



工业和信息化部“十二五”规划教材
“十二五”国家重点图书出版规划项目

流固耦合力学基础及其应用

Fundamentals of Fluid-Structure
Coupling and Its Application (第2版)

● 叶正寅 王 刚 张伟伟 编著

哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS



工业和信息化部“十二五”规划教材
“十二五”国家重点图书出版规划项目

流固耦合力学基础及其应用

Fundamentals of Fluid-Structure Coupling and Its Application (第2版)

● 叶正寅 王 刚 张伟伟 编著



哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内容简介

本书是作者在2010年第1版基础上的修订版,主要讲述航空航天领域流固耦合力学的分析方法和应用技术。全书共分8章,主要介绍了流体力学和结构力学基本原理与分析方法;经典的气动弹性理论分析方法;结合现代计算流体力学和计算结构力学的气动弹性力学数值分析方法;基于非定常气动力模型降阶技术的气动弹性分析方法;伺服气动弹性分析方法和颤振主动抑制技术;气动弹性力学中的若干动力学响应问题和气动弹性力学的常用试验技术。

本书总结了作者及其课题组长期在流固耦合力学领域的科研工作,理论联系实际,集学术性和实用性于一体。为方便读者理解,书中配有较多的应用算例。本书可作为高等院校航空、航天、兵器、能源、土木等相关专业研究生的教材或参考书,也可供相关专业科技人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

流固耦合力学基础及其应用/叶正寅,王刚,张伟伟编
著. —2版. —哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2016.3
ISBN 978-7-5603-5881-9

I. ①流… II. ①叶… ②王… ③张… III. ①流体动力学-高等学校-教材 IV. ①O351.2

中国版本图书馆CIP数据核字(2016)第045135号

策划编辑 王桂芝
责任编辑 刘瑶 张荣
出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社址 哈尔滨市南岗区复华四道街10号 邮编 150006
传真 0451-86414749
网址 <http://hitpress.hit.edu.cn>
印刷 哈尔滨市石桥印务有限公司
开本 787mm×1092mm 1/16 印张 21 字数 485千字
版次 2016年3月第2版 2016年3月第1次印刷
书号 ISBN 978-7-5603-5881-9
定价 48.00元

(如因印装质量问题影响阅读,我社负责调换)

再版前言

本书是为航空航天工程类专业的研究生“流固耦合力学”或“气动弹性力学”课程编写的教材。作者在2010年第1版的基础上,根据教学使用情况和读者反馈意见,结合当前流固耦合力学领域的最新研究进展修订而成。本次修订在保持第1版的取材范围、知识结构和理论深度的同时,纳入了大量计算流体力学(CFD)和计算结构力学(CSD)的最新成果,更加突出了当前解决流固耦合力学问题的主流方法。在修订中将第1版第4章“基于CFD的气动弹性数值方法”改编为“现代计算流体力学数值方法”和“基于CFD和CSD技术的流固耦合数值方法”两个独立章节,并将径向基函数网格变形方法、CFD/CSD直接耦合技术、考虑几何非线性的气动弹性分析技术等近年来出现的新方法扩充到了修订版的对应章节中,这一部分修订工作主要由王刚、叶正寅完成。考虑到气动弹性试验技术的重要性,本次修订新增了“气动弹性试验”部分的内容,并单列为全书的最后一章,主要由张伟伟完成撰写工作。本次修订力求使概念更清晰、算法思想更明确,以便于阅读和教学。但由于研究生课程学时的限制,本书篇幅只能讲述气动弹性力学最基本和最主要的概念与内容,需要深入了解流固耦合力学的读者,可以以本书为阶梯,进一步阅读本书所列的参考文献或其他相关著作。

本书自出版至今,得到了许多专家学者的指教,使用本书的教师和读者们的反馈意见是我们本次修订的重要依据,作者对他们表示衷心的感谢!

