世纪高教·工商管理系列教材

Operations Research Practice in Management

管理运筹学

基础、技术及Excel建模实践

（第二版）

编著　刘春梅

格致出版社　上海人民出版社

世纪高教·工商管理系列教材

管理运筹学

基础、技术及Excel建模实践

（第二版）

编著　刘春梅

格致出版社　上海人民出版社

图书在版编目(CIP)数据

管理运筹学:基础、技术及 Excel 建模实践/刘春梅编著.—2 版.—上海:格致出版社:上海人民出版社,2016.9

世纪高教·工商管理系列教材

ISBN 978-7-5432-2617-3

Ⅰ.①管… Ⅱ.①刘… Ⅲ.①表处理软件-应用-管理学-运筹学-高等学校-教材 Ⅳ.①C931.1-39

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 085758 号

责任编辑 彭 琳
美术编辑 路 静

工商管理系列教材

管理运筹学:基础、技术及 Excel 建模实践(第二版)

刘春梅 编著

出 版 世纪出版股份有限公司 格致出版社 世纪出版集团 上海人民出版社 (200001 上海福建中路 193 号 www.ewen.co) 编辑部热线 021-63914988 市场部热线 021-63914081 www.hibooks.cn	**印 刷** 苏州望电印刷有限公司
	开 本 787×1092 1/16
	印 张 25.5
	插 页 1
	字 数 552,000
	版 次 2016 年 9 月第 1 版
发 行 上海世纪出版股份有限公司发行中心	**印 次** 2016 年 9 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-5432-2617-3/F·924 定价:49.00 元

前 言

《管理运筹学：基础、技术及Excel建模实践》(第二版)是上海市2015年本科生重点课程建设的成果。

运筹学是经济管理类专业一门非常重要的专业基础课，是一门介绍一系列整体优化思想和定量分析的科学。在当今人才及资源有限的经济背景下，如何对人才、资源进行统筹安排，为决策者提供有依据的方案，以实现最有效的管理显得格外重要。基于此，各高等院校都十分重视运筹学这门课程的建设，市面上也有很多运筹学的相关书籍。作为上海财经大学信息管理与工程学院管理科学系教师，我一直在思考如何写一本针对财经类院校学生的运筹学教材，将信息技术与理论模型有机结合。经过多年不断的教学探索和经验总结，终于整理出了一条主线：运筹学基本概念、基本模型和基本方法的介绍→Excel电子表格的建模和求解→实践案例。较之其他同类教材，本书具有以下特色和价值：

(1) 针对财经类院校的教学特点，增加了运筹学的应用和案例教学的内容，使教材更适合财经类院校学生使用。在教学过程中，我发现现有教材大都注重基本理论、基本模型和建本方法的介绍，相关软件和案例介绍得比较少；而财经类院校学生迫切需要掌握的是运筹学的应用，对理论模型的研究需求较少。因此，本书重点加强对软件的使用和案例的分析。

(2) 将运筹学的基本理论与Excel有机结合。本书在介绍运筹学基本理论和方法(线性规划及其单纯形法、对偶理论与灵敏度分析、运输问题、整数规划、图与网络分析、存储论、决策论、动态规划、排队论)的基础上，合理运用现代信息技术等手段，将运筹学模型与Excel软件有机地结合起来，并将Excel电子表格的应用贯穿于每一章。通过运用Excel电子表格对所建立的数学模型进行求解，一方面，使学生理解每一章的重点和难点，掌握分析问题的方法和建立运筹学模型的技巧；另一方面，通过对求解结果的分析，辅助决策者在管理实践中做出正确决策。

(3) 注重案例教学，构建案例库。案例是辅助学生学习和掌握课程内容的重要手段，案例不仅要和理论相结合，还要和实际问题相结合。本书每一章章末都有相关的案例分析，包括案例背景的介绍、变量的设置、模型的建立以及运用Excel求解。学生在吸

