面向21世纪高等教育课程教材

运筹学原理与实验教程

◎贾　贞　主编

華中師範大學出版社

面向21世纪高等教育课程教材

运筹学原理与实验教程

主　编：贾　贞
副主编：宋奇庆　封全喜　张琼芬

华中师范大学出版社

内 容 提 要

本书系统地介绍了运筹学的一些主要分支的基本原理和基本方法，内容包括线性规划、对偶理论、运输问题、整数规划、动态规划、图与网络、存储论、非线性规划，并配有相应的实验方法。内容上注重从实际问题出发，力求原理和方法的叙述简明易懂。实验采用的是 LINGO 软件。

本书可作为高等院校管理、工程类各专业和其他相关专业的教材或参考书，也可作为工程技术人员和管理人员的自学教材。

新出图证(鄂)字 10 号

图书在版编目(CIP)数据

运筹学原理与实验教程/贾贞主编. —武汉：华中师范大学出版社，2016.6
面向 21 世纪高等教育课程教材
ISBN 978-7-5622-7389-9

Ⅰ. ①运… Ⅱ. ①贾… Ⅲ. 运筹学—高等学校—教材 Ⅳ. ①O22

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 112231 号

运筹学原理与实验教程

主　　编：贾　贞©
责任编辑：袁正科　　**责任校对：**缪　玲　　**封面设计：**甘　英　　**封面制作：**胡　灿
编 辑 室：第二编辑室　　**电　　话：**027－67867362
出版发行：华中师范大学出版社　　**社　　址：**湖北省武汉市珞喻路 152 号
电　　话：027－67863426/67863280(发行部) 027－67861321(邮购)
传　　真：027－67863291
网　　址：http://press.ccnu.edu.cn　　**电子信箱：**press@mail.ccnu.edu.cn
印　　刷：武汉鑫昶文化有限公司　　**督　　印：**王兴平
字　　数：320 千字
开　　本：787mm×1092mm　1/16　　**印　　张：**13.25
版　　次：2016 年 7 月第 1 版　　**印　　次：**2016 年 7 月第 1 次印刷
印　　数：1—1500　　**定　　价：**26.00 元

欢迎上网查询、购书

前　言

运筹学在经济管理、工程管理、信息管理、系统科学及工程技术等方面都有着非常广泛的应用。本书重点选取了各类管理和工程技术中应用较为广泛的运筹学模型与方法，在编者多年的教学实践的基础上编写而成。

本书分两部分，第一部分主要介绍运筹学的基本原理、基本方法及应用，第二部分介绍了运筹学的实验方法。

在内容的编写上，力求从实际问题出发引入基本概念和原理，自然流畅，通俗易懂。注重基本原理及方法的介绍和应用，尽量避免太烦琐的数学证明，以降低初学者学习的难度。为帮助读者掌握基本知识，提高分析问题和解决问题的能力，每章后均配有本章小结和一定量的习题，并在书后附有参考答案。

为帮助读者掌握运筹学的基本方法，提高运用现代化技术手段解决实际问题的能力，书中还配有实验指导，针对本书所介绍的模型和方法，详细介绍了应用 LINGO 软件解决相应问题的方法。

