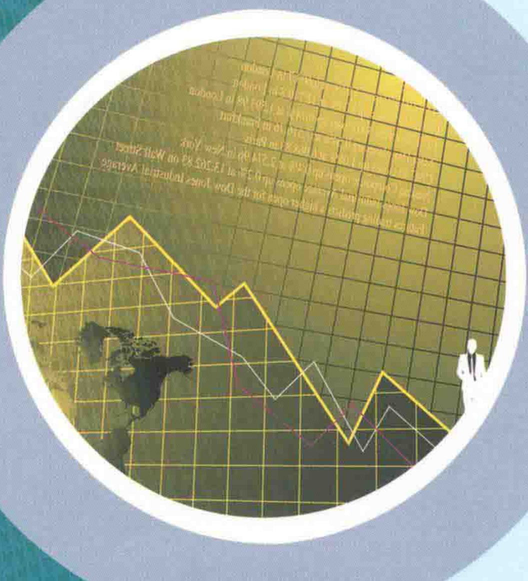
普通高等院校『十二五』规划教材

GAODENG SHUXUE

高等数学

（下册）

主编◎赵润华



清华大学出版社

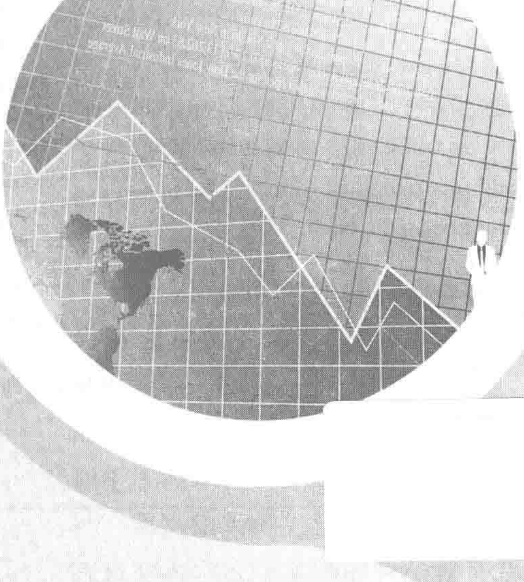
普通高等院校“十二五”规划教材

高等数学

（下册）

GAODENG SHUXUE

主　编◎赵润华
副主编◎张超敏　李跃武　郗多明



清华大学出版社
北　京

内 容 简 介

本书在高等数学教学实践的基础上，在保证知识的系统性和完整性的同时，以专业服务和应用为目的，以体现数学文化、加强实验教学、强化数学建模能力训练为指导思想而编写的。

本书分上、下两册，下册包括微分方程与差分方程、空间解析几何、多元函数微分法、二重积分和无穷级数。各章末附有习题。

本书可作为普通高等院校教材，也可供管理、财经专业及非数学类理科专业的学生学习参考。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学. 下册 / 赵润华主编. --北京：清华大学出版社，2015
(普通高等院校"十二五"规划教材)
ISBN 978-7-302-41591-6

Ⅰ.①高… Ⅱ.①赵… Ⅲ.①高等数学-高等学校-教材 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 225356 号

责任编辑：刘志彬
封面设计：汉风唐韵
责任校对：王凤芝
责任印制：王静怡

出版发行：清华大学出版社
网　　址：http://www.tup.com.cn，http://www.wqbook.com
地　　址：北京清华大学学研大厦 A 座　　**邮　　编**：100084
社 总 机：010-62770175　　**邮　　购**：010-62786544
投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质量反馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 装 者：三河市海新印务有限公司
经　　销：全国新华书店
开　　本：185 mm×260 mm　　**印　　张**：10.5　　**字　　数**：249 千字
版　　次：2015 年 10 月第 1 版　　**印　　次**：2015 年 10 月第1 次印刷
印　　数：1～3000
定　　价：26.00

产品编号：066159-01

Preface 前言

为了适应“高等数学面向21世纪数学内容和课程体系改革规划”的需要，探索以工程应用为目的的高等数学改革模式，培养经济、管理、农林、生命科学等专业学生的数学素质和工程实践应用能力，我们在高等数学教学实践的基础上，本着理论体系完整、密切联系实际、专业应用突出的基本原则，编写了本书。

