各个领域都具有极其重要的作用。随着科学技术的发展,自动控制系统越来越趋向大型化、复杂化和综合化,同时对控制品质的要求也日益提高。现代控制系统理论以严谨的数学结构和对设计指标的明确的描述方式,为控制工程实践提供了解析的设计手段。近年来蓬勃发展的自适应控制、鲁棒控制、 $H_\infty$ 控制和智能控制等新的控制方法,更加开辟了现代控制理论和技术的新纪元。

本书试图从工程实践角度出发,系统地介绍现代控制系统的分析、综合与设计方法,使读者对这些方法有较全面的了解和认识,并能正确地运用这些方法来解决工程中的实际问题。全书分为线性控制系统分析与设计、最优控制、最优估计、系统辨识和自适应控制 5 篇 16 章:第 1 章为线性控制系统状态空间分析,介绍线性系统运动特性和结构特性;第 2 章为线性反馈控制系统综合与设计,介绍线性系统的分析与综合的一些主要方法,如极点配置、状态观测器、解耦控制和渐近跟踪鲁棒调节器、线性系统复频域分析与设计等;第 3 章为变分法与最优控制,介绍最优控制问题的数学描述、变分法及其在最优控制中的应用;第 4 章为最小值原理及其应用,介绍最小值原理及其在时间最优、燃料最优等系统中的应用,并简单介绍了奇异控制;第 5 章为动态规划,介绍在多级决策过程的寻优中非常有效的动态规划方法及其在离散时间系统和连续时间系统最优控制中的应用;第 6 章为线性二次型最优控制,重点介绍二次型最优控制这一广泛采用的控制系统设计方法;第 7 章为线性系统的鲁棒及最优控制,从工程实际出发,介绍了针对具有不确定性的系统的鲁棒控制,并介绍了线性矩阵不等式及其在  $H_\infty$  控制中的应用;第 8 章为最优估计理论,讨论了最小二乘估计、最小方差估计、极大验后估计和极大似然估计等参数估计方法;第 9 章为最优滤波理论,讨论被估计量是随时间变化的随机过程的状态估计问题,分别介绍了卡尔曼滤波方法和针对非线性系统的扩展卡尔曼滤波及无轨迹卡尔曼滤波等方法;第 10 章为建模与系统辨识基础,介绍了系统辨识中的数学模型和辨识输入信号;第 11 章为非参数辨识方法,讨论了阶跃响应分析法和相关分析法;第 12 章为最小二乘辨识,介绍系统辨识中广泛应用的最小二乘法,以及从最小二乘法中衍生出来的辅助变量法、广义最小二乘法和扩充最小二乘法等;第 13 章为极大似然估计,讨论基于概率论的极大似然估计和预报误差法等辨识方法;第 14 章为系统辨识中的实际问题,介绍辨识试验设计、确定辨识系统模型结构、闭环系统辨识和对辨识所得到的系统模型进行检验等实际问题;第 15 章为参考模型自适应控制系统,介绍参考模型自适应控制系统原理和梯度法、李雅普诺夫函数法和超稳定性法等设计方法;第 16 章为自校正控制,介绍最小方差自校正控制、广义方差自校正控制和极点配置自校正控制等自适应控制方法。

本书参考国内外高校的相关教学计划,结合作者多年来从事现代控制系统这一课程教学工作的经验和在这一领域的科研成果,参考大量文献资料并加以总结、提高编著而成。本书在编著的过程中力求注重基础性和实用性,针对理工科学生的特点,在不失严谨的前提下,着重阐明相关理论的实质和物理意义。此外,通过大量的例题和应用实例,帮助学生消

化与吸收有关理论知识,并能正确地运用这些方法来解决实际工程系统的分析、综合与设计中出现的问题。同时,力求反映现代控制系统发展的水平,培养读者独立步入现代控制系统分析与设计这一领域的学科前沿。

本书可以作为控制类和电气工程类各专业高年级学生和研究生教材,也可供广大工程技术人员和其他大专院校师生自学现代控制系统分析与设计方法时参考。

我们一些研究生为本书做了很多工作,本书所涉及的作者部分科研成果,得到了国家自然科学基金(69774054、60674057、61134001、51177137)的资助,作者在此一并致以衷心的感谢。