不同专业学生在使用本书时，可根据专业需要和学时的限制，对学习内容做适当取舍。

本书的绪论和第 1、2、3 章由贾贞编写，第 6、9 章由宋奇庆编写，第 4、8 章由封全喜编写，第 5、7 章由张琼芬编写，全书由贾贞统稿、定稿。

本书在编写过程中，得到了桂林理工大学理学院的领导和老师们的大力支持，特别是蒋远营博士和孟兵老师对本书的编写工作作出了贡献，在此对他们一并表示衷心的感谢。

由于编者的水平有限，本书难免有不足之处，敬请广大读者批评指正。

编　者

2016 年 4 月

目　　录

第Ⅱ部分　运筹学实验

绪　论

一、运筹学的发展简介

运筹学的思想可以追溯到很古老的年代，如我国“田忌赛马”的故事就蕴涵着朴素的运筹学思想。而运筹学作为一门现代科学，普遍认为是第二次世界大战期间首先在英、美两国发展起来的。1937 年，英国首先在空军部门成立了一个由数学家、物理学家、天文学家、生理学家及军事专家等许多领域的科学家共同组成的军事战略研究小组，其任务是研究如何最大限度地发挥有限雷达的效用，以应对德军的空袭。由于军事研究小组的工作在提高军事运筹水平方面取得了惊人的成功，使得这种研究工作在整个军事领域迅速传播。到 1941 年英国皇家陆、海、空三军都成立了这样的科学小组，研究诸如护航舰保护商船的编队问题、反潜深水炸弹的合理起爆深度问题等。随后，美国和其他盟军也纷纷效仿，建立了自己的研究小组，组织大批科学家运用科学手段来处理战略与战术问题，这些军事研究小组正是最早的运筹小组，以美国为代表的一些英语国家称这类研究小组的工作为“Operations Research”。这就是运筹学原英文名 Operational Research（简称 OR）的历史由来。第二次世界大战期间，OR 成功地解决了许多重要的作战问题，大大提高了军队的战斗力，显示了科学的巨大威力。战后，许多从事运筹小组活动的科学家将其精力转向对早期仓促建立起来的运筹优化技术进行加工整理，探索应用运筹学思想和方法解决社会经济问题的可能性。到 20 世纪 60 年代，运筹学相继在工业、农业、经济和社会问题等许多领域应用起来，同时，运筹学在理论上也飞快地发展，并逐渐形成许多重要的分支。

1948 年，英国最早创立了运筹学学会。美国于 1952 年也成立了运筹学学会，它的宗旨是满足运筹学研究领域的科学家相互交流的需要，以促进 OR 理论与实践的发展。之后，许多其他国家也纷纷成立了运筹学学会。1957 年在英国牛津大学召开了第一届运筹学国际会议，1959 年国际运筹学学会（International Federation of Operations Research Societies，IFORS）成立。

我国在 20 世纪 50 年代中期，由钱学森、许国志等知名教授将运筹学从西方引入，在国内进行全面的介绍和推广。1956 年在中国科学院成立了第一个运筹学小组，1957 年，我国正式将“Operations Research”命名为“运筹学”，“运筹”二字取自古语“运筹帷幄之中，决胜千里之外”，它比较恰当地反映了这门学科的性质和内涵。由于以华罗庚为代表的许多科学家都加入了运筹学研究队伍中来，我国运筹学研究发展迅速，其理论与应用研究也很快跟上了时代的步伐，1980 年中国运筹学学会正式成立。

二、运筹学的研究对象与特点

运筹学是一门具有多学科交叉特点的边缘科学，至今还没有一个统一确切的定义。美国的运筹学先驱莫斯（Morse PM）和金博尔（Kimball GE）曾将运筹学定义为："为决策机构在对其控制下的业务活动进行决策时，提供以数量化为基础的科学方法。"英国运筹学学会提出的定义是："运筹学是把科学方法应用在指导人员、工商企业、政府和国防等方面解决发生的各种问题，其方法是发展一个科学的系统模式，并运用这种模式预测、比较各种决策及其产生的后果，以帮助主管人员科学地决定工作方针和政策。"我国在《中国企业管理百科全书》中将运筹学定义为："应用分析、试验、量化的方法，对经济管理系统中人、财、物等有限资源统筹安排，为决策者提供有依据的最优方案，以实现最有效的管理。"现在也有学者将运筹学定义为："通过构建、求解数学模型，规划、优化有限资源的合理利用，为科学决策提供量化依据的系统知识体系。"总之，运筹学最早是为了解决军事问题的需要而产生，由于科学地研究管理问题的需要而发展。运筹学是利用计划方法和多学科专家组成的综合队伍把复杂的问题表示成数学模型，通过定量的分析为决策者提供数量方面的依据，从而提高决策者做出正确决策的能力。运筹学的研究对象涵盖了一切领域的管理与优化问题。