作者

2016年1月

前 言

流固耦合力学是研究流体与固体相互作用下相关力学行为的一门学科。在自然界和现实工程中,很多领域都涉及流固耦合力学问题,如能源、桥梁、水利、化工、船舶、交通运输等。本书的研究范围只限于航空航天领域中的流固耦合力学问题,而且重点在常规大气层飞行器的流固耦合力学方面。在该领域中,流固耦合力学问题习惯上也称为气动弹性问题。

在不同的实际工程领域,航空航天中的流固耦合(气动弹性)问题更加突出,这是因为飞行器要实现在天空翱翔的目的,设计者必然要考虑尽量减轻结构的质量,航空航天领域的结构设计人员甚至提出“为减轻 1 g 质量而努力”的精益求精精神。显然,努力减轻结构质量的结果就是结构更加柔软,与地面运行的交通工具相比,飞行器结构的弹性特征会更明显。在乘坐飞机时,细心的乘客会注意到,在天空飞行时机翼是存在变形和弹性振动的。

航空航天飞行器的流固耦合问题伴随着飞行器的整个发展过程。早在 1903 年,Langley 的单翼飞机首次作有动力飞行时就出现了机翼折断的事故。由此引导 Lanchester, Bairstow, Fage 等气动弹性先驱开始对飞机气动弹性问题展开了有目的性的研究。在 Wright 兄弟成功实现了重于空气的有动力飞行之后,飞机的研制进入了快速发展的时期,气动弹性问题越来越多地显现出来。到了 20 世纪 20 年代,有关机翼颤振分析的工作取得了快速的发展,其中代表性的研究工作包括 Theodorsen 的简谐振动翼型非定常空气动力学分析方法, Kuessner, Duncan, Frazer 等人的关于机翼颤振理论等内容。进入 20 世纪 50 年代以后,由于高速飞行器的出现,热气动弹性问题引起了人们的注意,但是由于当时的高超声速飞行器主要以飞船为重点,热气动弹性问题并没有获得系统的研究。到了 20 世纪 80 年代以后,由于飞机注重跨声速飞行,有关跨声速的非线性气动弹性问题研究获得了系统、深入的研究。近年来,随着微型飞行器的发展,柔性变形机翼的流固耦合问题也引起了人们的关注。总之,航空航天流固耦合力学的研究与飞行器的发展足迹和力学分析手段的发展息息相关。有关航空航天领域中气动弹性问题研究工作的综述及关于 20 世纪 80 年代以前的气动弹性问题的研究工作可参考德国宇航院 Foersching 教授的著作《气动弹性力学原理》。这本书以后的研究工作,主要体现在数值计算方法方面,到一定阶段后,有待进行全面总结。

随着航空航天领域飞行器的不断发展,对流固耦合(气动弹性)问题的划分越来越细致。首先气动弹性问题被分为静气动弹性问题和动气动弹性问题,静气动弹性问题研究的是结构变形对飞行器气动性能的影响,包括结构变形对气动参数的影响、大展弦比机翼的型架外形设计、静发散速度问题、操纵面效率降低以及操纵反效问题等。动气动弹性问题研究的是结构振动条件下的动力学行为,传统的气动弹性问题主要研究弹性结构在惯性力、弹性力和气动力共同作用下的稳定性问题,这就是颤振临界速度问题。随着电传操纵技术在飞

飞行器中得到运用,伺服气动弹性问题又逐渐显现出来了。近年来,高超声速飞行器成为一个重要的热门方向,热气动弹性问题又重新得到了重视。对于高速飞行器而言,跨声速问题是都要面临的速度范围,尤其是运输类飞机,从飞行速度和能源效率进行综合考虑,跨声速是此类飞机的主要巡航速度,所以跨声速气动弹性问题是被广泛关注的问题。军用飞机、微型飞机、流体机械中的气动弹性问题还涉及大迎角分离流条件下的气动弹性问题。这些跨声速气动弹性问题、大迎角气动弹性问题都属于非线性的动力学问题,由于非线性力学问题本身发展的局限性,这些问题的研究仍然有很多方面有待探索。