限于水平,书中难免存在缺点和错误,敬请读者不吝指正。

作者

2016年3月

## 第 1 篇 线性控制系统分析与设计

<b>第 1 章 线性控制系统状态空间分析</b> .....	3
1.1 系统的状态空间描述 .....	3
1.2 线性定常系统的运动分析 .....	12
1.3 离散时间系统 .....	17
1.4 能控性与能观测性 .....	25
1.5 能控规范型和能观测规范型 .....	30
1.6 系统的结构分解 .....	39
1.7 线性系统的稳定性 .....	48
习题 .....	56
<b>第 2 章 线性反馈控制系统综合与设计</b> .....	60
2.1 线性反馈控制 .....	60
2.2 极点配置 .....	63
2.2.1 极点配置定理与单输入系统状态反馈极点配置方法 .....	63
2.2.2 多输入系统状态反馈极点配置方法 .....	67
2.2.3 输出反馈极点配置 .....	78
2.2.4 特征结构配置 .....	79
2.2.5 系统镇定问题 .....	81
2.3 状态重构问题与状态观测器 .....	82
2.3.1 全维状态观测器 .....	82
2.3.2 带状态观测器的状态反馈控制系统的特性 .....	86
2.4 解耦控制 .....	97
2.4.1 前馈补偿器解耦 .....	97
2.4.2 静态解耦 .....	98
2.4.3 动态解耦 .....	101
2.5 渐近跟踪鲁棒调节器 .....	107
2.6 基于传递函数描述的反馈控制系统设计 .....	114
2.6.1 极点配置控制器的复频域设计 .....	114
2.6.2 极点配置控制器的参数化 .....	119
2.6.3 闭环稳定化控制器的参数化 .....	121
习题 .....	124

## 第2篇 最优控制

第3章 变分法与最优控制 .....	129
3.1 最优控制问题的数学描述 .....	129
3.2 泛函与变分 .....	131
3.3 终端时刻 $t_f$ 固定的最优控制问题 .....	139
3.4 未定终端时间的变分问题 .....	144
习题 .....	148
第4章 最小值原理及其应用 .....	150
4.1 连续时间系统的最小值原理 .....	150
4.2 时间最优控制问题 .....	157
4.3 燃料最优控制 .....	164
4.4 奇异控制 .....	168
习题 .....	171
第5章 动态规划 .....	172
5.1 最优性原理 .....	172
5.2 贝尔曼方程与离散时间系统的动态规划 .....	175
5.3 连续时间系统的动态规划与哈密顿—雅可比方程 .....	180
习题 .....	184
第6章 线性二次型最优控制 .....	186
6.1 二次型性能指标 .....	186
6.2 状态调节器问题 .....	188
6.2.1 有限时间状态调节器问题 .....	188
6.2.2 无限时间状态调节器问题 .....	193
6.3 输出调节器问题 .....	197
6.4 跟踪问题 .....	200
6.5 离散时间系统二次型优化控制 .....	204
习题 .....	207
第7章 线性系统的鲁棒及最优控制 .....	208
7.1 鲁棒控制的基本概念和数学基础 .....	209
7.2 线性矩阵不等式基础 .....	213
7.3 $H_\infty$ 控制 .....	215
7.4 基于 LMI 的线性不确定系统的鲁棒稳定性及鲁棒镇定 .....	221
习题 .....	225

## 第3篇 最优估计

第8章 最优估计理论 .....	229
8.1 最小二乘估计 .....	229
8.2 最小方差估计 .....	230
8.3 极大似然估计与极大验后估计 .....	232
习题 .....	235
第9章 最优滤波理论 .....	236
9.1 线性系统卡尔曼滤波 .....	236
9.2 非线性系统卡尔曼滤波 .....	244
9.2.1 广义卡尔曼滤波 .....	245
9.2.2 无轨迹卡尔曼滤波 .....	247
习题 .....	250

## 第4篇 系统辨识

第10章 建模与系统辨识基础 .....	257
10.1 数学模型 .....	258
10.2 辨识实验输入信号 .....	261
习题 .....	263
第11章 非参数辨识方法 .....	265
11.1 阶跃响应法 .....	265
11.2 相关分析法 .....	267
习题 .....	270
第12章 最小二乘辨识 .....	272
12.1 最小二乘(LS)估计的批处理算法 .....	272
12.2 最小二乘估计的统计特性 .....	274
12.3 递推最小二乘(RLS)估计 .....	276
12.4 广义最小二乘法 .....	281
12.5 扩充最小二乘法 .....	283
12.6 辅助变量法 .....	285
习题 .....	287