收基本理论的前提下，通过案例的学习和讨论，深入理解运筹学的基本概念和基本理论，掌握运筹学的基本模型和基本方法，并在实践中灵活运用。

自第一版2010年出版以来，得到了广大学者、专家及读者的欢迎与厚爱，也收到了许多师生和读者的意见和建议。据此借2015年上海市重点课程的立项之机，本书进行了较大篇幅的修改，以适应广大师生读者教学和研究的需要。在第一版的基础上，第二版增加了部分教学内容，更换了部分案例，增加了大量习题。这些调整的目的都是使本书的结构更加合理，方便读者对运筹学的理解和掌握。此外，本书对第一版存在的一些错漏之处也做了改正。

本书不仅可以启发财经类院校和非财经类院校信息管理相关专业的学生将运筹学的理论模型与信息技术有机结合，引导他们了解运筹学在实际中的应用，更有助于帮助非信息管理相关专业的学生掌握求解运筹学问题的软件和建模技巧，提高他们分析和解决实际问题的能力，还可为管理人员解决实际问题提供参考。

本书由刘春梅统筹编著。本书第一版的编写得到了李竹宁及伊万燕、荀顺敏、张媛、张智轶、顾雨佳、韩倩、孙静、顾玮民、王君燕、史伟东的帮助，谷雨、肖生升和程辰子在校稿方面给予了帮助。第二版习题整理得到了邓嘉颖、黄润、郭旺辉、刘湘玲、王豫姝和王怡文的帮助，王韵霏和彭琳在校稿方面给予了帮助。同时本书的出版也得到了格致出版社的大力支持。在编写的过程中参考了大量已有的资料。谨在此表示谢意。

由于编者水平和时间有限，书中不妥之处在所难免，恳请广大师生读者批评指正，以便进一步改进。对一直关心支持和使用本书的广大师生和读者朋友，作者再一次表示衷心感谢。同时，对第一版中的错误和不足给读者带来的不便深表歉意。

刘春梅

2016年5月

目　录

第 1 章　线性规划及其单纯形法

线性规划是运筹学的重要分支，自从 1947 年美国运筹学家丹捷格(G.B.Dantzig)提出求解线性规划的方法——单纯形算法以后，线性规划得到了迅猛的发展，现在已经在工业、农业、国防和科技等领域得到了广泛应用。本章主要介绍线性规划的基本概念、基本理论、求解方法和应用，电子表格的建模和求解以及案例分析。

1.1　线性规划问题及其数学模型

1.1.1　线性规划问题的提出

［例 1.1］　设某厂计划生产 A、B 两种产品，分别需要由机器、人工和原材料三种资源共同完成。相关数据如表 1.1 所示。

表 1.1　相关数据

资　　源	产品 A	产品 B	资源限制
机器(机时)	5	2	120
人工(工时)	2	3	90
原材料(公斤)	4	2	100
产品利润(元)	12	8	

要求：在不超过资源总量限制的情况下安排 A、B 两种产品的产量，使该工厂获得的利润最大。

解：设 A、B 两种产品的生产数量分别为 x_1，x_2 件，产品总利润为 z 元。

由于该工厂可以提供的机时最大限制是 120，所以生产 A、B 两种产品的机时一定不能超过 120，即有 $5x_1+2x_2\leqslant 120$。

同样，生产 A、B 两种产品所需要的人工工时和消耗的原材料也一定不能超过该工厂可以提供的人工工时和原材料的数量，则有：

$$\begin{cases}2x_1+3x_2\leqslant 90\\4x_1+2x_2\leqslant 100\end{cases}$$

由于销售一件产品 A 可以获得 12 元的利润,销售一件产品 B 可以获得 8 元的利润,那么可以获得的总利润为 $z=12x_1+8x_2$。

另外,A、B 两种产品生产数量不能是负数,所以必须有 $x_1, x_2 \geqslant 0$。

这样,该问题的数学模型就可以描述为:

$$\max z = 12x_1 + 8x_2$$
$$\text{s.t.} \begin{cases} 5x_1 + 2x_2 \leqslant 120 \\ 2x_1 + 3x_2 \leqslant 90 \\ 4x_1 + 2x_2 \leqslant 100 \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

