理工类本科生

Mathematics

21世纪高等学校数学系列教材

高等数学（方法与口诀）

吴家强 著

WUHAN UNIVERSITY PRESS
武汉大学出版社

理工类本科生

Mathematics

21世纪高等学校数学系列教材

高等数学（方法与口诀）

吴家强 著

WUHAN UNIVERSITY PRESS
武汉大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学:方法与口诀/吴家强著．—武汉：武汉大学出版社,2016.11
21世纪高等学校数学系列教材
ISBN 978-7-307-18528-9

Ⅰ.高…　Ⅱ.吴…　Ⅲ.高等数学—高等学校—教材　Ⅳ.O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2016)第193677号

责任编辑:顾素萍　　责任校对:汪欣怡　　版式设计:马　佳

出版发行：武汉大学出版社　(430072　武昌　珞珈山)
(电子邮件：cbs22@whu.edu.cn　网址：www.wdp.com.cn)
印刷：虎彩印艺股份有限公司
开本：787×1092　1/16　印张:17.5　字数:427千字　插页:1
版次：2016年11月第1版　2016年11月第1次印刷
ISBN 978-7-307-18528-9　定价:45.00元

前　言

“逻辑思维”能力的训练是素质教育的重要部分，快速培养大师级精英更是我们的目标，他们具有超强的“逻辑思维”能力，而“学习数学或研究数学问题”是提高能力最高效的手段(它需要的资源最少). 本教材将突出“逻辑思维”能力的训练.

(一) 尝试加强素质教育

通过教学，使学生不仅会用数学工具(事实上，工具并不特别重要，知道有这个东西在，需要的时候，在资料库中能够找到它就行)，更主要的是，培养学生分析问题和处理问题的能力，使学生的逻辑思维能力得到提高.

本教材将尝试带着学生一起去(为了便于描述、研究现实问题) 引进数学工具(概念、运算等)，进一步用“量化”的方法提升概念，并研究这些数学工具的性质. 例如：通过分析、探索，得到格林公式而不是直接证明它 …… 引导及训练学生着眼于发现问题，然后针对该问题分析、推导，自然合理地增加或者减少条件，得出结论. 最后再对该结论进行整理加工，使它好记一些好用一些. 以后将上述方法简称为“大方法”. 本教材将始终贯彻这一方法.

(二) 力求使数学内容好记好用

过去有许多学生反应：高等数学里的许多定理、定义、公式等不好学，不好记，不好用，即“三不好”. “三不好” 现象是客观存在的，本教材将为改善这一现象而努力.

1. 方法 —— 本书的别名“方法与口诀”—— 虽然用词高了一些，但绝不是名不副实的乱贴标签，本教材将使用传统教材从未使用过的方法：引进潜规则 ——“有意义规则”，构建“Y 场”，在 Y 场中能够丢掉包袱简洁表述问题，用 Y 场特有的方式描述数学命题，内容将会好记、好用得多(详见附录一).

2. 采用一些特别的教学元素

① 箭头演算式：更符合实际的思维习惯，训练并逐步养成简捷、顺畅的思维能力.

② 提示符：用最少的关键信息，点示推导的理由.

③ “口诀”：实际上是一些“顺口溜”，虽然从艺术上看编得很不像样，但是作为一种学习手段，它却是很得力的工具. 一段(章、节、段) 课文说了一些什么，要注意些什么，要通过复习在脑子里能够串起来，形成一个清晰简明的流程图，每复习一遍，都会加深理解，这是学习的重要环节；实际上，大量的学生都做得不好，这也是“三不好”现象的原因之一. 如果只要求“暂时”背熟 7 字的口诀(例如传统教材中傅里叶级数的 18 页内容，对应口诀为“三角对称傅里叶，系数计算内积接. 周期代换公式平，收敛域除奇端零”，如果能独立讲解这段口诀，就基本上掌握了这 18 页的内容)，或几个字的“快闪” 关键词，加之所指的内容是带着学生一起探索分析得到的，加上“会讲” 口诀的要求，学生只要花少量时间就能做

到. 效果是复习了多遍，则学习信心就会增强，离开课本长时间便都能回忆起部分关键内容.

④ 习题：是另一个重要环节，本教材添加了“快速看题练习”和“习题扫描”的方法(用少量时间看 4 ～ 5 倍的题)，达到能验证对错的实践解题练习效果.

(三) 打好扎实的基础

高等数学的基础是极限，打好基础是学好高等数学的关键. “极限” 分为两大部分：

1. “求极限”的计算. 本教材要求所有的学生(包括对理论要求不高、学时较少的学生，以后称之为“少学时学生”)都能达到以下要求：一般的计算题中 50% 能够用“心算”或是在草稿纸上关键处画上几笔算出结果，最后能够平均 1 分钟做一题. 本教材中，例题加习题超过 100 题，平均难度偏高，答案中均有一般不超过 10 个字符的提示. “达标” 以后，学生对今后的学习会满怀信心，大大增加学习的兴趣和自信心.