在航空航天领域中,气动弹性分析方法的发展历程与很多学科是类似的。在电子计算机应用之前,主要以实验和解析方法为主,但是,气动弹性问题的实验研究存在很多方面的困难,尤其是高速风洞的气动弹性实验存在很大的危险性,所以气动弹性的计算方法成为重要的发展方向。由于早期飞行器的气动弹性问题主要发生在机翼上,而早期的机翼都是直机翼,且展弦比较大,加上早期的非定常气动力理论只有二维理论方法,所以气动弹性分析方法也只能围绕二元翼段的气动弹性特性研究展开。到了20世纪50年代以后,随着高速飞行器的发展,基于活塞理论的高速机翼气动弹性分析方法得到发展。但是,真正能够解决实际飞行器气动弹性问题的计算方法还得依靠电子计算机技术的发展。到了20世纪70年代,依靠势流线性理论为基础的非定常升力面方法得到了广泛应用和快速发展,实际上,这种方法取得了巨大的成功,直到现在,这种计算方法仍然是工程单位的主要设计手段,而且已嵌入著名的NASTRAN结构分析软件当中。到了20世纪80年代后期,随着计算机处理速度的提高,基于全速势方程和欧拉方程的气动弹性分析方法得到了发展,尤其是基于欧拉方程的气动弹性分析方法基本解决了长期困扰航空航天领域的跨声速气动弹性难题。然而,作为无黏流动假设前提下的欧拉方程无法考虑黏性效应影响显著的问题,所以基于N-S方程的气动弹性分析方法在近年来得到了发展。然而,由于基于N-S方程的非定常流动数值计算的计算量巨大,尤其是非线性气动弹性问题还需要考察很长时间历程后的特征,目前的计算机仍然难以满足黏性流动问题的气动弹性数值模拟。但气动弹性力学的发展方向是明确的,随着计算机速度的进一步提高、并行计算技术的发展、数值计算方法的进步,解决复杂气动弹性问题的数值模拟会逐步成为现实。本书希望从气动弹性问题的基本方法入手,并适当介绍近年来气动弹性力学分析的新方法,从而使读者了解气动弹性分析的基本思路。

作为研究生教材,本书在基本理论方面以介绍思路为主。其内容安排为:第1章由叶正寅编写,介绍流体力学基本理论的演化思路,及其在应用于非定常流动问题时的主要不同点,重点介绍传统的非定常线性理论方法,尤其是势流非定常气动力分析方法。第2章由李斌编写,介绍结构分析的基本理论思路,重点介绍梁式传统结构和有限元的数值分析思路。第3章由张伟伟编写,介绍传统的气动弹性力学分析方法。第4章由史爱明、叶正寅、王刚、张伟伟编写,介绍近年来发展的时间域数值模拟方法。第5章由张伟伟编写,介绍更适合于工程应用的高效气动弹性算法。第6章由张伟伟编写,简要介绍气动弹性动力学响应问题和分析方法。本书由叶正寅教授统稿。

本书承西安交通大学愈茂铮教授、西北工业大学赵令成教授和杨永年教授的审阅,提出了许多宝贵的建议,在此表示衷心的感谢!

本书在编写过程中,参考了许多国内外文献的相关内容,这里向所有参考文献的作者表示诚挚的谢意。限于编者水平,书中难免存在疏漏,敬请广大读者和同行专家批评指正,不胜感谢。

编者

2010年5月

目 录

第 1 章 流体力学基本原理和经典势流分析方法	1
1.1 流体力学的基本方程及其演化	1
1.2 势流理论的非定常流动与定常流动计算的主要差别	5
1.2.1 非定常边界条件	5
1.2.2 非定常压力系数计算公式	7
1.2.3 非定常尾涡面条件	8
1.3 翼型在不可压缩非定常流动中的西奥道森方法	8
1.4 三维小扰动势方程求解的偶极子网格法	16
复习思考题	23
第 2 章 弹性结构动力学的基本原理	24
2.1 弹性结构分析模型的建立	24
2.1.1 结构弹性力学特征的一般描述方法	24
2.1.2 弹性结构分析的有限元素法	26
2.1.3 弹性结构离散有限元模型建立的一般原则	28
2.2 离散多自由度系统的振动分析基础	33
2.2.1 多自由度系统的动力学方程	33
2.2.2 多自由度系统的固有频率与固有振型	38
2.2.3 多自由度系统的自由振动分析	40
2.2.4 多自由度系统的强迫振动分析	43
2.3 结构动力问题求解的常用数值方法	45
2.3.1 固有特征值的数值求解方法	45
2.3.2 结构时域响应的数值求解方法	48
复习思考题	52
第 3 章 经典气动弹性力学分析方法	53
3.1 气动弹性静力学分析	53
3.1.1 扭转发散和载荷重新分布	53
3.1.2 操纵面反效和操纵面效率	59
3.1.3 小结	63
3.2 经典二元低速气动力模型	63
3.2.1 准定常气动力模型	63

