杨贵武 著

初升高数学衔接教材

湖南师范大学出版社

杨贵武 著

初升高数学衔接教材

湖南师范大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

初升高数学衔接教材 / 杨贵武著 .—长沙 ：湖南师范大学出版社，2016.1
ISBN 978-7-5648-2338-2

Ⅰ.①初… Ⅱ.①杨… Ⅲ.①中学数学课—初中—升学参考资料 Ⅳ.①G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2015）第 304596 号

初升高数学衔接教材

杨贵武 著

◇策划组稿：廖小刚
◇责任编辑：廖小刚
◇责任校对：蒋旭东
◇出版发行：湖南师范大学出版社
地址/长沙市岳麓山 邮编/410081
电话/0731.88853867 88873071 传真/0731.88872636
网址/http：//press.hunnu.edu.cn
◇经销：湖南省新华书店
◇印刷：湖南雅嘉彩色印刷有限公司
◇开本：710 mm×1000 mm 1/16
◇印张：12.25
◇字数：228 千字
◇版次：2016 年 3 月第 1 版 2016 年 3 月第 1 次印刷
◇书号：ISBN 978-7-5648-2338-2
◇定价：30.00 元

目 录

第一讲　因式分解

把一个多项式化为几个整式的积的形式，叫做把这个多项式因式分解（或分解因式）.

因式分解是代数式的一种重要的恒等变形. 在分式的运算中，因式分解是约分通分必备的基础知识；在解二次或高次方程、方程组及不等式中，因式分解法是重要的方法；在研究代数式和三角式的变形中，分解因式是一种重要的手段. 由此可见，因式分解在代数恒等变形中扮演着重要的角色.

知能要点透视

1. *多项式的因式分解是在给定的数域上进行的，即要求各因式的系数*是给定数域上的数. 因此，一个多项式在某个数域上也许不能分解因式，而在另外的（更广的）数域上也许是可以分解的.

2. 因式分解的常用方法有：提公因式法、公式法、分组分解法、十字叉乘法、待定系数法等.

3. 分解因式的常用基本公式有：

公式 1：$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$，

$a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$.

公式 2：$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$.

公式 3：$a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca=(a+b+c)^2$.

公式 4：$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$，

$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$.

公式 5:$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=(a+b)^3$,

$a^3-3a^2b+3ab^2-b^3=(a-b)^3$.

公式 6:$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$.

典型例题解析

一、因式分解的方法

1. 公式法

公式法反映了因式分解的本质,即多项式乘法的逆运算. 它多用在提取公因式之后,或根本就没有公因式之时,也用在分组时组内或各组之间.

例 1 分解因式:$a^4+a^2b^2+b^4$.

解 $a^4+a^2b^2+b^4$

$=a^4+2a^2b^2+b^4-a^2b^2$

$=(a^2+b^2)^2-(ab)^2$

$=(a^2+b^2-ab)(a^2+b^2+ab)$.

方法总结 为了要凑成能套用公式来分解因式,有时需要添项或减项,这种设法配成完全平方式的方法叫做配方法. 配方后将二次三项式变形为A^2-B^2的形式,然后用平方差公式继续分解. 配方法是代数变形中常用的一种重要方法.

例 2 分解因式:$a^2-8ax-40xy-25y^2$.

分析 这是一个二元多项式的分解问题,可将其中一个字母看作常数,则多项式变成另一个字母的一元多项式,然后采用配方法分解.

解 $a^2-8ax-40xy-25y^2$

$=a^2-8ax+16x^2-16x^2-40xy-25y^2$

$=(a-4x)^2-(4x+5y)^2$

$=(a-4x+4x+5y)(a-4x-4x-5y)$

$=(a+5y)(a-8x-5y)$.

方法总结　二元多项式的分解问题,可将其中一个字母看作常数,则多项式变成另一个字母的一元多项式,采用配方法达到用公式法分解因式的目的.

2. 提公因式法

例 3　分解因式:

(1)$3a^3b-81b^4$;　　　　　　(2)a^7-ab^6.

解　(1)$3a^3b-81b^4$

$=3b(a^3-27b^3)$

$=3b(a-3b)(a^2+3ab+9b^2)$

(2)a^7-ab^6

$=a(a^6-b^6)$

$=a(a^3-b^3)(a^3+b^3)$

$=a(a-b)(a^2+ab+b^2)(a+b)(a^2-ab+b^2)$

$=a(a-b)(a+b)(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)$.