<b>第 13 章 极大似然估计</b> .....	289
13.1 极大似然估计原理 .....	289
13.2 极大似然估计算法 .....	291
13.3 预报误差法 .....	295
习题 .....	297
<b>第 14 章 系统辨识中的实际问题</b> .....	299
14.1 辨识试验信号的设计 .....	300
14.2 采样周期和试验长度的选择 .....	303
14.3 数据的预处理 .....	304
14.4 模型结构的确定 .....	305
14.5 模型检验 .....	308
14.6 闭环系统辨识 .....	310
习题 .....	313
<b>第 5 篇 自适应控制</b>	
<b>第 15 章 参考模型自适应控制系统</b> .....	317
15.1 基于局部参数最优化技术的设计方法 .....	318
15.2 基于李雅普诺夫稳定性理论的设计方法 .....	323
15.3 基于超稳定性理论的设计方法 .....	326
习题 .....	331
<b>第 16 章 自校正控制</b> .....	333
16.1 最小方差自校正控制 .....	333
16.2 广义最小方差自校正控制 .....	338
16.3 极点配置自校正控制 .....	343
习题 .....	345
<b>参考文献</b> .....	347

# 第1篇 线性控制系统 分析与设计

自20世纪初,特别是第二次世界大战以来,自动控制技术得到了迅速的发展。20世纪50年代中期,古典控制论已经发展成熟和完备,并成功地应用在工程技术和军事等领域。古典控制论采用传递函数来描述单输入单输出系统,利用频率响应法来实现控制系统的分析与综合。但是,古典控制论具有明显的局限性,它只能处理单输入单输出系统,并且难以揭示系统的更深刻的特性。1960年前后一段时间,现代控制理论开始蓬勃发展,其重要标志之一就是控制系统的状态空间理论。与古典的传递函数法仅描述了系统的外部输入输出特性不同,状态空间法是系统的内部描述,从而使系统的分析和综合过程建立在严格的理论基础上,在很大程度上促进了控制理论与技术的发展。

简单地说,线性系统分析与设计主要研究线性系统状态的运动规律和改变这种运动规律的可能性和方法。系统的分析主要研究系统的运动规律,以认识系统的动态行为,避免系统有可能发生的有害运动行为。控制系统设计主要研究改变系统运动规律的可能性和方法,使系统具有所期望的性能。从哲学的角度讲,前者属于认识系统的范畴,后者属于改造系统的范畴。

线性系统分析还可进一步区分为“定性分析”和“定量分析”。定性分析着重于研究对系统性能和系统综合具有重要意义的基本结构特性,主要包括稳定性、能控性、能观测性等。定量分析的目的则是解析地给出系统在某种输入作用下的系统状态或输出的运动轨线,以作为

分析系统响应和性能的基础。任何一个系统都有特定的任务或性能要求。当一个系统不能满足期望的性能要求或不能完成所规定的任务时,就需要寻找并确定适当的控制规律来对系统进行干预、调节或控制,以改变原系统,使改变后的系统满足期望的性能要求或能完成规定任务。这样一个过程称为系统综合或控制系统设计。控制系统设计的要求通常以性能指标的形式表示,它是希望系统所具有的性能的确切描述。性能指标分为优化指标和非优化指标两大类。性能指标不同,决定了控制系统综合问题不同。优化指标是一类极值型指标,系统综合的目的是要选择控制规律,使得相对应的性能指标最小或最大,如本书中第3章要介绍的最优控制问题。在控制系统设计的基本问题中,用得较多的还是非优化指标。它通常是一类不等式形式的指标,即只要系统性能达到或好于性能指标就算实现了综合目标。非优化指标注重的是反馈控制系统的某种性能,而与动态优化无关。例如,镇定问题的目的是使一类原来不稳定的系统经反馈控制后实现闭环系统稳定;极点配置问题是寻找反馈控制律,使闭环系统的极点位置与理想的闭环极点一致。