2. “极限” 理论，首先是“极限” 的“ε-δ” 定义. 目前，对理论要求较低的教材，都跳过“ε-δ” 语言，直接采用极限的形象化定义；在对理论要求较高的教材中，都采用了“ε-δ” 语言，可是所用的篇幅不多，许多同学学完后，只是略有印象而已，完全不能复述出个所以然来. “ε-δ” 是难点：在参考文献[3]“数学分析八讲”译后记中说“数学分析的主要矛盾是什么？是‘ε-δ’，这恐怕是最常听到的答复 …… 至于‘ε-δ’，这确实是一只拦路虎 ……”；[3] 中又有一段文字：“在极限概念的准确定义中，不能够有其数学意义完全不明晰的术语，如现象、过程之类出现 ……”.

“ε-δ” 比较抽象，不容易深刻理解，靠简单地把“ε-δ” 定义多背几遍是不行的.

本教材将“严格定义极限” 作为培训“大方法” 的素材. 至多增加 2 课时变“拦路虎” 为“陪练犬”，逐步分析将形象化定义升级：逻辑严谨顺畅、好理解、好记(多年也不会忘). 能使“ε-δ” 在运用时具有简单易行的可操作性，同时使学生对“大方法” 体会更深.

在数学学习中，经常会遇到一些问题，它不是从天上掉下来的，也不是人为设计的，它存在那里，可能有重大的意义，也可能多少年没有人过问. 有时是形势的需要，或有兴趣又有能力的人主动去研究它(现在，多数问题已经解决，例如“ε-δ”).

处理问题，不需要额外的资源(只要纸笔和动脑)(为了灌溉想要修建水库，这就不是一般人想做就能做的)，只要有能力 ——“① 能够发现问题；② 分析找出问题的要害；③ 从基础入手，分析、分类、深入研究；④ 建立新的概念，适应新的要求；⑤ 达到较好地解决问题的目标”. 能力非常可贵. 学习数学很重要的目的就是要训练、培养能力. 如果能够从 ①，②，…，⑤ 去组织教学内容(对一般人，“内容” 中的数学公式，甚至于问题的结论都不是太重要，重要的是在“①，②，…，⑤”的过程中培养了能力，提高了逻辑思维的严密性，提高了发现、分析、解决问题的能力. 因此，本教材在附录三“对于积分的深入探讨” 中，用很少篇幅，介绍了“实变函数论” 中 20% 的基础内容. 给有兴趣的学员提供参考(看一看花时间不多，否则一辈子都不会接触这方面的知识).

(四) 理论证明上的空缺

现有的高等数学教材中，对某些问题(单调有界数列必定有极限、最大最小值定理、原函数存在定理等) 都是“证明从略” 或者“不予证明”.

当学生想要了解上述没有证明的问题时，碰见的困难是很大的，看什么参考书，看哪

些章节都是问题，对待数学专业的教材，他们很难有时间能够静下心来，从头慢慢地看下去…… 向人请教吧?谁也很难用三言两语把这些问题说清楚.

作者认为，未证明的内容似乎太多了；而理论上的空缺太多不利于"大方法"的训练.

为了教学中侧重"大方法"的目标，提供上述问题的证明还是必要的(部分放在课文中，部分放在附录二中).

另外，现有的高等数学教材中的"微元法"理论严密性上有欠缺(详见 812 段)，本教材中用"微元定理"修补了这一缺陷.

(五) 入门条件及达标要求

1. 自己决心学好"高等数学"(自己不愿意学是不可能学好的，不用进来).

2. 愿意按照教材的要求去做(如果连预习、完成练习等基本的要求都不去做，反过来说明了"决心学好只是一句"空话).

3. 入门知识基础达到标准：高中数学课本(不是高考资料)内容及习题全部会做.

4. "达标"的自检标准："本教材中全部的例题和习题都能独立完成，能讲解口诀(当然，其中打星号的，或计划中暂时不学的内容除外).

说明：100% 的习题都可以用教材中的方法求解(较难的题有提示；一个无法求解的题会严重打击学生的学习自信心).

(六) 编写针对的范围

本书是依据"工科类本科数学基础课程教学基本要求"编写的，但是"少学时学生"同样也可以有选择地使用本教材，在附录四中给出了对"少学时"教学内容取舍的建议，可供参考.

对于想要自学高等数学的学生，这类学生的入门条件，特别是第 1、第 2 两条比较好，自学达标是完全可行的. 建议：首先执行"少学时"安排，其次是稳扎稳打，学完一章后反复练习复习，达标后再往下学.

本书是对高等数学教材改革的探讨，希望能够收到"教学内容好学、好记、好用一些；学生的逻辑思维能力能够得到较大的提高"的效果. 在本书编写中，周学良、梁树培、王渝生、陈桂兴等教授曾给出许多宝贵的意见和建议，特此致谢!

由于是第一次尝试，问题可能很多，敬请各位专家、同行及读者多提宝贵的意见.