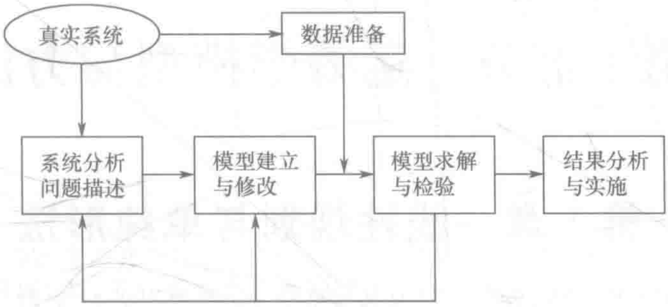
运筹学的特点是：(1) 从全局的观点看问题，追求总体效果最优。从系统的观点出发，力图以整个系统最佳的方式来解决该系统各部门之间的利害冲突。对所研究的问题求出最优解，寻求最佳的行动方案，所以它也可看成是一门优化技术，提供的是解决各类问题的优化方法。(2) 使用模型方法作定量研究。通过建立与求解模型使问题在量化的基础上得到合理的决策。(3) 多学科交叉的特点。由于运筹学解决的实际问题来自各行各业，在构建与求解模型时涉及方方面面的科学知识，因此需要多学科的专家共同研究完成。(4) 与计算机密切相关。计算机的发展，使得许多复杂的计算得以在计算机上实现。另外，还可以利用计算机进行模拟仿真，以检验理论方法的有效性。因此，计算机是运筹学必不可少的研究工具。

三、运筹学的研究内容和工作步骤

运筹学是一门新兴的应用科学，近几十年来，运筹学模型已广泛地应用于许多领域，诸如生产计划与调度、市场预测与销售、库存管理、设备更新与可靠性、工程的优化设计、资源分配、运输问题、企业管理、人事管理、城市管理、计算机与信息系统、决策咨询、财政与会计等。随着运筹学在很多领域的渗透，运筹学本身也在不断发展，根据其模型类型的不同，目前已化分成了许多的分支。其主要分支有：数学规划（又包含线性规划、非线性规划、整数规划、动态规划等）、图论、网络流、决策分析、排队论、可靠性数学理论、库存论、对策论、搜索论、模拟等。

运筹学的工作步骤是：(1) 分析与表述问题；(2) 建立模型；(3) 对模型求解；(4) 对

模型及模型的解进行检验;(5) 建立对解的有效控制;(6) 方案实施。其工作步骤如下图所示:



运筹学的工作步骤

本书作为非运筹学专业的教材,对运筹学的一些主要分支,介绍了其基本原理和方法,并提供了运用计算机软件求解运筹学问题的方法,供读者学习和参考。

第Ⅰ部分　运筹学模型与方法

第1章　线性规划与单纯形法

线性规划(Linear Programming)是运筹学的一个重要分支，自1947年美国数学家丹捷格(Dantzig)提出了一般线性规划问题求解的方法——**单纯形法**之后，线性规划在理论上日趋成熟，应用也越来越广泛。它的应用已渗透到工农业生产、交通运输、商业、军事、经济管理等诸多领域。在理论和算法上发展也较为完善。

1.1　线性规划问题及数学模型

1.1.1　线性规划问题实例

在生产实践和各种经济活动中，人们常常遇到这样的问题：一是如何运用现有资源(如人力、物力、财力)安排生产，使产值或利润最大化；二是对于给定的任务，如何统筹安排，使得完成任务所消耗的资源量最小化。这些问题都可以用线性规划模型来描述。

例1.1.1　(生产计划问题)某工厂在计划期内安排生产甲、乙两种产品，已知生产单位产品所需的设备台时与A,B两种原材料的消耗及现有资源量如表1.1.1所示。设该厂每生产甲、乙产品各一件，分别可获利2元、3元。问：应如何安排生产使该厂获得最大利润？