[**例 1.2**] 某旅行社为了迎接旅游黄金周的到来,经过统计分析,对"一日游"导游人员的需求如表 1.2 所示。为了保证导游有充分的休息,导游每周工作 5 天,休息 2 天,并要求休息的 2 天是连续的。

问:应该如何安排导游人员的作息,既满足工作需要,又使配备的导游人数最少?

表 1.2 旅游公司每日所需导游人数

时 间	所需导游人数
星期日	40
星期一	34
星期二	32
星期三	35
星期四	28
星期五	46
星期六	42

解:设星期日、星期一、星期二、星期三、星期四、星期五、星期六开始工作的导游人数分别为 $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7$,所需总导游人数为 z。

由于星期日正在工作的人数是由星期三、星期四、星期五、星期六、星期日开始工作的导游人员组成的,而星期日所需的导游人数为 40,则星期日工作的导游人数一定不能少于星期日所需的导游人数,则有:$x_4+x_5+x_6+x_7+x_1 \geqslant 40$。

同理,有

$$\begin{cases} x_5 + x_6 + x_7 + x_1 + x_2 \geqslant 34 \\ x_6 + x_7 + x_1 + x_2 + x_3 \geqslant 32 \\ x_7 + x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geqslant 35 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \geqslant 28 \\ x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \geqslant 46 \\ x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \geqslant 42 \end{cases}$$

该公司所需总的导游人数为 $z=x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7$。

另外，每天开始工作的导游人数不能是负数且不能是分数，所以必然有 $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geqslant 0$ 且为整数。

这样该问题的数学模型就可以描述为：

$$\min z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_1 \geqslant 40 \\ x_5 + x_6 + x_7 + x_1 + x_2 \geqslant 34 \\ x_6 + x_7 + x_1 + x_2 + x_3 \geqslant 32 \\ x_7 + x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geqslant 35 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \geqslant 28 \\ x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \geqslant 46 \\ x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \geqslant 42 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geqslant 0 \text{ 且为整数} \end{cases}$$

[例 1.3]　某种营养配方是由 n 种配料组成。要求这种营养配方必须含有 m 种不同的营养成分，而且要求每单位营养配方中第 i 种营养成分的含量不能低于 $b_i (i = 1, 2, \cdots, m)$。已知第 i 种营养成分在每单位的第 j 种配料中的含量为 $a_{ij} (j = 1, 2, \cdots, n)$，每单位的第 j 种配料的价格为 c_j，有关数据见表 1.3。现在要求在保证营养条件的前提下，应采用何种配方，使营养配方的总成本最小？

表 1.3　相关数据

营养成分 \ 配料	B_1	B_2	$\cdots$	B_n	含　量
A_1	a_{11}	a_{12}	$\cdots$	a_{1n}	b_1
A_2	a_{21}	a_{22}	$\cdots$	a_{2n}	b_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
A_m	a_{m1}	a_{m2}	$\cdots$	a_{mn}	b_m
单　价	c_1	c_2	$\cdots$	c_n	

解：设 x_j 表示在单位营养配方中，第 j 种配料的含量 $(j = 1, 2, \cdots, n)$，该种营养配方的总成本为 z。

对于第 1 种营养成分而言，n 种混合配料中第 1 种营养成分的含量一定不能低于对第 1 种营养成分的要求 b_1，则有 $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \geqslant b_1$。