吴家强

2016 年 7 月 22 日

目　　录

第 1 章　函数 …… 1

1.1　函数的三要素 …… 1

1.2　复合函数 …… 2

1.3　反函数 …… 3

1.4　采用一些特别的教学元素 …… 4

1.5　初等函数 …… 6

第 2 章　极限 …… 8

2.1　数列(函数)的极限 …… 8

2.2　极限的运算规则 …… 10

2.3　小邻域定理 …… 12

2.4　常用的等价无穷小 …… 14

2.5　将极限的形象化定义升级 …… 18

2.6　极限性质的严格证明 …… 25

第 3 章　连续 …… 31

3.1　函数的连续性 …… 31

3.2　闭区间上连续函数的性质 …… 35

第 4 章　导数与微分 …… 37

4.1　导数的定义 …… 37

4.2　导数的运算法则 …… 39

4.3　高阶导数 …… 43

4.4　微分 …… 44

第 5 章　中值定理及导数的应用 …… 49

5.1　中值定理 …… 49

5.2　洛必达法则 …… 50

5.3　函数曲线的性状 …… 54

第 6 章　不定积分 …… 61

6.1　探求逆运算 …… 61

6.2 不定积分的定义、性质 …… 62
6.3 凑微分法 …… 64
6.4 第二类换元法——“去根号” …… 66
6.5 分部积分法 …… 67

第 7 章 定积分 …… 71
7.1 定积分的概念和性质 …… 71
7.2 微积分的基本定理 …… 75
7.3 定积分的换元法 …… 76
7.4 广义积分 …… 78

第 8 章 定积分的应用 …… 82
8.1 “五步”与“微元法” …… 82
8.2 平面图形的面积 …… 84
8.3 体积、平面曲线的弧长 …… 85
8.4 变力做功，水压力 …… 87

第 9 章 空间解析几何与向量代数 …… 90
9.1 平面向量 …… 90
9.2 空间向量 …… 93
9.3 平面与直线方程 …… 96
9.4 二次曲面 …… 100

第 10 章 多元函数 …… 104
10.1 平面上的点函数 …… 104
10.2 偏导数 …… 106
10.3 全微分 …… 108
10.4 隐函数存在定理 …… 112
10.5 向量值函数 …… 113
10.6 多元函数的极值 …… 118

第 11 章 多元函数的积分 …… 125
11.1 基本概念 …… 125
11.2 二重积分 …… 127
11.3 三重积分 …… 135
11.4 重积分的应用 …… 139
11.5* 含参变量的积分 …… 143

第 12 章 曲线积分与曲面积分 …… 149

12.1　本章约定…… 149
12.2　曲线积分与曲面积分…… 151
12.3　格林公式…… 157
12.4　曲线积分与路径无关…… 160
12.5　曲面积分…… 162
12.6　高斯(Gauss)公式 …… 166
12.7　斯托克斯公式　环流量与旋度…… 170

第 13 章　无穷级数 …… 177
13.1　常数项级数的性质…… 177
13.2　常数项级数的审敛法…… 179
13.3　函数项级数…… 184
13.4　函数展开成幂级数…… 187
13.5*　函数项级数的一致收敛性 …… 195
13.6　傅里叶级数…… 199

第 14 章　微分方程 …… 210
14.1　微分方程的基本概念…… 210
14.2　一阶微分方程 $F(x,y,y')=0$ …… 212
14.3　可降阶的高阶微分方程…… 216
14.4　二阶线性微分方程…… 218
14.5　二阶常系数齐次线性微分方程…… 219
14.6　二阶常系数非齐次线性微分方程…… 220
14.7　用微分方程求解实际应用问题…… 224

附录一　换场才能好学好用——对高数教材改革的探讨…… 231
附录二　若干问题的证明文档…… 234
附录三　对于积分的深入探讨…… 243
附录四　对“少学时”教学内容取舍的建议…… 255
习题提示及参考答案…… 256
索引…… 270

第1章 函　　数

世间万物皆在变化，将变化的对象 A 量化 —— 用一个实数来表示 A 的某些特征或性状，就得到变量 u. 进而研究变量的变，A 现在的状态 u 比较过去变得不同了，这就是变化. 这里必然地引进了又一个变量时间 t，在时刻 t_0 时，A 为 u_0，而在时刻 t_1 时，A 为 u_1，这就为两种变量 t 与 u 建立了一种对应关系. 这种对应关系，我们称之为函数，用记号 f 表示. 函数是我们研究变量变化的最基本的工具. 下面(撇去 t 的时间背景)给出函数的严格定义.

1.1　函数的三要素

111　**定义**　函数是两个集合元素之间的一种对应关系：

$$D_f \xrightarrow{f} R_f,\quad R_f = \{y \mid y = f(x),\ x \in D_f\},$$

集合 D_f 称为 f 的**定义域**(D_f 中的点 x 称为自变量)；集合 R_f(所有函数值 $f(x)$ 的集)称为函数 f 的**值域**.

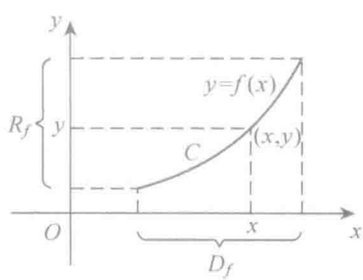


图 1-1

今后设定 $D = D_f$, $R = R_f$ 都是实数集(图 1-1).

✲　函数、映射、算子、变换都是同义词.