表1.1.1　例1.1.1的已知数据表

产品 / 资源	甲	乙	资源限量
设备(台时)	1	2	8
原材料A(kg)	4	0	16
原材料B(kg)	0	4	12
利润(元/件)	2	3	

该问题的实质是安排生产甲、乙产品各多少件才能使得生产利润取得最大值。

设在计划期内分别生产甲、乙产品x_1,x_2件。x_1和x_2要受到设备和原材料的制约，即应满足：$x_1+2x_2\leqslant 8$(生产设备制约)；$4x_1\leqslant 16$(原材料A制约)；$4x_2\leqslant 12$(原材料B制

约)。要求 x_1, x_2 在满足上述条件的前提下,使得利润函数 $z=2x_1+3x_2$ 取得最大值。

该问题可用如下数学模型描述:

$$\max z=2x_1+3x_2,$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}x_1+2x_2\leqslant 8,\\4x_1\leqslant 16,\\4x_2\leqslant 12,\\x_1,x_2\geqslant 0。\end{cases}$$

其中,x_1 和 x_2 称为**决策变量**,它的一组值就代表一种生产方案;函数 $z=2x_1+3x_2$ 称为**目标函数**,代表总利润,其系数 2,3 称为**价值系数**,代表单位产品提供的利润;不等式 $x_1+2x_2\leqslant 8$,$4x_1\leqslant 16$ 和 $4x_2\leqslant 12$ 称为**约束条件**,约束条件右边的常数 8,16 和 12 称为**资源限量**,代表可利用资源的最大限量;$x_1\geqslant 0$,$x_2\geqslant 0$ 称为**非负约束**。

例 1.1.2 (配方问题)某人因健康需要,每日需要摄入 A,B 两种维生素,其中 A 最少需要 9 个单位,B 最少需要 19 个单位。现有 6 种常用食物,每克含 A,B 维生素量如表 1.1.2 所示。

表 1.1.2　例 1.1.2 的维生素配方数据表

单位含量 \ 食物 维生素	1	2	3	4	5	6	最少需要量
A	1	0	2	2	1	2	9
B	0	1	3	1	3	3	19
单位价格(元)	3.5	3.0	6.0	5.0	2.7	2.2	

求一种花费最少的食物选择方式。

该问题的实质是要确定各种食物的用量,在满足所需维生素摄入量要求的前提下,使得总的花费最少。

设第 i 种食物用量为 $x_i(i=1,2,3,4,5,6)$克,则问题的数学模型如下:

$$\min z=3.5x_1+3.0x_2+6.0x_3+5.0x_4+2.7x_5+2.2x_6,$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}x_1+2x_3+2x_4+x_5+2x_6\geqslant 9,\\x_2+3x_3+x_4+3x_5+3x_6\geqslant 19,\\x_i\geqslant 0,\ i=1,2,\cdots,6。\end{cases}$$

例 1.1.3 (合理下料问题)某车间有一批长为 180cm 的坯料,需将其截为三种不同规格的条料:70cm,52cm,35cm;三种规格条料的需要量分别为 100 条、150 条、100 条。问应如何下料使总的用料最省?

要使总的用料最省,实际上是要求下料的余料最少。每根坯料可以有多种下料方式,按照本题要求的规格下料,共有 8 种不同的下料方式,各种下料方式的余料情况如表 1.1.3 所示。

表 1.1.3 例 1.1.3 的下料方式表

合格条数 下料方式 / 规格	一	二	三	四	五	六	七	八	需要量
70cm	2	1	1	1	0	0	0	0	100
52cm	0	2	1	0	3	2	1	0	150
35cm	1	0	1	3	0	2	3	5	100
余料	5	6	23	5	24	6	23	5	