自20世纪70年代以来,在状态空间法的基础上,又发展了采用复频域的系统描述和计算方法来分析与综合线性控制系统的多变量复频域方法。目前,对于线性系统的分析和综合还在不断地向前发展,随着采用的数学工具和对系统的描述方法不同,已形成各种学派,并且得到了各自成体系和有价值的结论。线性系统的分析与综合方法是自动控制理论中最为成熟和完善的一个组成部分,它是最优控制、最优估计、随机控制、自适应控制、鲁棒控制和非线性系统分析和综合等控制理论各分支的基础。

# 第 1 章 线性控制系统状态空间分析

## 1.1 系统的状态空间描述

建立和研究系统的数学模型,是对控制系统进行分析和综合的前提。一个系统可以有不同类型的模型,它们代表了系统的不同侧面的属性。对线性系统来说,系统的数学描述有两种主要形式,即外部描述和内部描述。外部描述也称系统的输入输出描述,它将系统看作一个“黑箱”,即假设系统的内部结构和内部信息是无法知道的,只直接描述输出变量和输入变量(统称外部变量)间的动态因果关系。系统的脉冲响应矩阵和传递函数矩阵描述均是属于这类描述。系统的外部描述具有简单的形式,是古典控制理论通常采用的数学描述方式,然而它无法区分系统的内部结构。两个内部结构完全不同的系统,可以有相同的外部描述。为了克服这些弊端,20 世纪 50 年代末期,现代控制理论开始蓬勃发展。现代控制理论是建立在“状态空间”基础上的控制系统分析和设计理论,它将系统看作一个“白箱”,其内部结构和内部信息是已知的。在系统的描述中引入了可以完整地反映系统内部结构和内部信息的状态变量,并同时用两个数学方程来表征系统的运动。其中一个为状态方程,它是一个微分方程组或差分方程组,用来描述状态变量与输入变量间的动态因果关系;另一个为输出方程,它是一个代数方程组,用来描述系统输出变量与状态变量及输入变量之间的代数关系。系统的状态空间描述揭示了系统内部状态的运动规律,反映了控制系统动态特性的全部信息,属于系统的内部描述。

一个系统的运动通常可以用多个变量来描述,但是这些变量之间有可能是非独立的,为此,在描述系统运动中引入了状态变量的概念。

系统的状态变量组为能完全表征动力学系统时间域行为的一个数目最少的内部变量组。组成这个变量组的变量  $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$  称为系统的状态变量,其中  $t$  为时间,是自变量。由状态变量组构成的列向量

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$$

称为状态向量,简称为状态。状态向量的维数定义为组成状态向量的状态变量的个数。状态向量取值的空间称为状态空间。

固定  $t=t_1$ ,则状态  $x(t_1)$  是一个常向量,称为状态向量的取值。显然,当  $t_1$  不同时,状态  $x(t_1)$  取不同的值。一般来说,状态变量  $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$  只能取实数值,故对  $n$  维状态向量,其状态空间通常为  $n$  维实数空间。状态随时间  $t$  的变化过程,构成了状态空间中的一条轨迹,称为状态轨线。动态系统的维数定义为其状态的维数,也就是状态变量的个数  $n$ 。

根据以上关于动态系统状态变量的定义,从结构的角度来说,一个动态系统可以分为“动力学部件”和“输出部件”,如图 1.1 所示。

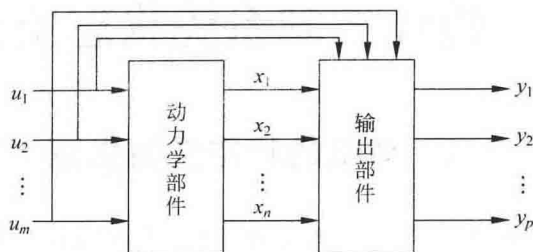


图 1.1 动态系统结构示意图

图 1.1 中,  $x_1, x_2, \dots, x_n$  是表征系统动态行为的状态变量组;  $u_1, u_2, \dots, u_m$  是系统的输入变量组, 它是外部环境作用于系统上, 并引起系统运动的变量;  $y_1, y_2, \dots, y_p$  是系统的输出变量, 它是系统影响外部环境的变量。状态空间描述实际上采用了两个过程: 输入引起状态变化的动态过程及状态和输入的变化决定了输出的瞬态过程。输入引起状态的变化通常用微分方程或差分方程来表征。对连续时间系统来说, 表示每个状态变量的一阶导数与所有状态变量和输入变量的关系的数学方程称为状态方程。考虑最一般的情况, 连续时间系统的状态方程描述为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_m; t) \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_m; t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n = f_n(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_m; t) \end{cases} \quad (1.1)$$