本书在保证知识的系统性和严谨性的基础上，还具有以下特点：

1. 科学性

本书在内容安排上力求由浅入深，重点突出，结构清晰；在认知规律上，以实践背景为主线，引入数学概念，以便学生理解和掌握，符合认知规律。本书理论严谨，叙述简练，体现数学文化理念，便于模块化教学。数学不仅是一种重要的工具，也是一种思维模式，即逻辑思维；数学不仅是一门科学，也是一种文化，即数学文化；数学教学不仅传授知识，更重要的是培养学生运用数学工具解决实际问题的能力，即数学建模能力，提升学生的数学素养。

2. 先进性

本书结构新颖，各章节相对独立，便于模块化教学；在内容编写上充分吸收国内外优秀教材的优点，在例题的配置与习题的选择上，注重与专业相结合，富有时代性；适合应用型人才兼顾拔尖创新型人才的能力培养。

3. 拓广性

本书注重知识的拓广，强化数学建模的能力训练。每个章节都安排有数学实验课、数学建模习题等板块，以此来培养学生用数学分析的方式解决工程实际问题的能力，提高数学素质，培养创新意识。

4. 适用性

本书针对不同专业学生对数学学科的不同要求，配备不同层次的习题，分为A、B两类。A类是体现基本要求的习题，以够用为度；B类是对基本内容提升、扩展及综合运用性质的习题，并与《全国硕士研究生入学统一考试大纲》的要求接轨。内容的安排以及习题选配都遵循了教学活动自身的规律性，以便组织教学。

参加编写的人员都是多年从事公共数学基础课程教学研究和高等数学课程教育教学改革实践的资深教育专家和教师。本书由主编负责设计编写大纲，

编者共同完成。各章编写分工如下：赵润华编写第 1 章；李跃武编写第 2、3 章；赵晓芬编写第 4 章；石国红、张若平编写第 5、6、10 章；郗多明、孙静编写第 7、11 章；赵雪婷编写第 8 章；张超敏编写第 9 章。

在本书的编写过程中，参考了许多国内外优秀教材，并且得到了清华大学出版社的大力支持，在此一并表示衷心感谢。

由于编者水平有限，书中难免有不足和疏漏之处，敬请广大读者批评指正。

编　者

2015 年 9 月

Contents 目 录

第7章 微分方程与差分方程

第8章　空间解析几何

第9章　多元函数微分法及其应用

第 7 章

微分方程与差分方程

在研究实际问题时，经常需要寻找变量之间的函数关系. 而这种函数关系往往不容易直接建立，但是根据问题所提供的信息，可以列出要找的函数及其导数(或微分)的关系式，这样的关系式就是微分方程.

本章主要介绍微分方程的一些基本概念及常见的几种类型微分方程的解法，并对差分方程的有关内容做简单介绍.

7.1 微分方程的基本概念

先来看两个例子.

例 7-1 已知曲线 $y=f(x)$ 上任一点 (x,y) 处的切线斜率等于 $x-1$，并经过点 $(0,1)$，求该曲线方程.

解 根据导数的几何意义，函数 $y=f(x)$ 应满足关系式

$$\frac{dy}{dx}=x-1. \tag{7-1}$$

此外，曲线过点 $(0,1)$，故 $y=f(x)$ 还应满足条件：

$$x=0\text{ 时}, y=1. \tag{7-2}$$

把式(7-1)两端积分，得

$$y=\int(x-1)dx=\frac{1}{2}x^2-x+C. \tag{7-3}$$

其中，C 为任意常数.

把条件式(7-2)代入式(7-3)，得

$$C=1.$$

把 $C=1$ 代入式(7-3)，即得所求曲线方程为

$$y=\frac{1}{2}x^2-x+1. \tag{7-4}$$

例 7-2 列车在平直的线路上以 20 m/s 的速度行驶，当制动时列车获得加速度 $-0.4\ m/s^2$. 问：开始制动后多少时间列车才能停住以及列车在这段时间里行驶了多少路程？

解 设列车在开始制动后 t s 时行驶了 s m，反映制动阶段列车运动规律的函数 $s=s(t)$ 应满足关系式

$$\frac{d^2s}{dt^2}=-0.4. \tag{7-5}$$

此外，$s=s(t)$ 还应满足以下条件：

$$t=0\text{ 时}, s=0, v=\frac{ds}{dt}=20. \tag{7-6}$$

把式(7-5)两端积分一次，得

$$v=\frac{ds}{dt}=-0.4t+C_1; \tag{7-7}$$

再积分一次，得

$$s=-0.2t^2+C_1t+C_2. \tag{7-8}$$

这里，C_1，C_2 都是任意常数.