设用第 i 种方式下料 $x_i(i=1,2,\cdots,8)$根，则问题的数学模型如下：

$$\min z=5x_1+6x_2+23x_3+5x_4+24x_5+6x_6+23x_7+5x_8,$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}2x_1+x_2+x_3+x_4\geqslant 100,\\2x_2+x_3+3x_5+2x_6+x_7\geqslant 150,\\x_1+x_3+3x_4+2x_6+3x_7+5x_8\geqslant 100,\\x_i\geqslant 0,i=1,2,\cdots,8。\end{cases}$$

以上我们建立了几个经济领域中常见问题的数学模型。此外，运输问题、布局问题、分派问题、投资问题等都可以建立类似的数学模型。上述数学模型具有如下共同特征：

(1) 每个问题都用一组(非负)决策变量$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$来表示一种方案，这组变量的一组取值代表一个具体方案。

(2) 存在一定的约束条件，这些约束条件可以用一组线性等式或不等式来表示。

(3) 目标函数用决策变量的线性函数表示。按问题的不同，要求目标函数实现最大化或最小化。

我们把具有上述三个特征的问题称为线性规划问题(Linear program)，简称 LP 问题，其数学模型称为线性规划(LP)模型。

1.1.2 线性规划模型的一般形式

线性规划问题数学模型的一般形式为：求一组变量 $x_j(j=1,2,\cdots,n)$的值，使其满足

$$\max(\min)z=c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n,$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n * b_1,\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n * b_2,\\\cdots\cdots\cdots\cdots\\a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n * b_m,\\x_j\geqslant 0,j=1,2,\cdots,n。\end{cases}$$

式中，“＊”代表“≥”、“≤”或“＝”。

上述模型可简写为

$$\max(\min)z=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j,$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j * b_i, i = 1,2,\cdots,m,\\ x_j \geqslant 0, j = 1,2,\cdots,n。\end{cases}$$

其中,变量 x_j 称为决策变量,函数 $z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ 称为目标函数,条件 $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j * b_i$ 称为约束条件,$x_j \geqslant 0$ 称为非负约束。在经济问题中,又称 c_j 为价值系数,b_i 为资源限量。

1.1.3　线性规划模型的标准型

为了便于今后的讨论,我们规定线性规划模型的标准形式为

$$\max z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j,$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, i = 1,2,\cdots,m,\\ x_j \geqslant 0, j = 1,2,\cdots,n,\end{cases}$$

上述模型又可表示为矩阵形式

$$\max z = \boldsymbol{cx},$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b},\\ \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}。\end{cases}$$

或向量形式

$$\max z = \boldsymbol{cx},$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}\sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{p}_j x_j = \boldsymbol{b},\\ \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}。\end{cases}$$

其中,$\boldsymbol{c} = (c_1, c_2, \cdots, c_n)$,$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}$ 表示 $\boldsymbol{x}$ 的每个分量非负($\boldsymbol{x} \leqslant \boldsymbol{0}$ 表示 $\boldsymbol{x}$ 的每个分量非正),

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_m\end{pmatrix}, \boldsymbol{p}_j = \begin{pmatrix} a_{1j}\\ a_{2j}\\ \vdots\\ a_{mj}\end{pmatrix} (j = 1,2,\cdots,n)。$$

对于一般的线性规划模型可以按照下述方法转化成标准形式:

(1) 若目标函数形式是 $\min z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$,可令 $z = -z'$,将目标函数转化为

$$\max z' = -\sum_{j=1}^{n} c_j x_j。$$

(2) 若约束不等式是"$\leqslant$"形式,可在方程左端加上一个非负变量(称为**松弛变量**),将方程转化为等式。

如在例 1.1.1 的模型中,在第一个约束条件左端加上一个松弛变量 x_3 转化为

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 8, x_3 \geqslant 0。$$

(3) 若约束不等式是“$\geqslant$”形式，可在方程左端减去一个非负变量(称为**剩余变量**)，将方程转化为等式。

如在例 1.1.2 的模型中，在第一个约束条件左端减去一个剩余变量 x_7，转化为

$$x_1+2x_3+2x_4+x_5+2x_6-x_7=9, x_7\geqslant 0。$$

一般情况下，松弛变量和剩余变量在目标函数中对应的系数均取 0。

(4) 若某变量 x_k 无非负限制(称为**自由变量**)，为满足标准形式中对变量的非负要求，可引进两个变量 $x_k'\geqslant 0, x_k''\geqslant 0$，用 $x_k'-x_k''$ 取代变量 x_k 即可。