① **自变元**　变量 x 与 y 并不平等. 函数 y 的值是因为 x 的变化而变化的. 因此我们称 y 为因变量，可以说 y 变化的推动力是“x 的变化”. x 被称为自变元，我们对 x 变化的推动力不作考究，认为 x 可以自主变化(只受一个限制，即 $x \in D_f$). 某个命题中提到函数 y(未提及自变元)，需要时可设定一个字母表示该函数的自变量.

② **定义域**　定义域 D 是自变元的生存空间，是在函数定义有意义的前提下的 x 的取值范围.

常用的点(数)集有：$\mathbf{R}$—— 全体实数集；$\mathbf{N}^+$ —— 全体正整数集；开区间 (a,b)，闭区间 $[a,b]$，半开半闭区间等；邻域 $U(a,r)$(以 a 为圆心、r 为半径的开区间 $=(a-r,a+r)$)；空心邻域 $U_0(a,r) = U(a,r)\setminus\{a\} = (a-r,a) \cup (a,a+r)$(挖去 a 点后的部分，如图 1-2).

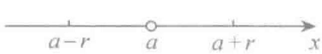


图 1-2

自变量离开了定义域会没有意义，函数也就没有意义. D 可以由背景给定(例如人为地指定)；没有指定 D 时，D 也是客观存在的，这时的 D 被称为自然定义域.

要求　看见一个具体的函数 $y = f(x)$，要能够快速、自动求出 D 来.

方法　联立解不等式求有意义的点的并集；或从实数集 $\mathbf{R}$ 中去掉使函数值无意义的点.

例 1　求 $\ln \dfrac{1-x}{\sqrt{x+2}}$ 的定义域 D.

解 由$\begin{cases}1-x>0,\\x+2>0,\end{cases}$得 $D=(-2,1)$.

③ **对应规则** 正是由于对应规则 f 的施行，才能够完成从自变量到因变量(函数)的转变，同一个 x 点，不同的规则将指向不同的终点. 除了用一个抽象的 f(或者其他字母)表示对应规则之外，还有如下具体的表示方法：解析法，如 $f(x)=3x^2+1$；列表法，如正弦函数表；图示法，如温度变化曲线.

✲ 1° 对应规则是关键，而自变量记号是无关紧要的.

2° 定义域相同，对应规则也相同的函数是同一个函数，记号不同没有关系.

3° 值域不同的函数一定不是同一个函数.

112 分段函数(例如：符号函数和取整函数)

$$y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}-1, & x<0,\\0, & x=0,\\1, & x>0,\end{cases}\text{(图 1-3)}$$

$$y=[x]\ (\text{如}[5.7]=5,\ [\pi]=3).$$

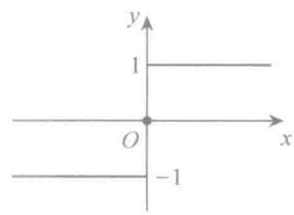


图 1-3

例 2 求 $f(x)$ 的函数值 $f(-1)$，其中 $f(x)=\begin{cases}x^2-1, & x\geqslant 1,\\3x+8, & x<0.\end{cases}$

解 $f(-1)=f(x)\big|_{x=-1}\xlongequal{\text{具体化}}(3x+8)\big|_{x=-1}=-3+8=5.$

1.2 复合函数

121 $y=f(u)=f(g(x))=(fg)(x)=h(x)$

上面的函数关系式表示：$x\xrightarrow{g}u$，$u\xrightarrow{f}y$，即变量 x 由对应规则 g 指向 u，u 再由对应规则 f 指向 y. 我们认为，自变量 x 通过复合规则 fg，记为 h，指向 y，这种函数我们称之为**复合函数**，x 为自变量，u 为中间变量.

上面的定义非常直观，容易理解，也是很好记的. 但是它不严格！在 Y 场(即受有意义规则控制的平台)中它却是严格的，因为要使得结果有意义，必然要求 $x\in D_g$，即 g 的定义域 D_g 中的每一个点对应到 g 的值域 R_g 中. 再往后，按照规则 f 跳向 y 时，该值域 R_g 中的点必须在函数 f 的定义域 D_f 中(图 1-4).

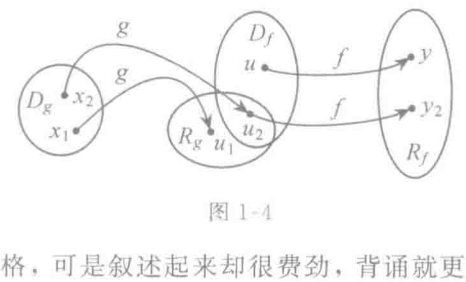


图 1-4

为了保证结果有意义，必须加上条件 ⓗ：$R_g\cap D_f\neq\varnothing$(交集非空，总有能完成 3 级跳的中间点)，条件 ⓗ 是不用提及或申明的.

一般教材中没有有意义规则(称为**空白场**)，其中必须加上条件：交集非空，这样才严格，可是叙述起来却很费劲，背诵就更加困难了.

因此，要养成习惯，随时用“有意义规则”去看待问题，处理问题. 一切都有意义时，可以放心地进行下一步. 如果出现了无意义的情况，需要换用其他的方法处理. 若是进行理论证明，就需要用“有意义规则”去分析问题，补充条件，让一切都有意义才行.