把条件“$t=0$ 时，$v=20$”代入式(7-7)，得

$$C_1=20.$$

把条件“$t=0$ 时，$s=0$”代入式(7-8)，得

$$C_2=0.$$

把 C_1，C_2 的值代入式(7-7)及式(7-8)，得

$$v=-0.4t+20; \tag{7-9}$$

$$s=-0.2t^2+20t. \tag{7-10}$$

在式(7-9)中令 $v=0$，得到列车从开始制动到完全停住所需的时间

$$t=\frac{20}{0.4}\text{s}=50\ \text{s}.$$

再把 $t=50$ 代入式(7-10)，得到列车在制动阶段行驶的路程

$$s=(-0.2\times 50^2+20\times 50)\text{m}=500\ \text{m}.$$

下面介绍微分方程的一些基本概念.

(1)微分方程.

上述两个例子中的关系式(7-1)和式(7-5)都含有未知函数的导数，它们都是微分方程. 一般地，含有未知函数的导数或微分的方程叫做微分方程.

(2)微分方程的阶.

微分方程中出现的未知函数的最高阶导数的阶数叫做微分方程的阶. 例如，方程(7-1)是一阶微分方程；方程(7-5)是二阶微分方程. 又如，方程

$$xy'''+3yy'+5x^2=0$$

是三阶微分方程.

一般地，n 阶微分方程的形式是

$$F(x,y,y',\cdots,y^{(n)})=0. \tag{7-11}$$

需要指出的是，在方程(7-11)中，$y^{(n)}$ 是必须出现的，而 $x,y,y',\cdots,y^{(n-1)}$ 等变量则不一定出现.

(3)微分方程的解.

如果一个函数代入微分方程后方程两端恒等，这个函数就叫做该微分方程的解. 例如，函数(7-3)和函数(7-4)都是微分方程(7-1)的解；函数(7-8)、函数(7-10)都是微分方程(7-5)的解.

(4)微分方程的通解.

如果微分方程的解中所有独立任意常数的个数等于微分方程的阶数，这样的解叫做微分方程的通解. 例如，函数(7-3)是方程(7-1)的通解，函数(7-8)是方程(7-5)的通解.

(5)初始条件.

由于通解中含有任意常数，所以它还不能完全确定地反映某一客观事物的规律性，要完全确定地反映客观事物的规律性必须确定这些常数的值，为此，要根据问题的实际情况，提出确定这些常数的条件. 例如，例 7-1 中的条件式(7-2)及例 2 中的条件式(7-6)便是这样的条件，这些条件叫做初始条件.

一般地，一阶微分方程的初始条件是

$$x=x_0 \text{ 时}, y=y_0,$$

或记作
$$y|_{x=x_0}=y_0.$$

其中, x_0, y_0 都是给定的值;二阶微分方程的初始条件是

$$x=x_0 \text{ 时}, y=y_0, y'=y_0',$$

或记作
$$y|_{x=x_0}=y_0, y'|_{x=x_0}=y'_0.$$

(6)微分方程的特解.

确定了通解中任意常数后所得的解,叫做微分方程的特解. 例如,函数(7-4)是方程(7-1)满足初始条件式(7-2)的特解,函数(7-10)是方程(7-5)满足初始条件式(7-6)的特解.

(7)初值问题.

求微分方程满足初始条件的解的问题叫做微分方程的初值问题. 例如,一阶微分方程的初值问题可表示为$\begin{cases} F(x,y,y')=0, \\ y|_{x=0}=0. \end{cases}$

(8)积分曲线.

微分方程的每一个特解在几何上表示一条平面曲线,称为微分方程的积分曲线. 而微分方程的通解,由于它含有任意常数,所以它在几何上表示一族积分曲线,称为微分方程的积分曲线族. 例如,方程(7-1)的特解(7-4) $y=\dfrac{1}{2}x^2-x+1$ 是方程(7-1)过点(0,1)的那一条积分曲线,而通解(7-3) $y=\dfrac{1}{2}x^2-x+C$ 是方程(7-1)以 c 为参数的积分曲线族.

7.2 一阶微分方程

本节讨论几种简单的一阶微分方程的解法.