引入向量符号, 令

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix} \quad (1.2)$$

分别为状态向量和输入向量, 并引入向量函数

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) = \begin{bmatrix} f_1(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \\ f_2(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \\ \vdots \\ f_n(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \end{bmatrix} \quad (1.3)$$

则可将状态方程简洁地表示为向量方程的形式, 即

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \quad (1.4)$$

由于系统的状态已完全表征了系统的动态行为, 故系统输出与状态和输入的关系可以用代数方程描述, 即

$$\begin{cases} y_1 = g_1(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_m; t) \\ y_2 = g_2(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_m; t) \\ \vdots \\ y_p = g_p(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_m; t) \end{cases} \quad (1.5)$$

定义输出向量为

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_p \end{bmatrix} \quad (1.6)$$

定义向量函数为

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) = \begin{bmatrix} g_1(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \\ g_2(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \\ \vdots \\ g_p(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \end{bmatrix} \quad (1.7)$$

则可写出输出方程的向量形式,即

$$\mathbf{y} = \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \quad (1.8)$$

系统的状态空间描述由状态方程和输出方程所组成,联合写出来,即得到一般情况下的状态空间描述,即

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \\ \mathbf{y} = \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \end{cases} \quad (1.9)$$

对于线性系统,则式(1.9)中  $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$  和  $\mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$  都具有线性形式,即

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}(t)\mathbf{u}(t) \end{cases} \quad (1.10)$$

式中,  $\mathbf{A}(t)$  为  $n \times n$  阶矩阵,称为系统矩阵;  $\mathbf{B}(t)$  为  $n \times m$  阶矩阵,称为输入矩阵;  $\mathbf{C}(t)$  为  $p \times n$  阶矩阵,称为输出矩阵;  $\mathbf{D}(t)$  为  $p \times m$  阶矩阵,称为前馈矩阵。它们统称为参数矩阵。各参数矩阵中所有元素都是  $t$  的分段连续函数。

对于线性定常系统,状态空间描述式(1.10)中各参数矩阵都是与时间  $t$  无关的常值矩阵。因此,线性定常系统的状态空间描述具有以下简洁形式,即

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u} \end{cases} \quad (1.11)$$

对于线性定常系统,分别称系统矩阵  $\mathbf{A}$  的特征值、特征方程和特征多项式为系统的特征值、特征方程和特征多项式。系统特征值也称为系统极点。

对线性系统来说,对于不同系统或同一系统的不同描述,状态方程和输出方程都具有相同的固定形式,差别仅体现在参数矩阵的不同。基于这一原因,本书经常简记线性时变系统为  $\{\mathbf{A}(t), \mathbf{B}(t), \mathbf{C}(t), \mathbf{D}(t)\}$ ,简记线性定常系统为  $\{\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}\}$ 。

对于结构和参数已知的系统,可以先直接运用相应的物理、化学定律等建立描述系统运动的微分方程或差分方程;然后通过选取合适的状态变量组,进一步将系统原始方程化成标准的状态空间描述形式。

**例 1.1** RLC 电路(如图 1.2 所示)的状态空间描述。

由电路理论可以得到

$$\begin{cases} L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) + u_C(t) = u(t) \\ C \frac{du_C(t)}{dt} = i(t) \end{cases} \quad (1.12)$$

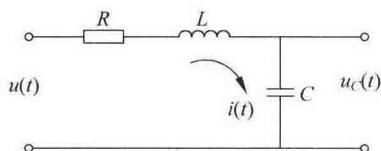


图 1.2 RLC 电路

系统输入为  $u(t)$ , 输出为  $y(t) = u_c(t)$ 。在经典控制理论中, 为求得系统的传递函数描述, 消去变量  $i(t)$ , 得到关于  $u_c(t)$  的二阶微分方程, 即

$$\frac{d^2 u_c(t)}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{du_c(t)}{dt} + \frac{1}{LC} u_c(t) = \frac{1}{LC} u(t)$$