122 对应规则贴剥 u

① **贴入法** 又称代入法，简记为“代”. 其要点是：函数 $y=f(\square)$ 中自变量位置中的表达式用 $\square$（当做一块布粘胶）表示，在出现自变量的地方，将这块 $\square$ 贴上，再化简处理.

例 1 $f(3x-2)=\sin x^2-\ln x+1$，求 $f(x)$.

解 设 $3x-2=u$，则 $x=\dfrac{u+2}{3}$，于是

$$\begin{aligned} f(u)&=\sin\frac{(u+2)^2}{3^2}-\ln\frac{u+2}{3}+1\\ &=\sin\left(\frac{1}{9}u^2+\frac{4}{9}u+\frac{4}{9}\right)-\ln\left(\frac{1}{3}u+\frac{2}{3}\right)+1. \end{aligned}$$

故 $f(x)=\sin\left(\dfrac{1}{9}x^2+\dfrac{4}{9}x+\dfrac{4}{9}\right)-\ln\left(\dfrac{1}{3}x+\dfrac{2}{3}\right)+1.$

② **剥 u 法** 是对函数层层剥皮，并在每层设定中间变量 u，该方法简记为“剥 u”.

例 2 $y=\ln(1-\sqrt{x^2-1})\Rightarrow y=\ln u,\ u=1-v,\ v=\sqrt{w},\ w=x^2-1$；定义域为

$$\begin{cases}1-\sqrt{x^2-1}>0,\\ x^2-1\geqslant 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x^2<2,\\ x^2\geqslant 1\end{cases}\Rightarrow D=(-\sqrt{2},-1]\cup[1,\sqrt{2}).$$

例 3 幂函数 $y=x^a=e^{a\ln x}$ 可以看成是 $y=e^u$，$u=a\ln x$ 复合而成的.

例 4 $y=e^{\sin x^2}\Rightarrow y=e^u,\ u=\sin v,\ v=x^2,\ D=(-\infty,+\infty)$.

✲ 这两种方法一定要熟练掌握，否则后面的学习会反应慢甚至卡壳，进而影响学习的信心. 反过来，将几个单独的函数综合成一个复合函数比较简单(贴入即可)，只举一例：

$$y=\frac{1}{u},\ u=\ln(x+1)\Rightarrow y=\frac{1}{\ln(x+1)},\ D=(-1,0)\cup(0,+\infty).$$

1.3 反 函 数

在图 1-5 中，$y=f(x)$ 的定义域是 $D=[-5,7]$；在 D 中 f 不是一个一一对应函数，例如 $x=-5$ 与 $x=5$ 都对应有 $y=f(x)=a$；但是在 $D_1=[-5,0]$ 或 $D_2=[0,7]$ 中，$f(x)$ 都是一一对应函数，$\forall x\in D_2$，x 唯一地对应一个 $y\in R$（值域），且 $a\neq b$ 时，$f(a)\neq f(b)$，即不同的原像 a,b 对应的像也不同. 当 $y=f(x)$ 是一个严格单调(上升或下降）函数时，它就是一个一一对应函数. 它的对应关系为

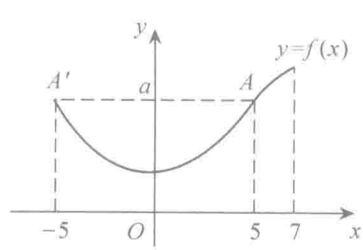


图 1-5

$$\forall x\in D_f,\ x\xrightarrow{f}y,\ y\in R_f.$$

反过来看，将 R_f 当做定义域，R_f 中的点 y 看做自变量，将对应规则 f 反向，用记号 f^{-1} 表示，称之为函数 $y=f(x)$ 的反函数，即

$$x=f^{-1}(y),\ \forall y\in R_f,\ y\xrightarrow{f^{-1}}x,\ x\in D_f.$$

f 与 f^{-1} 在图形上可以用同一条曲线表示，对应关系式可以表示成 $x\underset{f^{-1}}{\overset{f}{\rightleftarrows}}y$.

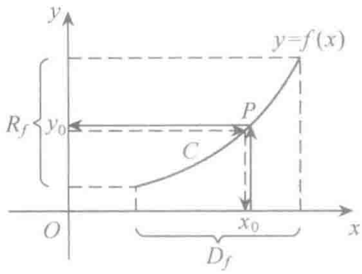


图 1-6

f 与 f^{-1} 所不同的只是，f 是由 x 轴上的点 x_0 作 x 轴的垂线交曲线于 P 点，然后从 P 点出发作 y 轴的垂线交 y 轴于 y_0 点，完成 $x_0 \to y_0$；而 f^{-1} 是由 y 轴上的点 y_0 作 y 轴的垂线（虚线）交曲线 C 于 P 点，然后从 P 点出发作 x 轴的垂线交 x 轴于 x_0 点，完成 $y_0 \to x_0$（图 1-6）.

图 1-5 中，$y = f(x)$（$x \in [-5,7]$）不是一一对应的，f 的反向对应，就会出现多值性.