方法总结　(1)中有公因式 $3b$,应先提公因式,再进一步分解;(2)中提取公因式 a 之后,括号内出现 a^6-b^6,可看成$(a^3)^2-(b^3)^2$ 或$(a^2)^3-(b^2)^3$. 由此可见,分解因式有些时候提公因式在前,应用公式在后.

3. 分组分解法

当因式分解不能直接提公因式、也不能直接用公式时,就应考虑分组分解法. 而技巧性强的分组常需拆项或添项.

例 4　把 $2ax-10ay+5by-bx$ 分解因式.

解　$2ax-10ay+5by-bx$

$=2a(x-5y)-b(x-5y)$

$=(x-5y)(2a-b)$.

方法总结　用分组分解法时,一定要想想分组后能否继续完成因式分解,由此要合理选择分组的方法.

例 5　分解因式:$x^2y-xy^2+x^2z-xz^2-2xyz+y^2z+yz^2$.

分析 选择 x 作为主元，将其按降幂排列，则可发现同次项可作为一组进行分解.

解 $x^2y-xy^2+x^2z-xz^2-2xyz+y^2z+yz^2$

$=(x^2y+x^2z)-(xy^2+xz^2+2xyz)+y^2z+yz^2$

$=x^2(y+z)-x(y^2+z^2+2yz)+yz(y+z)$

$=(y+z)(x^2-xy-xz+yz)$

$=(y+z)[(x^2-xy)-(xz-yz)]$

$=(y+z)[x(x-y)-z(x-y)]$

$=(y+z)(x-y)(x-z)$.

例 6 把 $ab(c^2-d^2)-(a^2-b^2)cd$ 分解因式.

解 $ab(c^2-d^2)-(a^2-b^2)cd$

$=abc^2-abd^2-a^2cd+b^2cd$

$=(abc^2-a^2cd)+(b^2cd-abd^2)$

$=ac(bc-ad)+bd(bc-ad)$

$=(bc-ad)(ac+bd)$.

方法总结 按原先分组方式，无公因式可以提取，不能直接因式分解时，可把括号打开后重新分组，然后再分解因式.

例 7 把 $x^2-y^2+ax+ay$ 分解因式.

解 $x^2-y^2+ax+ay$

$=(x^2-y^2)+(ax+ay)$

$=(x-y)(x+y)+a(x+y)$

$=(x+y)(x-y+a)$.

方法总结 把第一、二项作为一组，这两项虽然没有公因式，但可以运用平方差公式分解因式，其中一个因式是 $x+y$；把第三、四两项作为另一组，在提取公因式 a 后，另一个因式也是 $x+y$，这样即可提公因式分解因式.

例 8 分解因式 x^3-3x^2+4.

解 x^3-3x^2+4

$=(x^3+1)-(3x^2-3)$

$=(x+1)(x^2-x+1)-3(x-1)(x+1)$

$=(x+1)[(x^2-x+1)-3(x-1)]$

$=(x+1)(x^2-4x+4)$

$=(x+1)(x-2)^2.$

方法总结 本题可以使用添项、折项法分解因式，也可以将$-3x^2$拆成x^2-4x^2，将多项式x^3-3x^2+4分成两组(x^3+x^2)和$-4x^2+4$来考虑问题.

4. 十字叉乘法

一些特殊系数的二次三项式，利用十字叉乘法分解因式直观明了.

例 9 把下列各式分解因式：

(1)x^2-7x+6； (2)$x^2+13x+36$.

解 (1)由右图得

$$\begin{array}{ccc} x & \searrow\!\!\!\!\nearrow & -6 \\ x & & -1 \\ \hline \multicolumn{3}{c}{-x-6x=-7x} \end{array}$$

x^2-7x+6

$=[x+(-1)][x+(-6)]$

$=(x-1)(x-6).$

(2)由右图得

$$\begin{array}{ccc} x & \searrow\!\!\!\!\nearrow & 4 \\ x & & 9 \\ \hline \multicolumn{3}{c}{4x+9x=13x} \end{array}$$

$x^2+13x+36=(x+4)(x+9).$

方法总结 形如$x^2+(p+q)x+pq$的二次三项式的分解可用十字叉乘法.