假定系统的所有初始条件为零, 对上述方程进行拉普拉斯变换, 得

$$(s^2 + 2\zeta s + \omega_0^2) \hat{u}_c(s) = \omega_0^2 \hat{u}(s)$$

其中,  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ ;  $\zeta = \frac{R}{2L}$ 。由此得到系统的传递函数为

$$G(s) = \frac{\omega_0^2}{s^2 + 2\zeta s + \omega_0^2}$$

为求系统的状态空间, 选择电流  $i(t)$  和电容上的电压  $u_c(t)$  作为两个状态变量, 即  $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} i(t) \\ u_c(t) \end{bmatrix}$ , 显然, 该状态向量完全描述了电路的内部状态。而电路的动态过程, 由状态变量的初始值  $\mathbf{x}(0)$  和外部输入  $u(t)$  唯一确定。由式(1.12)可列出矩阵形式的状态描述, 即

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\ y = [0 \quad 1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \end{cases}$$

### 例 1.2 直流电机与负载的状态空间描述。

在图 1.3 所示的直流电机通过一个柔性连接与惯性负载相连的系统中,  $R$  与  $L$  分别为直流电机电枢绕组的电阻与电感,  $k$  与  $b$  分别为柔性连接的弹性系数和阻尼系数,  $J_m$  与  $J_l$  分别为直流电机和负载的转动惯量,  $\theta_m$  和  $\theta_l$  分别为电机和负载的角位移。加在电机电枢绕组上的电压  $u$  为系统的输入, 负载角位移  $\theta_l$  为系统的输出。

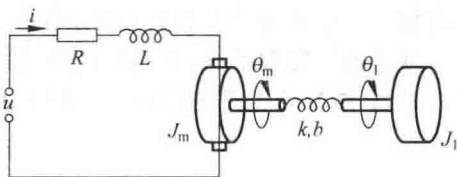


图 1.3 直流电机与负载

利用牛顿第二定律可得

$$\begin{cases} J_m \ddot{\theta}_m = K_a i + k(\theta_l - \theta_m) + b(\dot{\theta}_l - \dot{\theta}_m) - b_m \dot{\theta}_m \\ J_l \ddot{\theta}_l = -k(\theta_l - \theta_m) - b(\dot{\theta}_l - \dot{\theta}_m) - b_l \dot{\theta}_l \end{cases} \quad (1.13)$$

式中,  $K_a$  为直流电机的转矩常数;  $b_m$  和  $b_l$  分别为电机和负载轴承的阻尼系数。而对于电机电路, 利用电路定律, 立即可得到描述直流电机电枢电路的方程为

$$u = Ri + L \frac{di}{dt} + K_c \dot{\theta}_m$$

即

$$i = \frac{1}{L}(u - Ri - K_c \dot{\theta}_m) \quad (1.14)$$

式中,  $K_c$  为电机电枢绕组的感应系数。

选择状态变量  $\mathbf{x} = [i \quad \theta_m \quad \dot{\theta}_m \quad \theta_1 \quad \dot{\theta}_1]^T$ , 则由式(1.13)和式(1.14)可得

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \frac{R}{L}x_1 - \frac{K_e}{L}x_3 + \frac{1}{L}u \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ \dot{x}_3 &= \frac{K_a}{J_m}x_1 - \frac{k}{J_m}x_2 - \frac{b+b_m}{J_m}x_3 + \frac{k}{J_m}x_4 + \frac{b}{J_m}x_5 \\ \dot{x}_4 &= x_5 \\ \dot{x}_5 &= \frac{k}{J_1}x_2 + \frac{b}{J_1}x_3 - \frac{k}{J_1}x_4 - \frac{b+b_1}{J_1}x_5\end{aligned}$$

由此可以将状态方程描述为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{R}{L} & 0 & -\frac{K_e}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{K_a}{J_m} & -\frac{k}{J_m} & -\frac{b+b_m}{J_m} & \frac{k}{J_m} & \frac{b}{J_m} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{k}{J_1} & \frac{b}{J_1} & -\frac{k}{J_1} & -\frac{b+b_1}{J_1} \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ \mathbf{y} = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0] \mathbf{x} \end{cases}$$