(5) 在上述标准型中，一般还要求 $b_i\geqslant 0$。若约束不等式中出现 $b_i<0$ 的情况，在不等式两边同乘以 -1 即可。

例 1.1.4 将以下线性规划模型化为标准型。

$$\min z=2x_1+3x_2,$$
$$\text{s.t.}\begin{cases}3x_1+6x_2\leqslant 24,\\2x_1+x_2\geqslant 10,\\x_1\geqslant 0。\end{cases}$$

解 令 $z=-z'$，引进非负变量 x_2', x_2''，令 $x_2=x_2'-x_2''$，再引进松弛变量 x_3 和剩余变量 x_4，将模型化为标准型，有

$$\max z'=-2x_1-3x_2'+3x_2''+0x_3+0x_4,$$
$$\text{s.t.}\begin{cases}3x_1+6x_2'-6x_2''+x_3=24,\\2x_1+x_2'-x_2''-x_4=10,\\x_1,x_2',x_2'',x_3,x_4\geqslant 0。\end{cases}$$

1.2 线性规划问题的图解法

为了给线性规划问题解的基本理论提供一个直观的说明，我们先介绍线性规划问题的图解法。对于只有两个变量的线性规划问题，可以用图解法求解。下面我们以具体例子说明其解法步骤。

例 1.2.1 用图解法求解 LP 问题

$$\max z=2x_1+5x_2,$$
$$\text{s.t.}\begin{cases}x_1\leqslant 4,\\x_2\leqslant 3,\\x_1+2x_2\leqslant 8,\\x_1,x_2\geqslant 0。\end{cases}$$

解 先做出由 $x_1\leqslant 4, x_2\leqslant 3, x_1+2x_2\leqslant 8$ 及 x_1 和 x_2 轴围成的区域 $OABCD$(图 1.2-1)，称此区域为 LP 问题的**可行域**。可行域内的每一点对应的坐标(x_1,x_2)代表一个满足约束条件的决策方案。再作直线 $2x_1+5x_2=z$(将 z 看作参变量)，该直线上的每一点(x_1,x_2)对应的目标函数值都等于参数 z，故称此直线为**等值线**。然后让等值线作平行移动，当等值线向上平移时，目标函数值随之增大，当它移动到可行域的边界时，达到最大值，从而获得最优解。从图 1.2-1 可见，当等值线 $2x_1+5x_2=z$ 平移至 B 点时，目标函数取得最大值，此时 LP 问题有唯一最优解，即 $x^*=(2,3)$，对应的最优目标函数值为 $z^*=19$。

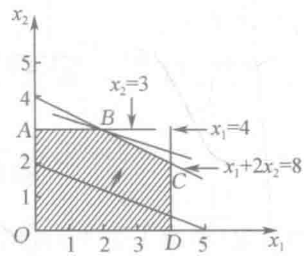


图 1.2-1　例 1.2.1 的可行域与最优解

用图解法求解 LP 问题的基本步骤是：

(1) 由全部约束条件作图，得到 LP 问题的可行域；

(2) 做出一条目标函数的等值线；

(3) 平移等值线到可行域边界得到最优点。

例 1.2.2　将例 1.2.1 中 LP 问题的目标函数改为

$$\max z = x_1 + 2x_2,$$

约束条件不变，试用图解法求解。

解　与例 1.2.1 相同，做出 LP 问题的可行域 $OABCD$（图 1.2-2）及等值线 $x_1 + 2x_2 = z$，向上平移等值线至可行域的边界。由于等值线正好与边界线 $x_1 + 2x_2 = 8$ 平行，故等值线在边界处正好与线段 BC 重合，且目标函数取得最大值。因此，线段 BC 上的每一点都是一个最优解，故此 LP 问题有无穷多个最优解，目标函数的最优值为 $z^* = 8$。