例 10 把下列各式分解因式：

(1)$x^2+xy-6y^2$； (2)$(x^2+x)^2-8(x^2+x)+12$.

解 (1)由右图得

$$\begin{array}{ccc} x & \searrow\!\!\!\!\nearrow & 3y \\ x & & -2y \\ \hline \multicolumn{3}{c}{3xy-2xy=xy} \end{array}$$

$x^2+xy-6y^2$

$=(x+3y)[x+(-2y)]$

$=(x+3y)(x-2y).$

(2)由右图得

$$\begin{array}{ccc} x^2+x & \searrow\!\!\!\!\nearrow & -6 \\ x^2+x & & -2 \\ \hline \multicolumn{3}{c}{-2(x^2+x)-6(x^2+x)=-8(x^2+x)} \end{array}$$

$(x^2+x)^2-8(x^2+x)+12$

$=(x^2+x-6)(x^2+x-2)$

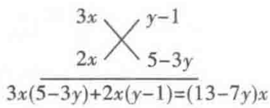
$=(x+3)(x-2)(x+2)(x-1)$.

方法总结 (1)把 $x^2+xy-6y^2$ 看成 x 的二次三项式，这时常数项是 $-6y^2$，一次项系数是 y，把 $-6y^2$ 分解成 $3y$ 与 $(-2y)$ 的积，$y+(-2y)=y$，正好等于一次项系数.

(2)由换元思想，只要把 (x^2+x) 整体作为一个字母 a 看待，可不必写出，只当作是分解二次三项式 $a^2-8a+12$.

例 11 分解因式：$6x^2-7xy-3y^2+13x+8y-5$.

解法 1 由右图得



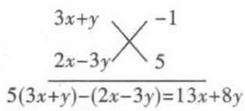
$6x^2-7xy-3y^2+13x+8y-5$

$=6x^2+(13-7y)x-3y^2+8y-5$

$=6x^2+(13-7y)x+(y-1)(5-3y)$

$=(3x+y-1)(2x-3y+5)$.

解法 2 由右图得



$6x^2-7xy-3y^2+13x+8y-5$

$=(3x+y)(2x-3y)+13x+8y-5$

$=(3x+y-1)(2x-3y+5)$.

方法总结 此例的解法实际上是“双十字叉乘法”.

5. 待定系数法

有时经过分析可以判定或由题设条件知道多项式能分解成某几个因式，只是这些因式中的系数尚待确定. 由于这几个因式的连乘积恒等于原式，因此两边对应项的系数相等. 由此列出关于这些待定系数的方程组，解之求得各待定系数的值，从而完成因式分解. 这种方法称为待定系数法.

例 12 分解因式：$6x^2-7xy-3y^2+13x+8y-5$.

解 因为 $6x^2-7xy-3y^2=(3x+y)(2x-3y)$.

所以设

$6x^2-7xy-3y^2+13x+8y-5$

$=(3x+y+m)(2x-3y+n)$

$=6x^2-7xy-3y^2+(2m+3n)x+(n-3m)y+mn$,

则得 $\begin{cases}2m+3n=13,\\ n-3m=8,\\ mn=-5,\end{cases}$

由前两个方程解得 $m=-1,n=5$,它满足第三个方程.

因此,原式 $=(3x+y-1)(2x-3y+5)$.

例 13　(1) 设 m 为常数,$12x^2-10xy+2y^2+11x-5y+m$ 可分解为两个一次多项式的乘积,求 m 的值.

(2) 设 k 为常数,$kx^2-2xy-3y^2+3x-5y+2$ 可分解为两个一次多项式的乘积,求 k 的值.

解　(1) 因为 $12x^2-10xy+2y^2=(4x-2y)(3x-y)$,

所以设

$$\begin{aligned}&12x^2-10xy+2y^2+11x-5y+m\\&=(4x-2y+a)(3x-y+b)\\&=12x^2-10xy+2y^2+(3a+4b)x-(a+2b)y+ab,\end{aligned}$$

则得 $\begin{cases}3a+4b=11,\\ a+2b=5,\\ ab=m.\end{cases}$

由前两个方程解得 $a=1,b=2$,

所以 $m=ab=2$.