由以上两个例子可见,选择系统中储能元件的输出物理量或系统输出及其各阶导数为状态变量,通常可以得到较为简洁的状态空间描述。

若已知系统的微分方程或传递函数描述,则由之建立系统的状态空间描述的关键是如何选择状态变量。考虑单输入单输出线性定常系统。设系统可以由以下高阶微分方程描述,即

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1\dot{y} + a_0y = b_mu^{(m)} + b_{m-1}u^{(m-1)} + \cdots + b_1\dot{u} + b_0u \quad (1.15)$$

式中,  $y$  为系统输出;  $u$  为系统输入。  $y$  与  $u$  均是标量。从物理可实现角度来看,一般有  $m \leq n$ 。假定  $y, u$  及其各阶导数的初始值均为零,对式(1.15)两边取拉普拉斯变换,即可得出该系统的传递函数描述为

$$g(s) = \frac{\hat{y}(s)}{\hat{u}(s)} = \frac{b_ms^m + b_{m-1}s^{m-1} + \cdots + b_1s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1s + a_0} \quad (1.16)$$

显然式(1.15)和式(1.16)是同一系统的输入输出描述。它们之间的关系是显而易见的。因此,在式(1.15)和式(1.16)所表示的输入输出描述中,只要知道一种形式的状态空间描述,就可以用类似的方法得到另一种形式的状态空间描述。下面仅讨论用传递函数式(1.16)描述的单输入单输出系统的状态方程描述。由传递函数描述得到其状态方程描述称为实现问题。令

$$a(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1s + a_0 \quad (1.17)$$

$$b(s) = b_ms^m + b_{m-1}s^{m-1} + \cdots + b_1s + b_0 \quad (1.18)$$

则传递函数式(1.16)又可写成

$$g(s) = \frac{b(s)}{a(s)} \quad (1.19)$$



讨论  $m < n$ , 即式(1.16)的传递函数是严格真分式的情况。这时, 式(1.19)可写成

$$\hat{y}(s) = b(s)a^{-1}(s)\hat{u}(s) \quad (1.20)$$

令

$$\hat{x}(s) = a^{-1}(s)\hat{u}(s)$$

即

$$a(s)\hat{x}(s) = \hat{u}(s)$$

或

$$(s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1s + a_0)\hat{x}(s) = \hat{u}(s) \quad (1.21)$$

令

$$\begin{cases} \hat{x}_1(s) = \hat{x}(s) \\ \hat{x}_2(s) = s\hat{x}(s) = s\hat{x}_1(s) \\ \hat{x}_3(s) = s^2\hat{x}(s) = s\hat{x}_2(s) \\ \vdots \\ \hat{x}_n(s) = s^{n-1}\hat{x}(s) = s\hat{x}_{n-1}(s) \end{cases}$$

得

$$s\hat{x}_n(s) = s^n\hat{x}(s) \quad (1.22)$$

由式(1.21)可得

$$s^n\hat{x}(s) = -a_{n-1}s^{n-1}\hat{x}(s) - \cdots - a_1s\hat{x}(s) - a_0\hat{x}(s) + \hat{u}(s) \quad (1.23)$$

将式(1.23)代入式(1.22), 可得

$$s\hat{x}_n(s) = -a_{n-1}\hat{x}_n(s) - \cdots - a_1\hat{x}_2(s) - a_0\hat{x}_1(s) + \hat{u}(s) \quad (1.24)$$

而由式(1.20)可得

$$\begin{aligned} \hat{y}(s) &= (b_ms^m + b_{m-1}s^{m-1} + \cdots + b_1s + b_0)\hat{x}(s) \\ &= b_m\hat{x}_{m+1}(s) + \cdots + b_1\hat{x}_2(s) + b_0\hat{x}_1(s) \end{aligned} \quad (1.25)$$

根据拉普拉斯变换及其反变换的性质, 可以立即写出式(1.22)、式(1.24)和式(1.25)所对应的时域关系为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} = x_n \\ \dot{x}_n = -a_{n-1}x_n - a_{n-2}x_{n-1} - \cdots - a_1x_2 - a_0x_1 + u \\ y = b_mx_{m+1} + \cdots + b_1x_2 + b_0x_1 \end{cases} \quad (1.26)$$

由式(1.26)可以立即写出式(1.16)所示系统的状态空间描述为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = [b_0 \ b_1 \ \cdots \ b_m \ 0 \ \cdots \ 0] \mathbf{x} \end{cases} \quad (1.27)$$