3.2.2	非定常气动力模型	66
3.2.3	小结	70
3.3	颤振的基本概念	74
3.3.1	颤振的定义	74
3.3.2	颤振的分类	75
3.3.3	颤振的物理解释	75
3.4	颤振运动方程的建立	77
3.4.1	复杂结构的气动弹性运动方程	77
3.4.2	二元机翼颤振模型的建立及其无量纲化	78
3.4.3	颤振的研究方法	80
3.5	基于定常气动力模型的二元机翼颤振分析	81
3.6	基于准定常气动力模型的二元机翼颤振分析	84
3.7	基于非定常气动力模型的二元机翼颤振分析	88
3.7.1	颤振分析中的 $v-g$ 法	88
3.7.2	颤振分析中的 $p-k$ 法	93
	复习思考题	95
第4章	现代计算流体力学数值方法	96
4.1	现代 CFD 技术概述	96
4.2	计算网格生成技术	97
4.2.1	结构化网格生成方法	98
4.2.2	非结构化网格生成方法	102
4.2.3	混合网格生成方法	116
4.3	计算网格变形技术	119
4.3.1	弹簧方法	120
4.3.2	Delaunay 图背景网格插值法	124
4.3.3	径向基函数插值法	128
4.4	定常流场求解技术	133
4.4.1	结构网格下的定常流场求解技术	134
4.4.2	非结构网格下的定常流场求解技术	140
4.4.3	湍流模型	154
4.5	非定常流场求解技术	158
4.5.1	流动失稳类非定常问题的数值模拟方法(双时间格式)	159
4.5.2	来流脉动类非定常问题的数值模拟方法(网格虚拟速度)	159
4.5.3	固壁边界变形类非定常问题的数值模拟方法(体积守恒)	161
	复习思考题	164
第5章	基于 CFD 和 CSD 技术的流固耦合数值方法	165
5.1	现代流固耦合分析技术综述	165

5.2	基于结构模态的气动弹性数值模拟方法	170
5.2.1	时域气动弹性运动方程	170
5.2.2	时域气动弹性运动方程的数值解法	171
5.3	CFD/CSD 直接耦合的气动弹性数值模拟方法	179
5.3.1	CFD/CSD 直接耦合的基本思路	179
5.3.2	结构载荷/位移插值方法	184
5.3.3	CFD/CSD 直接耦合的静气动弹性分析实例	186
5.4	跨声速气动弹性问题分析	191
5.4.1	机翼跨声速颤振数值分析	191
5.4.2	跨声速操纵面嗡鸣时域数值分析	196
5.5	翼型大迎角气动弹性问题分析	205
5.6	超声速和高超声速的气动弹性问题分析	215
5.7	结构几何非线性的气动弹性问题分析	228
	复习思考题	234
第 6 章	基于 CFD 的非定常气动力降阶模型及其在气动弹性分析中的应用	235
6.1	非定常气动力降阶模型综述	236
6.1.1	基于 POD 技术的 ROM	236
6.1.2	基于系统辨识技术的 ROM	237
6.1.3	非线性气动力的谐波平衡方法(HB)	240
6.2	基于系统辨识技术的气动力降阶方法	240
6.3	基于 ROM 技术的气动弹性分析方法	243
6.3.1	计算方法	243
6.3.2	典型算例分析	245
6.3.3	小结	258
6.4	基于 ROM 技术的伺服气动弹性分析方法	259
6.4.1	伺服气动弹性问题简述	259
6.4.2	跨声速伺服气动弹性分析技术	260
6.4.3	典型算例分析	262
6.4.4	小结	265
6.5	基于 ROM 技术的颤振主动抑制	266
6.5.1	闭环模型的建立	266
6.5.2	控制律的设计	267
6.5.3	计算模型	267
6.5.4	典型算例分析	268
6.5.5	小结	272
	复习思考题	273

第7章 气动弹性动力响应	274
7.1 动力响应问题概述	274
7.2 弹性飞机的阵风响应	275
7.2.1 阵风响应概述	275
7.2.2 阵风响应运动方程	275
7.2.3 基于势流方法的阵风响应计算	276
7.2.4 基于CFD方法的离散阵风响应计算	277
7.2.5 基于ROM方法的阵风响应计算	278
7.2.6 典型算例分析	280
7.3 抖振	285
7.3.1 抖振的现象	285
7.3.2 典型部件的抖振问题	286
7.3.3 抖振试验技术	288
复习思考题	288
第8章 气动弹性试验	289
8.1 地面模态试验	289
8.2 风洞颤振试验	292
8.2.1 颤振模型设计	293
8.2.2 模型的支持和防护	297
8.2.3 颤振临界条件的确定	298
8.2.4 试验结果的换算	299
8.3 颤振试飞	299
8.3.1 结构激励	300
8.3.2 参数测量	301
8.3.3 颤振边界预测	303
8.3.4 小结	309
参考文献	310