(2) 因为 $-3y^2-5y+2=(-3y+1)(y+2)$,

所以设

$$\begin{aligned}&kx^2-2xy-3y^2+3x-5y+2\\&=(mx-3y+1)(nx+y+2)\\&=mnx^2+(m-3n)xy-3y^2+(2m+n)x-5y+2,\end{aligned}$$

则得 $\begin{cases}2m+n=3,\\ m-3n=-2,\\ k=mn.\end{cases}$

由前两个方程解得 $m=n=1$,

所以 $k=mn=1$.

二、因式分解的应用

1. 化简求值问题

例 14 已知 $a-b=3$,$a-c=1$,求代数式 $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$的值.

分析 所求代数式含有 $b-c$,可通过已知的 $a-b=3$ 与 $a-c=1$,求得 $b-c=-2$,但把它们分别代入代数式里仍不好求值,此时不妨考虑把代数式进行分解因式的有效变形.

解 $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$

$=a^2b-a^2c+b^2c-ab^2+c^2a-bc^2$

$=(a^2b-a^2c)+(b^2c-bc^2)-(ab^2-c^2a)$

$=a^2(b-c)+bc(b-c)-a(b+c)(b-c)$

$=(b-c)(a^2+bc-ab-ac)$

$=(b-c)[a(a-b)-c(a-b)]$

$=(a-b)(b-c)(a-c)$

因为 $a-b=3$,$a-c=1$,所以 $b-c=-2$.

所以原式$=3\times(-2)\times1=-6$.

方法总结 本题如果从条件出发求 a、b、c 的值,再代入代数式里求值,显然很麻烦. 在代数式求值之前,一定要认真分析已知条件与所求代数式之间的联系.

2. 解方程问题

例 15 解方程:

$(x-1)(x+2)+(x+3)(x-4)+(x-1)(x+3)+(x+2)(x-4)=(2x-1)^2$.

分析 方程左边可分组后提取公因式进行分解因式.

解 原方程可化为

$(x+2)[(x-1)+(x-4)]+(x+3)[(x-4)+(x-1)]=(2x-1)^2$,

即 $(x+2)(2x-5)+(x+3)(2x-5)=(2x-1)^2$,

所以$(2x+5)(2x-5)=(2x-1)^2$,

即 $4x^2-25=4x^2-4x+1$,

所以 $4x=26$,解得 $x=\frac{13}{2}$.

因此,方程的解为 $x=\frac{13}{2}$.

方法总结 用因式分解法解方程,特别对于一元二次方程,必须注意变形为等号右边为零,并且等号左边能分解两个因式的积,才能由每个因式分别等于零来求解.

3. 判断整除性问题

例 16 求证:当 n 为整数时,$(n+14)^2-n^2$ 能被 28 整除.

分析 由$(n+14)^2-n^2$ 的形式联想到用平方差公式找出其一个因数 28.

证明 因为$(n+14)^2-n^2$

$=(n+14+n)(n+14-n)$

$=14(2n+14)$

$=28(n+7)$,

又 n 为整数,所以 $n+7$ 也为整数.

所以 $28(n+7)$能被 28 整除,即$(n+14)^2-n^2$ 能被 28 整除.

4. 判断数的奇偶性问题

例 17 已知三个数 a、b、c 的和为奇数,那么 $a^2+b^2-c^2+2ab$ 为(　　)

A. 一定是非零偶数　　B. 等于零

C. 一定是奇数　　D. 可能是奇数,也可能是偶数

分析 把 $a^2+b^2-c^2+2ab$ 恒等变形为$(a+b+c)(a+b-c)$,以 $a+b+c$ 的奇偶情况加以讨论.

解 因为 $a^2+b^2-c^2+2ab$

$=(a+b)^2-c^2$

$=(a+b+c)(a+b-c)$.

而 $a+b+c$ 为奇数，且 $(a+b)+c$ 与 $(a+b)-c$ 的奇偶性相同，所以 $a+b+c$ 与 $a+b-c$ 同为奇数，所以 $(a+b+c)(a+b-c)$ 是奇数，即 $a^2+b^2-c^2+2ab$ 为奇数，因此，选 C.

方法总结 解决某些看似棘手的问题时，往往可以考虑把问题进行恒等转化，要善于运用不变量和不变性质为解答问题服务.