人们习惯于将 x 作为自变量，将 y 作为因变量，习惯使用平常的 xOy 方位. 这时反函数 $y = f^{-1}(x)$ 的图形可以将 $y = f(x)$ 的图形对于 $y = x$ 作对称翻转而得到(图 1-7).

在图 1-8 中，对数函数 $y = \ln x$ 和反函数 $x = e^y$ 公共用一个曲线 $y = \ln x$，我们习惯用 $y = e^x$ 来表示 $y = \ln x$ 的反函数，其图形与 $y = \ln x$ 的图形关于直线 $y = x$ 对称.

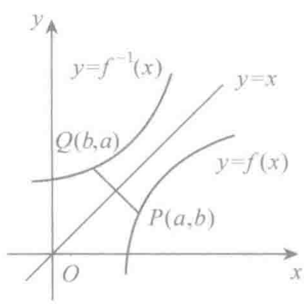


图 1-7

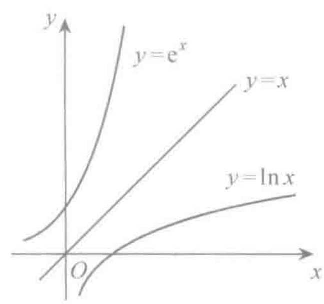


图 1-8

✲ 反函数有意义的条件为：f 是一一对应的函数；若不是这样，如 $2^2 = (-2)^2 = 4$，反过来 $4 \to 2$ 还是 $4 \to -2$ 就有问题了，或者明确 f 是多值函数的某个特定的单值分支.

定理 严格单调函数 f 存在反函数 f^{-1}.（易证 f 是一一对应的函数.）

1.4 采用一些特别的教学元素

本节不用做课堂讲授，但要求学员预习 2 遍.

141 闪现关键词与口诀

① 多看书将定义、定理、方法步骤背下来. 显然此方法花时间多，很累，效果并不好.

② 将章节内容归纳总结性的文字背下来比 ① 要好些，但内容太多太杂，容易忘记.

③ 本教材提出："闪现关键词"，它要求见到一个概念要以快于 0.5 秒的速度闪现出联系的关键词，例如：函数 → 三要素；连续 → 极限值等于函数值；导数 → 三步 ……

④ 将章节中的主要概念、方法、应该注意的要点编成口诀. 大家可以花不太多的时间，暂时背熟它 —— 这要比背条文轻松一些. 这些口诀实际上是一些"顺口溜"，从艺术上看编得很不像样. 但是作为一种学习手段，它却是很得力的工具.

它能够让你知道这个章节里讲了些什么，并且将章节的内容融汇贯通，能够联想记忆

关键的概念和方法. 只要不是百分之百忘光，多年以后也能慢慢地想起要点来. 如果学员能够花点工夫修改它，对学员来说，自己动手动脑学习效果将会更好.

⑤ 用$\boxed{5/3}$表示第 3 章第 5 段口诀；所有口诀中的小体字作解释字义用，不用读出.

$\boxed{1/1}$ 见函数，3 要素. 自变元，认清楚. 定义域，会闪求. 对应规则贴剥 u.

$\boxed{2/1}$ 分段函数对准难. 严格单调有反函.

142 借鉴

① 甲能够一目十行地看书；乙习惯于一笔一画一个字一个字地看；丙详尽地给大学生介绍游戏“新斗地主”，名称、作用、性能、要点等花了 30 分钟；丁只用 3 分钟讲解新游戏的要点. 显然，甲的效率高于乙；丙虽没错但听众心烦 ——“把我们当小学生”.

② 专家指点熟手只用三言两语(熟手也养成了“思维敏捷”的习惯).

③ 电气商品上的图标、短信中的表情符号都能代替长篇的叙述，使人了解其含义.

④ 借鉴各行业的经验，本教材将使用箭头及提示符，训练“敏捷的思维能力”.

143 箭头演算式

用(通用)符号“$=,\Rightarrow,\Leftrightarrow,\rightarrow,\sim,\approx,\leqslant,\cdots$”，连接成箭头演算式使思维顺畅快捷.

㊧ $\Rightarrow$ ㊨ 表示：由 ㊧ 可以推导出 ㊨，即“㊨ 是 ㊧ 的必要条件；不要记它，因为会产生“充”“要” 的思维停顿(至少 0.5 秒)；顺箭头之势，一泄千里多通畅”.

㊧ $\Leftrightarrow$ ㊨ 表示：㊧ 和 ㊨ 等价，即“充要条件，也不要记，知道就行”.

㊧ $\rightarrow$ ㊨ 表示：㊧ 变化为 ㊨，特别表示 ㊧ 的极限为 ㊨.

其余关系符简单(略).

144 提示符

① 函数(广义)：自变元可以是某个特定集合的元素(值域也可以相应地扩展).

② 许多“方法、操作步骤”H 都是函数，用广义函数 H 去描述问题，会简洁很多.

③ 约定：可以用“=”给对象命名，遵守左因右果顺序，如：严格单调 = 严$^{\updownarrow}$；“按照一切都要有意义的规则” = 有$_{意义}$；“出现无意义情况，改换方法” = 无$_{意义}$；记“Y 场” = 有$_{意义}$ 控制的平台，“空白场” = 没有有$_{意义}$ 的平台(如一般教材中).