7.2.1 可分离变量的微分方程

如果一个一阶微分方程可以化为

$$g(y)\mathrm{d}y=f(x)\mathrm{d}x \tag{7-12}$$

的形式,就是说能把方程写成一端只含 y 的函数和 $\mathrm{d}y$,另一端只含 x 的函数和 $\mathrm{d}x$,那么这个方程就叫做可分离变量的微分方程.

对可分离变量的微分方程,有如下解法:

①分离变量,将方程化成已分离变量的式(7-12);

②两端积分,将式(7-12)两端积分,得

$$\int g(y)\mathrm{d}y=\int f(x)\mathrm{d}x.$$

设 $g(y)$ 和 $f(x)$ 的原函数分别为 $G(y)$ 和 $F(x)$,于是有

$$G(y)=F(x)+C. \tag{7-13}$$

我们不加证明地指出,如果 $g(y)$ 和 $f(x)$ 是连续的,且 $g(y)\neq 0$,那么,得到的式(7-13)

所确定的隐函数就是方程的通解.

这种解法叫做分离变量法.

式(7-13)叫做方程的隐式通解.为简单起见,也可把式(7-13)当作方程的通解.

例 7-3 求微分方程$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y}{x^2}$的通解.

解 这是一个可分离变量的方程.把它改写成式(7-12)的形式,即分离变量得

$$\frac{1}{y}\mathrm{d}y=\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x.$$

两端积分

$$\int\frac{1}{y}\mathrm{d}y=\int\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x,$$

得

$$\ln|y|=-\frac{1}{x}+C_1.$$

从而有

$$|y|=\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}+C_1}=\mathrm{e}^{C_1}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}},$$

即

$$y=\pm\mathrm{e}^{C_1}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$$

因$\pm\mathrm{e}^{C_1}$是非零任意常数,把它记作C,故得所给方程的通解为

$$y=C\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}.$$

显然,$y=0$也是所给方程的解,此时只需在上式中让C也取0,通解就包含$y=0$.对$y=0$的情况有时也可忽略.

例 7-4 求微分方程$x(1+y^2)\mathrm{d}x=y(1+x^2)\mathrm{d}y$满足初始条件$y|_{x=1}=1$的特解.

解 分离变量,得

$$\frac{y}{1+y^2}\mathrm{d}y=\frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x.$$

两端积分

$$\int\frac{y}{1+y^2}\mathrm{d}y=\int\frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x,$$

得

$$\frac{1}{2}\ln(1+y^2)=\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+\frac{1}{2}\ln C^{①},$$

即

$$(1+y^2)=C(1+x^2).$$

代入初始条件$y|_{x=1}=1$,得$C=1$.从而所求特解为$y=x$.

例 7-5 增长模型(马尔萨斯人口模型).

英国人口学家马尔萨斯(Malthus,1766—1834)根据某地区百余年的人口统计资料,于1798年提出了著名的人口指数增长模型.这个模型的基本假设是:人口的增长率是常数,或者说,单位时间内人口的增长量与当时的人口成正比,设时刻t的人口数量为$N(t)$,显然$N(t)$随t是离散变化的,不是连续变化的,但为了利用微积分这一数学工具,把$N(t)$当作连续、可微的函数(因人口数量很大,可近似地这样处理,此乃离散变量连续化处理),记初始时刻$t=0$的人口为N_0,人口增长率为r[r是单位时间内$N(t)$的增量与$N(t)$的比例系数].于是,$N(t)$满足以下的微分方程:

$$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}=rN,\\ N(0)=N_0.\end{cases}$$

---

① 为便于下一步利用对数运算规则将结果化简,这里把任意常数改写成$\frac{1}{2}\ln C$的形式.

用分离变量法，求出其解为 $N(t)=N_0e^{rt}$. 这个解表明，当 $r>0$ 时，人口按指数规律随时间无限增长.

例 7-6 阻滞增长模型(Logistic 模型).

例 7-5 中的指数增长模型在 19 世纪前比较符合实际人口增长情况，但从 19 世纪之后，就与人口实际增长情况相差较大，这主要是因为随着人口的增长，自然资源、环境条件等因素对人口继续增长起阻滞作用. 因此，必须对马尔萨斯人口模型进行修改.