第 1 章 流体力学基本原理和经典势流分析方法

关于流体力学的基本理论和方程的推导过程在很多流体力学著作中都有详细的介绍。然而,一般的著作中的主要论述过程都以定常流动为主。虽然本书的静气动弹性问题也涉及定常气动力问题,但本书的重点内容还是以介绍动力学问题为主。所以,本章的重点是使读者在加深理解空气动力学基本方程推导和演化过程中使用的假设条件的基础上,强调流体力学基本方程的演化思路和处理非定常流动时的注意事项,并以小扰动速度势方程为例,在 1.3 节和 1.4 节中介绍二维、三维非定常势流的求解方法。

1.1 流体力学的基本方程及其演化

本节重点介绍不同层次空气动力学基本方程在推导和演化过程中使用的假设条件和演化思路。

对于航空航天领域的空气动力学问题而言,除外层空间环境和低密度的接近真空环境外,在建立通常的空气动力学基本方程过程中,由于要使用数学中极限的概念,需要对所研究的空气对象进行模型化处理,这个处理就是假设空气为连续介质。另外,为了得到流体变形与流体应力之间的关系,故采用了牛顿流体假设,即流体变形率与流体应力为线性关系。当然,在此过程中,还引入了 Stokes 假设,这方面详细的推导过程可参见流体力学的其他教材。

在上述假设条件下,运用控制体内的质量守恒原理(对应空气动力学中的连续方程)、牛顿第二定律(对应空气动力学中的动量方程)、能量守恒原理(对应空气动力学中的能量方程)和完全气体的状态方程,可以得到经典流体力学中的 Navier - Stokes 方程(简称 N - S 方程),如果使用积分形式写出来,在进一步忽略体积力的情况下,方程表示为

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\Omega} \mathbf{Q} dV + \iint_{\partial\Omega} \mathbf{F}(\mathbf{Q}) \cdot \mathbf{n} dS = \iint_{\partial\Omega} \mathbf{G}(\mathbf{Q}) \cdot \mathbf{n} dS \quad (1.1)$$
$$p = (\gamma - 1) \left[e_0 - \frac{1}{2} \rho (u^2 + v^2 + w^2) \right]$$

式中

$$\mathbf{Q} = \begin{Bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ e_0 \end{Bmatrix}$$

$$F(Q) \cdot n = (V \cdot n) \begin{Bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ e_0 + p \end{Bmatrix} + p \begin{Bmatrix} 0 \\ n_x \\ n_y \\ n_z \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$G(Q) \cdot n = \frac{M_\infty}{R_{cl}} (n_x G_1 + n_y G_2 + n_z G_3)$$

$$G_1 = \begin{Bmatrix} 0 \\ \tau_{xx} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ u\tau_{xx} + v\tau_{xy} + w\tau_{xz} - \hat{q}_x \end{Bmatrix}$$

$$G_2 = \begin{Bmatrix} 0 \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yy} \\ \tau_{yz} \\ u\tau_{xy} + v\tau_{yy} + w\tau_{yz} - \hat{q}_y \end{Bmatrix}$$

$$G_3 = \begin{Bmatrix} 0 \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zz} \\ u\tau_{xz} + v\tau_{yz} + w\tau_{zz} - \hat{q}_z \end{Bmatrix}$$

其中

$$\tau_{xx} = 2\mu u_x - \frac{2}{3}\mu(u_x + v_y + w_z)$$

$$\tau_{yy} = 2\mu v_y - \frac{2}{3}\mu(u_x + v_y + w_z)$$

$$\tau_{zz} = 2\mu w_z - \frac{2}{3}\mu(u_x + v_y + w_z)$$

$$\tau_{xy} = \mu(u_y + v_x)$$

$$\tau_{xz} = \mu(u_z + w_x)$$

$$\tau_{yz} = \mu(v_z + w_y)$$

$$\hat{q}_x = -\frac{\mu}{Pr(\gamma - 1)} \frac{\partial T}{\partial x}$$

$$\hat{q}_y = -\frac{\mu}{Pr(\gamma - 1)} \frac{\partial T}{\partial y}$$

$$\hat{q}_z = -\frac{\mu}{Pr(\gamma - 1)} \frac{\partial T}{\partial z}$$

$$e_0 = \rho \left(e + \frac{V^2}{2} \right)$$

$$e = c_v T$$

$$T = \frac{p}{R\rho}$$

以上公式中, ρ 为空气密度; (u, v, w) 分别为直角坐标系 (x, y, z) 中各坐标轴正向的速度分量; p 为空气压强; T 为空气的温度; e_0 为空气的总内能; t 为时间; τ 为应力项; q 为传热率; Re 为雷诺数; γ 为比热比; Pr 为普朗特数; c_v 为单位质量气体定容比热容; 下标 x, y, z 为坐标的分量。因此, 航空航天空气动力学中运用上述的 N - S 方程, 通常包括了下列假设:

- ① 连续介质(不涉及稀薄流动);
- ② 牛顿流体(对于航空航天领域而言, 一般认为空气服从此条件);
- ③ 完全气体(在常温和常压下, 空气满足此状态方程条件);
- ④ 忽略体积力(在没有电磁力场的环境下, 空气的重力相对惯性力很小, 故一般可以忽略)。

由于 N - S 方程在理论上属于强非线性方程, 无论是理论分析还是数值计算, 都存在很大困难。为了简化 N - S 方程, 最方便的是根据空气对象的特点将空气假设为没有黏性的流体, 此外, 一般还引入绝热假设, 这就得到了通常所讲的欧拉(Euler)方程, 同样写成积分形式为

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\Omega} \mathbf{Q} dV + \iint_{\partial\Omega} \mathbf{F}(\mathbf{Q}) \cdot \mathbf{n} dS = 0 \quad (1.2)$$

$$p = (\gamma - 1) \left[e_0 - \frac{1}{2} \rho (u^2 + v^2 + w^2) \right]$$

所以, 从上述 N - S 方程到欧拉方程的推导过程中, 使用了两项假设: ① 无黏; ② 绝热。

根据上述假设, 欧拉方程可以适用于有旋的流动, 但与 N - S 方程相比, 欧拉方程得到了很大程度的简化。更重要的是, 欧拉方程在数学上是拟线性方程组, 而且非定常的欧拉方程对于亚声速、跨声速和超声速流动均为双曲型偏微分方程组, 这为构造数值计算方法提供了极大的方便, 目前, 数值求解欧拉方程的软件已经得到了广泛的应用。

然而, 从理论空气动力学方面讲, 含 5 个偏微分方程和 1 个代数方程的欧拉方程仍然是一个复杂的数学问题, 要得到数学上更简洁的定性分析方法, 人们不能停留在欧拉方程的层次上。从数值计算的实际应用方面讲, 虽然欧拉方程数值计算已经取得了巨大的成功, 但是, 对于计算长时间历程的非定常空气动力学问题而言, 数值求解欧拉方程的计算量有时在工程应用中还是无法承受的, 因此, 还希望对欧拉方程作进一步简化。

为了简化欧拉方程, 经典空气动力学引入了势流假设, 即速度矢量场满足无旋条件。在无旋条件下, 由数学知识知道存在速度势函数 ϕ , 它和速度之间有下列关系

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ v &= \frac{\partial \phi}{\partial y} \\ w &= \frac{\partial \phi}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad (1.3)$$

通过对连续方程和动量方程的简化, 在此过程中, 引入正压流体的假设(即压强与空气密度之间存在某种对应的关系 $p = p(\rho)$), 可以得到全速势方程, 即

$$\begin{aligned}
 & \left[a^2 - \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 \right] \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \left[a^2 - \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 \right] \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \left[a^2 - \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \right] \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} - \\
 & 2 \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} - 2 \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial z} - 2 \frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial x} - \\
 & 2 \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial t} - 2 \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial t} - 2 \frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial t} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0
 \end{aligned} \quad (1.4)$$

需要指出的是,在从连续方程和动量方程到全速势方程推导的过程中,还可以得到非定常的伯努利(Bernoulli)方程

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \right] + \int \frac{1}{\rho} dp = 0 \quad (1.5)$$

定常流动的伯努利方程给人们一个非常有意义的定性规律,即在亚声速流动条件下,每条流线上的流体速度与压强的变化成相反的规律,速度快的地方压强小,而速度慢的地方压强大,此定性结论对人们理解低速流动有非常重要的价值。

在上述全速势方程中,除速势函数外,还有一个声速为未知量。为了消除该未知量,运用等熵关系式 $p/\rho^{\gamma} = C$,即将该关系代入上面所说的正压空气的假设,则由伯努利方程可以得到