④ 设 H 是某种“特性”，约定 H 具有“特性”和“集合”两重涵义，$f\,H$ 表示：

f 具有特性 $H \Leftrightarrow f \in H$，即 f 是具有“该特性”的全体(集合)中的一个元素.

又如：f 严$^{\updownarrow} \Rightarrow \exists f^{-1}$，即 1.3 节定理“若 f 严格单调，则 f 存在反函数”.

⑤ “【$】”放在 ㊧ 与关系符之间，括号中的 $ 是解释 ㊧ 到 ㊨ 的理由的提示符串. 去掉它不影响原文；也可以放在其他地方，其中由关系符的序号指明作用的位置.

✲ 熟悉本节内容称之为“入行”，入行并不难. 习惯并熟悉提示符或箭头演算能使思维敏捷；但未入行者以后见到提示符或箭头演算式时思维反应会慢很多.

提示符多采用中文加上下标表示，“入行”后不需要特别去记、背，不会增加记忆负担. 见到它时，由其中的关键信息就知道它的意思. 实在忘了也可以在书后“索引”里查到.

1.5 初等函数

151 基本初等函数

基本初等函数由幂函数、指数函数、三角函数及其反函数构成，排列如下：

① 常量函数 $y = c$ (c 为常量)；

② 幂函数 $y = x^u$(u 为实数)；

③ 指数函数 $y = a^x(a > 0, a \neq 1)$；当 $a = \mathrm{e}$ 时，$y = \mathrm{e}^x$；

④ 对数函数 $y = \log_a x$ $(a > 0, a \neq 1)$；当 $a = \mathrm{e}$ 时，$y = \ln x$；

⑤ 三角函数 $y = \sin x$，$y = \cos x$，$y = \tan x$，$y = \cot x$，$y = \sec x$，$y = \csc x$；

⑥ 反三角函数 $y = \arcsin x$，$y = \arccos x$，$y = \arctan x$，$y = \operatorname{arccot} x$.

152 初等函数的定义

基本初等函数经过有限次四则运算与复合运算所得到的函数统称为**初等函数**.

双曲函数也是初等函数，常见的有：双曲正弦函数 $y = \operatorname{sh} x = \dfrac{1}{2}(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})$，双曲余弦函数 $y = \operatorname{ch} x = \dfrac{1}{2}(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})$，双曲正切函数 $y = \operatorname{th} x = \dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}$ 等.

有以下常用公式：

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1; \qquad \operatorname{sh}(x \pm y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y \pm \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y;$$

$$\operatorname{sh} 2x = 2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y; \quad \operatorname{ch}(x \pm y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y \pm \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y.$$

我们平常见到的函数，绝大多数都是初等函数. 非初等函数有以下几种：① 分段函数；② 突破了定义中有限次的函数，如 $1 + x + x^2 + \cdots$ 或 $x^{x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}$.

153 具有某些特性的函数

① **有界性** 若 $\exists$ 正常数 M，$\forall x \in D$，$|f(x)| < M$ 成立(有限的范围能够包围函数的值域)，则称函数 $f(x)$ 有界；若 M 不存在，则称该函数无界.

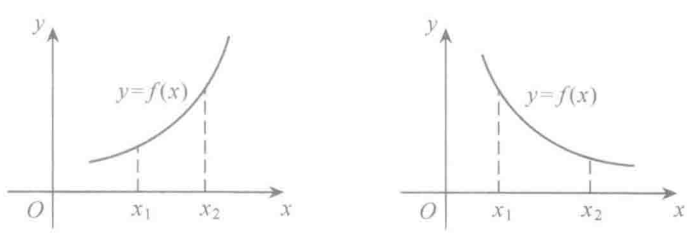
类似地可以定义上有界和下有界. f 有界 $\Rightarrow f$ 上有界且 f 下有界.

② **单调性**

若 $\forall x_1 < x_2$，有 $f(x_1) \leqslant f(x_2)$，则称 $f(x)$ 单调上升，简记为 $f(x) \uparrow$.

若 $\forall x_1 < x_2$，有 $f(x_1) \geqslant f(x_2)$，则称 $f(x)$ 单调下降，简记为 $f(x) \downarrow$.

若将不等号 $\leqslant$ (或 $\geqslant$) 换成 $<$ (或 $>$)，则称之为严格单调上升或下降(图 1-9).



(a) 单调上升　　(b) 单调下降

图 1-9

③ **奇偶性**

若 $f(x)$ 的图形关于原点对称，即 $\forall x \in D$，$f(-x) = -f(x)$，则称 $f(x)$ 为奇函数.

若函数 $f(x)$ 的图形关于 y 轴对称，即 $\forall x \in D$，$f(-x) = f(x)$，则称 $f(x)$ 为偶函数.

例 1 求证：两个奇函数之积为偶函数.

解 注意体会贴入法. 设 $f(-x) = -f(x)$，$g(-x) = -g(x)$，$x \in D$；记 $h(x) = f(x)g(x)$，$x \in D$；下式就表明 h 为 D 上的偶函数.

$$h(\boxed{-x}) = f(\boxed{-x})g(\boxed{-x}) = (-f(x))(-g(x)) = f(x)g(x) = h(x).$$

④ **周期性** 客观世界中存在许多周期现象，数学上用周期函数来描述它.