假设人类生存空间及可利用资源等环境因素所能容纳的最大人口容量为 K(称为饱和水平). 人口数量 $N(t)$的增长速度不仅与现有人口数量成正比，而且还与人口尚未实现的部分(相对最大容量 K 而言)所占比例成正比，比例系数为固有增长率，于是修改后的模型为

$$\begin{cases}\dfrac{dN}{dt}=rN\left(\dfrac{K-N}{K}\right),\\ N(0)=N_0.\end{cases}$$

这就是非常著名的 Logistic 模型.

Logistic 模型是由荷兰生物学家弗胡斯特(Verhust)在 1838 年提出的，因子$\dfrac{K-N}{K}$的生物学含义是“剩余空间”或称为尚未利用的增长机会.

下面来求 Logistic 模型的解.

分离变量得

$$\frac{KdN}{N(K-N)}=rdt.$$

两端积分得

$$\ln N-\ln(K-N)=rt-\ln C,$$

或

$$\frac{K-N}{N}=Ce^{-rt},$$

通解为

$$N(t)=\frac{K}{1+Ce^{-rt}},$$

由初始条件 $N(0)=N_0$，得 $C=\dfrac{K}{N_0}-1$，$N(t)$的图形称为 Logistic 曲线，由于它的形状像 S，一般也称为 S 曲线，如图 7-1 所示.

Logistic 模型的用途十分广泛，除了上面所举的用于预测人口增长外，也可完全类似地用于信息的传播、新技术的推广、疾病的扩散以及商品的销售等.

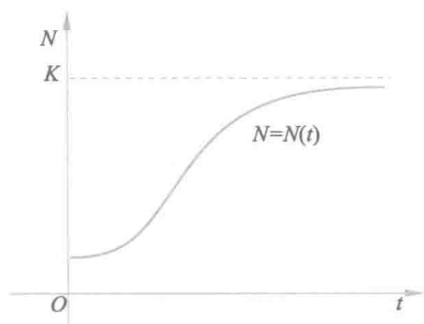


图 7-1

例 7-7 价格调整模型.

设商品的需求函数与供给函数分别为

$$Q_d=a-bP,Q_s=\alpha+\beta P.$$

其中，a,b,α,β 均为常数，且 $b,\beta>0$. 当供求平衡时，即 $Q_d=Q_s$时，使 $P=\dfrac{a-\alpha}{b+\beta}$，记为 P_e，称为均衡价格.

一般地，当商品供不应求，即 $Q_d>Q_s$ 时，该商品价格上涨，$\dfrac{dP}{dt}>0$；当商品供大于求，即 $Q_d<Q_s$ 时，该商品价格下落，$\dfrac{dP}{dt}<0$. 因此，价格变化率$\dfrac{dP}{dt}$与 Q_d-Q_s 成正比，即

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}&=k(Q_d-Q_s)\\&=k[a-\alpha-(b+\beta)P]\\&=k(b+\beta)\left(\frac{a-\alpha}{b+\beta}-P\right).\end{aligned}$$

设 $t=0$ 时的价格为 P_0，记 $\lambda=k(b+\beta)$，于是有

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}=\lambda(P_e-P),\\P(0)=P_0.\end{cases}$$

分离变量得

$$\frac{\mathrm{d}P}{P_e-P}=\lambda\mathrm{d}t.$$

两端积分，得

$$-\ln(P_e-P)=\lambda t+C_1,$$

即

$$P=P_e-C\mathrm{e}^{-\lambda t}.$$

由初始条件 $P(0)=P_0$，得 $C=P_e-P_0$

故

$$P=P_e+(P_0-P_e)\mathrm{e}^{-\lambda t}.$$

由于 $\lambda>0$，则 $\lim\limits_{t\to\infty}P=P_e$，说明随着时间的推移，价格将逐步趋向均衡价格.

7.2.2 齐次方程

如果一阶微分方程可化成

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f\left(\frac{y}{x}\right)\tag{7-14}$$

的形式，那么就称该方程为齐次微分方程，简称齐次方程.

例如，方程

$$(x^2+y^2)\mathrm{d}x+(y^2-2xy)\mathrm{d}y=0$$

是齐次方程. 因为它可化成

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{x^2+y^2}{2xy-y^2},$$

即

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1+\left(\dfrac{y}{x}\right)^2}{2\left(\dfrac{y}{x}\right)-1}$$

在方程(7-14)中引进新的未知函数 $u=\dfrac{y}{x}$，由此可得

$$y=ux,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}.$$

代入方程(7-14)，得

$$u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=f(u).$$

这是可分离变量的微分方程，分离变量后得