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \right] + \frac{1}{\gamma - 1} a^2 = \frac{1}{2} U_{\infty}^2 + \frac{1}{\gamma - 1} a_{\infty}^2 \quad (1.6)$$

如果将式(1.6)中的声速与速势的关系代入式(1.4)中,可以得到以速势函数为唯一未知量的全速势方程。所以,从欧拉方程组到全速势方程,增加了两项假设:

- ① 速度场满足无旋条件,即 $\nabla \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$;
- ② 空气的压强与密度之间满足等熵关系。

从数学角度讲,在无旋和等熵假设条件下,由欧拉方程简化得到的速势方程将一个由5个偏微分方程组构成的数学问题简化为一个偏微分方程,是一个成功的重大简化。从数值计算的计算量角度看,求解一个偏微分的计算量也会大幅度地减小。在20世纪80年代,针对全速势方程就开展了很多的研究工作。

为了更清楚地看出求解速势方程的意义,将非定常伯努利方程式(1.6)改写为式(1.7),即

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \right] + \frac{r}{r-1} \frac{p}{\rho} = \frac{1}{2} U_{\infty}^2 + \frac{1}{r-1} \frac{p_{\infty}}{\rho_{\infty}} \quad (1.7)$$

从式(1.7)可以看出,如果由全速势方程求得速势函数,就可以运用式(1.7)得到航空航天工程中最关心的压力分布 p (实际上为压强分布,但实际工程中习惯称之为压力分布)。

在式(1.7)中,还有密度参数,此时为了得到压力参数,可以进一步使用等熵关系式。所以,要获得飞行器的气动力参数,空气动力学的基本问题转化为求解全速势方程以获得速势函数的工作。

然而,全速势方程是复杂的非线性方程,其理论分析也是很困难的,即使采用数值方法求解,也会因为方程性质在不同流动中的差别而很难构造稳定的数值计算方法。此外,由于全速势方程中有无旋和等熵假设,求解全速势方程也不能自动捕捉到流场中的激波,在求解全速势方程的数值方法中,捕捉激波成为一个重要的问题。

为了进一步简化全速势方程,空气动力学理论研究者根据飞行器流线型好的特点,引入

了小扰动假设,即在飞行器以一定速度穿过静止的空气时,从固定于飞行器的坐标系看,飞行器不动,空气以一定速度迎面吹过来,认为飞行器对来流空气只是产生了一定速度上的扰动量,该扰动量相对流速度的值而言,只是一个小量。这样,将全速势函数写成来流速度势和飞行器产生的扰动速度势的相加,即

$$\phi = U_{\infty} x + \varphi \quad (1.8)$$

将此关系代入全速势方程中,并去掉所有的高阶项,可以得到小扰动速势方程,即

$$(1 - M_{\infty}^2) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} - 2 \frac{M_{\infty}}{a_{\infty}} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial t} - \frac{1}{a_{\infty}^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0 \quad (1.9)$$

在简化得到上述小扰动速势方程的过程中,如果来流速度在声速左右,可以看到式(1.9)的第一项也会很小,此时,忽略掉的高阶项可能与式(1.9)的第一项相当,所以在忽略高阶项时需要具体分析和适当保留,这就产生了所谓的跨声速小扰动速势方程。由于本书不涉及速势方程的跨声速问题,这里就不介绍这方面的内容。

还需说明的是,在引入上述小扰动过程中,由于假定扰动速度远小于来流速度,所以,不仅要求飞行器外形具有很好的流线型形状,而且飞行器的迎角也要求很小,一方面大迎角产生的扰动速度相对来流速度可能不是小量,另一方面,大迎角还存在实际流动的分离现象,偏离了无旋流动和势流理论的基本假设条件。

值得指出的是,在不可压缩条件下,小扰动速势方程式(1.9)变为拉普拉斯方程

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0 \quad (1.10)$$

这说明在不可压缩条件下,拉普拉斯方程既适应于定常流动,也适应于非定常流动。因此,在经典定常流动求解拉普拉斯方程过程中的思路和基本解的结果在非定常流动条件下也可以借鉴使用。从物理方面讲,不可压缩条件对应于扰动传播速度为无穷大的流体,即某一点如果出现扰动(如源、偶极子等基本解强度改变而引起的扰动速势变化),在扰动出现的同时传遍整个流场。