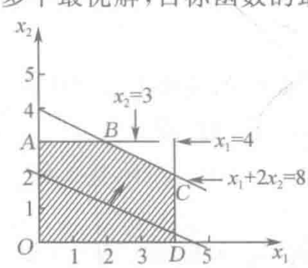


图 1.2-2　例 1.2.2 的可行域与最优解

例 1.2.3　用图解法求解 LP 问题

$$\max z = x_1 + x_2,$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} x_1 - x_2 \geqslant 0, \\ -x_1 + 2x_2 \geqslant 0, \\ x_1, x_2 \geqslant 0. \end{cases}$$

解　该 LP 问题的可行域如图 1.2-3 所示，此可行域为一个无界开集，目标函数可以无限地增大，故其最优解是无界的，此时称 LP 问题有无界解。

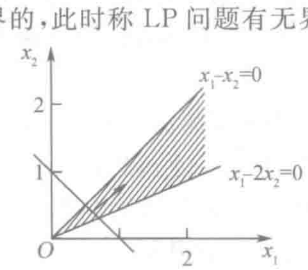


图 1.2-3　例 1.2.3 的可行域与最优解（无界）

例 1.2.4　用图解法求解线性规划问题

$$\max z = x_1 + x_2,$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} x_1 - x_2 \leqslant 0, \\ -x_1 + 2x_2 \leqslant 0, \\ x_1, x_2 \geqslant 0。\end{cases}$$

解　该 LP 问题的可行域为空集(如图 1.2-4),此时 LP 问题无可行解,更不可能有最优解。

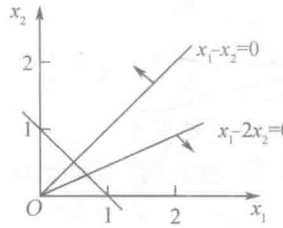


图 1.2-4　例 1.2.4 的可行域(空集)

从以上例题可见,线性规划问题的解有以下几种情形:

(1) 有唯一最优解;

(2) 有无穷多最优解;

(3) 无界解;

(4) 无可行解。

下面介绍在后面的学习中将要用到的两个基本概念。

凸集　设 S 是一个 n 维点集,任取两点 $x^{(1)}, x^{(2)} \in S$,若有

$$\alpha x^{(1)} + (1-\alpha)x^{(2)} \in S, \alpha \in [0,1],$$

则 S 为一凸集。

图 1.2-5 中,(a) 和(b) 为凸集,(c) 和(d) 不是凸集。

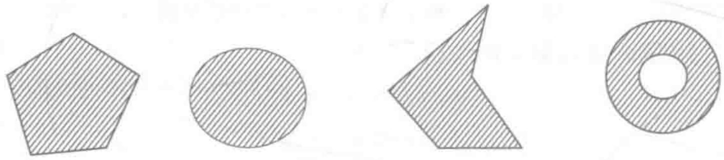


图 1.2-5　凸集示意图

顶点　设 S 为一凸集,$x^{(0)} \in S$,若不存在两点 $x^{(1)}, x^{(2)} \in S$ 且 $x^{(1)} \neq x^{(2)}$,使得

$$x^{(0)} = \alpha x^{(1)} + (1-\alpha)x^{(2)}, \alpha \in (0,1),$$

则 $x^{(0)}$ 称为 S 的一个顶点。

对于两个变量的 LP 问题,从上述图解法还可得出如下启示:

(1) LP 问题的可行域若存在,则为一个凸集;

(2) LP 问题的可行域或有有限个顶点,或为空集;

(3) LP 问题若有最优解,一定可以在其可行域的顶点上得到。

下面我们将从理论上证明这些结论对于一般 LP 问题也成立。