5. 解证等(不等)式问题

例 18 已知 a,b,c 是三角形的三条边，则代数式 $a^2-2ab-c^2+b^2$ 的值 ( )

A. 大于零 B. 等于零

C. 小于零 D. 不能确定

分析 利用因式分解将所求式子进行变形，从而得到三角形三边易判断的关系.

解 $a^2-2ab-c^2+b^2$

$=(a^2-2ab+b^2)-c^2$

$=(a-b)^2-c^2$

$=(a-b+c)(a-b-c)$.

因为 a,b,c 是三角形的三条边，

所以 $a+c>b, a<b+c$,

所以 $a-b+c=(a+c)-b>0$,

$a-b-c=a-(b+c)<0$,

所以 $(a-b+c)(a-b-c)<0$,

即 $a^2-2ab-c^2+b^2<0$.

因此，选 C.

例 19 已知凸四边形 $ABCD$ 四条边的边长顺次是 a,b,c,d，且 $a^2+ab-ac-bc=0, b^2+bc-bd-cd=0$，试问四边形 $ABCD$ 是什么四边形?

解 因为 $a^2+ab-ac-bc=0$,

所以 $a(a+b)-c(a+b)=0$，

即 $(a+b)(a-c)=0$.

又因为 $b^2+bc-bd-cd=0$，

所以 $b(b+c)-d(b+c)=0$，

即 $(b+c)(b-d)=0$.

因为 a,b,c,d 为四边形 $ABCD$ 的四条边，

所以 $a+b\neq0,b+c\neq0$，

则有 $a-c=0$ 及 $b-d=0$，所以 $a=c,b=d$.

所以，四边形 $ABCD$ 为平行四边形.

说明　例 18、例 19 是利用因式分解解决几何问题，这也是近年来中考命题的一种趋势.

思维拓展训练

1. 把下列各式分解因式：

(1) a^3+27；

(2) $8-m^3$；

(3) $-27x^3+8$；

(4) $-\frac{1}{8}p^3-\frac{1}{64}q^3$；

(5) $8x^3y^3-\frac{1}{125}$；

(6) $\frac{1}{216}x^3y^3+\frac{1}{27}c^3$.

2. 把下列各式分解因式：

(1) xy^3+x^4；

(2) $x^{n+3}-x^ny^3$；

(3) $a^2(m+n)^3-a^2b^3$；

(4) $y^2(x^2-2x)^3+y^2$.

3. 把下列各式分解因式：

(1)x^2-3x+2;

(2)$x^2+37x+36$;

(3)$x^2+11x-26$;

(4)$x^2-6x-27$;

(5)$m^2-4mn-5n^2$;

(6)$(a-b)^2+11(a-b)+28$.

4. 把下列各式分解因式:

(1)$ax^5-10ax^4+16ax^3$;

(2)$a^{n+2}+a^{n+1}b-6a^nb^2$;

(3)$(x^2-2x)^2-9$;

(4)x^4-7x^2-18;

(5)$6x^2-7x-3$;

(6)$8x^2+26xy-15y^2$;

(7)$7(a+b)^2-5(a+b)-2$;

(8)$(6x^2-7x)^2-25$.

5. 将下列各式分解因式,先考虑分组分解,然后考虑是否可用其他方法:

(1) $(x+2)(x-2)-4y(x-y)$;

(2) $y(y+2)+4x(x-y-1)$;

(3) $x(y-1)+y-x^2$;

(4) $(a+1)(b+1)(ab+1)+ab$.

6. 将下列各式分解因式,先考虑换元法,然后考虑是否可用其他方法:

(1) $(a^2-7a+6)(a^2-a-6)+56$;

(2) $(x^2+3x-2)(x^2+3x+4)-16$;

(3) $(a+1)(a+2)(a+3)(a+4)-8$;

(4) $(x+1)(x+2)(x+3)(x+6)+x^2$.

7. 将下列各式分解因式,先考虑拆、添项法,然后考虑是否可用其他方法:

(1) $x^3+6x^2+11x+6$；

(2) $6x^3+x^2-3x-1$.

8. 用多种拆添项方法将下列各式分解因式：

(1) x^3+2x^2-5x-6(至少 5 种方法)；

(2) x^3-7x+6.

9. 若 a 是自然数，那么 a^4-3a^2+9 是质数还是合数？给出你的证明.

10. 已知 a、b 是相邻整数，且 $c=ab$，求证 $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ 是奇数.