对于航空航天领域研究飞行器非定常空气动力学问题而言,最希望得到的就是飞行器表面的非定常压力分布。从上述简化过程中可以看到,如果求解的是N-S方程或欧拉方程,就可以直接获得所有流场信息,包括压力分布;如果求解的是全速势方程或小扰动速势方程,得到的是速度势或扰动速势,一旦获得全速势函数或扰动速势函数,再运用非定常伯努利方程就可以求出压力分布,继而得到我们所期望的非定常气动力性质。

1.2 势流理论的非定常流动与定常流动计算的主要差别

在计算非定常流动的方法中,对于N-S方程和欧拉方程数值求解方法而言,一般只需要在非定常边界条件上嵌入非定常条件就可以了,而且加入非定常边界条件也很容易,在本书的后面章节中有详细的介绍。但是,对于速势方程,尤其是小扰动速势方程而言,非定常与定常方程的计算方法有很大的区别,非定常方程的求解过程要复杂得多,下面就列出势流方法计算中非定常流动需要强调的方面。

1.2.1 非定常边界条件

在非定常流动计算中,求解N-S方程的物面边界条件是无滑移条件,即物面空气的运

动速度与物面运动速度相等;求解欧拉方程时需要加入物面切向流条件,即物面空气的法向运动速度与物面的法向运动速度相等;如果求解速势方程,同样要采用切向流条件。下面给出速势函数应该满足的非定常边界条件形式。

设物体表面由函数 S 表示,则对于 t 时刻的任意点 (x, y, z) 有

$$S(x, y, z, t) = 0 \quad (1.11)$$

在 $t + \Delta t$ 时刻,上述点 (x, y, z) 移至 $(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$ 处,物面函数变为

$$S'(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z, t + \Delta t) = 0 \quad (1.12)$$

由式(1.11)减式(1.12),并进行泰勒级数展开,得

$$S' - S = S(x, y, z) + \frac{\partial S}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial S}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial S}{\partial z} \Delta z + \frac{\partial S}{\partial t} \Delta t + \dots - S(x, y, z) = 0 \quad (1.13)$$

保留一阶项,并在方程两边除以 Δt ,则有

$$\frac{\partial S}{\partial x} \frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{\partial S}{\partial y} \frac{\Delta y}{\Delta t} + \frac{\partial S}{\partial z} \frac{\Delta z}{\Delta t} + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \quad (1.14)$$

取极限 $\Delta t \rightarrow 0$,并注意到

$$u|_B = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

$$v|_B = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta t}$$

$$w|_B = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta t}$$

这里, $u|_B, v|_B, w|_B$ 指物面上 (x, y, z) 点的运动速度,则有

$$\frac{\partial S}{\partial x} \cdot u|_B + \frac{\partial S}{\partial y} \cdot v|_B + \frac{\partial S}{\partial z} \cdot w|_B = - \frac{\partial S}{\partial t} \quad (1.15)$$

对物面上点 (x, y, z) 的法向导数,存在下列关系

$$U_{nB} = \cos(\mathbf{n}, x) \cdot u|_B + \cos(\mathbf{n}, y) \cdot v|_B + \cos(\mathbf{n}, z) \cdot w|_B \quad (1.16)$$

式中,下标 B 指物面。根据数学关系

$$\left. \begin{aligned} \cos(\mathbf{n}, x) &= \frac{\frac{\partial S}{\partial x}}{\sqrt{(\frac{\partial S}{\partial x})^2 + (\frac{\partial S}{\partial y})^2 + (\frac{\partial S}{\partial z})^2}} \\ \cos(\mathbf{n}, y) &= \frac{\frac{\partial S}{\partial y}}{\sqrt{(\frac{\partial S}{\partial x})^2 + (\frac{\partial S}{\partial y})^2 + (\frac{\partial S}{\partial z})^2}} \\ \cos(\mathbf{n}, z) &= \frac{\frac{\partial S}{\partial z}}{\sqrt{(\frac{\partial S}{\partial x})^2 + (\frac{\partial S}{\partial y})^2 + (\frac{\partial S}{\partial z})^2}} \end{aligned} \right\} \quad (1.17)$$

在不影响一般性的情况下,设法向向量为单位向量,则

$$U_{nB} = \frac{\partial S}{\partial x} \cdot u|_B + \frac{\partial S}{\partial y} \cdot v|_B + \frac{\partial S}{\partial z} \cdot w|_B = - \frac{\partial S}{\partial t} \quad (1.18)$$