若 $\exists L > 0$，$\forall x \in D$，$f(x+L) = f(x)$ 恒成立，则称 $f(x)$ 为周期函数，L 为 $f(x)$ 的周期，最小的正数周期称为最小周期. 例如：2π 是 $\sin 2x$ 的一个周期，π 是其最小周期.

习　题　1

1. 求下列函数的自然定义域 D：

① $y = \sqrt{9 - x^2}$；　　② $y = \dfrac{1}{1-x} + \sqrt{x+2}$；

③ $y = \sqrt{\ln \dfrac{5x - x^2}{4}}$；　　④ $y = \dfrac{e^{-x}}{x}$；

⑤ $y = \arcsin(x-3)$.

2. 下列各题中函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是否相同？为什么？

① $f(x) = \ln x^2$，$g(x) = 2\ln x$；　　② $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x+1}$，$g(x) = x - 1$；

③ $f(x) = 1$，$g(x) = \sin^2 x + \cos^2 x$；

④ $f(x) = \ln \dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+1}+1}$，$g(x) = 2\ln \dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}$.

3. 求下列函数的反函数：

① $y = x^2\ (x \leqslant 0)$；　　② $y = \dfrac{1-x}{1+x}$；　　③ $y = \begin{cases} x, & -\infty < x < 1, \\ x^2, & 1 \leqslant x \leqslant 4, \\ e^x, & 4 < x < +\infty. \end{cases}$

4. 指出以下函数分别是由哪些基本初等函数复合而成的：

① $y = \sin^2 x$；　　② $y = \sin(2x-1)$；

③ $y = e^{3x-2}$；　　④ $y = \cos^2(e^{-x}+1)$.

5. 设 $f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leqslant 1, \\ 0, & |x| > 1. \end{cases}$ 求 $f(f(x))$.

6. 在下列条件下，求 $f(x)$：

① $f(3x-1) = 9x^2 + 5\sin 3x - 1$；　　② $f(\sin^2 x) = x + 2$，$x \in [0,1]$.

7. ① 证明：两个偶函数之和为偶函数，两个奇函数之和为奇函数.

② 证明：两个偶函数之积为偶函数，两个奇函数之积为偶函数.

8. 证明：$f(x) = x\sin x$ 在区间 $(0, +\infty)$ 内无界.

第2章 极 限

变量的变，其最重要的特征是“变化趋势”，即朝何处变，变成什么结果.

“变化趋势”可分为 $u \to A$，$u \to \infty$，u 摆动不定几种，对于自变量而言，它的变化趋势是自主的或是人为指定的，然而由此造成函数——因变量 u 的变化趋势会怎样？求 $u \to ?$的运算称为求极限.

极限是高等数学的基础，只有打好基础，才能完成后面的学习. 极限分为两部分，第一是极限的计算，要求学生一定要熟练掌握求极限的方法，能够又快又准地计算. 第二是极限的理论，本教材将充分利用这一点对学生进行逻辑思维的训练(提高学生的素质). 这一部分内容，放在本章 2.5 节、2.6 节.

2.1 数列(函数)的极限

211 几个数列的例子

① $u_n = \dfrac{n}{n+1}$ $(n = 1,2,\cdots)$，即$\dfrac{1}{2},\dfrac{2}{3},\dfrac{3}{4},\cdots$；

② $u_n = \sin\dfrac{1}{n}$ $(n = 1,2,\cdots)$，即 $\sin 1,\sin\dfrac{1}{2},\sin\dfrac{1}{3},\cdots$；

③ $u_n = \dfrac{1}{2^n}$ $(n = 1,2,\cdots)$，即$\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2^2},\dfrac{1}{2^3},\cdots$；

④ $u_n = 2n-1$ $(n = 1,2,\cdots)$，即 $1,3,5,\cdots$.

u_n 是数列的通项. $u_n = u(n)$ 实质上是一个函数，自变量为 n，是该项的序号，定义域是 $\mathbf{N}$(自然数). u_n 本身也是一个变量，当序号 n 无限增大时，我们来研究变量 u_n 的变化趋势. 显然，数列 ① 的项会变得愈来愈靠近常数1；数列 ② 的项会变得愈来愈靠近常数0；数列 ③ 的项会变得愈来愈靠近常数 0；数列 ④ 的项不会变得愈来愈靠近任何一个常数.

下面给出数列极限的定义.

定义 当序号 n 无限增大时，数列的通项 u_n 变得无限趋近某个常数 A 时，称 u_n 以 A 为**极限**，记为 $u_n \to A$ 或 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = A$ (否则记为 $u_n \not\to A$，“$\not\to$”表示不趋近).

上述定义不难理解，但它只是提供了一个感觉的标准，不够严密. 在最简单的情况下能够得到正确结果.

212 函数的极限

定义 当自变量 x 无限增大时，函数 $y = f(x)$ 的值无限趋近于常数 A，则称 A 为函数 $f(x)$ 在自变量 $x \to \infty$ 时的**极限**，记为 $f(x) \to A$，或 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$.