同样地，n 种混合配料中第 2, 3, $\cdots$, n 种营养成分的含量一定不能低于对第 2, 3, $\cdots$, n 种营养成分的要求 $b_2, b_3, \cdots, b_m$，则有：

$$\begin{cases} a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \geqslant b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \cdots + a_{3n}x_n \geqslant b_3 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \geqslant b_m \end{cases}$$

n 种配料的含量之和为 1，即 $x_1+x_2+\cdots+x_n=1$。

购买 n 中配料所需要的总成本为 $z=c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n$。

另外，每一种配料的含量不能是负数，则有 $x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0,\ \cdots,\ x_n\geqslant 0$。

这样该问题的数学模型就可以描述为：

$$\min z=c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n\geqslant b_1\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n\geqslant b_2\\\qquad\qquad\vdots\\a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n\geqslant b_m\\x_1+x_2+\cdots+x_n=1\\x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n\geqslant 0\end{cases}$$

1.1.2 线性规划问题的数学模型

不难看出，上述三个例子都具有以下三个共同的特点：

(1) 每个问题都存在一组决策变量(decision variable)$x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n$，一组决策变量的值表示一个具体的方案，通常要求这些决策变量的取值是非负的。

(2) 都存在一定的约束条件(constraint)，这些约束条件可以是等式，也可以是不等式，不论是等式还是不等式，一定是决策变量的线性函数。

(3) 都有一个要求达到的目标函数(objective function)，这个目标函数可以是求极大值也可以是求极小值，无论目标函数是求极大值还是极小值，目标函数一定是决策变量的线性函数。

满足以上三个条件的数学模型称为线性规划问题。其一般形式为：

$$\max(\min)\ z=c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n\geqslant(=,\ \leqslant)b_1\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n\geqslant(=,\ \leqslant)b_2\\\qquad\qquad\vdots\\a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n\geqslant(=,\ \leqslant)b_m\\x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n\geqslant(\leqslant)0\end{cases}\tag{1.1}$$

1.1.3 线性规划问题的标准形式

线性规划问题的数学模型有各种不同的形式，如目标函数有求极大值和求极小值；约束条件有“$\leqslant$”、“$\geqslant$”和“$=$”三种情况；决策变量有的有非负性要求，有的则没有。为

了求解方便,规定线性规划问题的标准形式。

1. 标准形式的定义

线性规划的标准形式必须满足以下四点要求:

(1) 目标函数为求极大值,即 $\max z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$。

(2) 约束条件为等式,即:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

(3) 约束条件右端项非负,即:$b_i \geqslant 0,\ i = 1,\ 2,\ \cdots,\ m$。

(4) 决策变量非负,即:$x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n \geqslant 0$。

2. 标准形式的表达方式

(1) 代数式:

$$\max z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$
$$\text{s.t.} \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \\ x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n \geqslant 0 \end{cases} \tag{1.2}$$

简记为:

$$\max z = \sum_{j=1}^{n} c_jx_j$$
$$\text{s.t.} \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \quad (i = 1,\ 2,\ \cdots,\ m) \\ x_j \geqslant 0\ (j = 1,\ 2,\ \cdots,\ n) \end{cases} \tag{1.3}$$

(2) 矩阵式:

用矩阵描述如下:

$$\max z = \boldsymbol{CX}$$
$$\text{s.t.} \begin{cases} \boldsymbol{AX} = b \\ \boldsymbol{X} \geqslant 0 \end{cases} \tag{1.4}$$

其中:

$$\text{决策向量 } \boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad \text{价值向量 } \boldsymbol{C} = (c_1,\ c_2,\ \cdots,\ c_m)$$

$$资源向量\ \boldsymbol{b}=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \qquad 技术系数矩阵\ \boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

3. 非标准形式向标准形式转化

对于一个给定的线性规划问题,按照标准形式的四点要求进行一一对照,不满足标准形式要求的主要有以下几个方面:

(1) 若目标函数是求极小值问题,$\min z=\boldsymbol{CX}$。需要将等式两端同时乘以-1,则将求极小值问题转变为求极大值问题。因为 $\min z=-\max(-z)=\boldsymbol{CX}$,令 $z'=-z$,则 $\max z'=-\boldsymbol{CX}$。

(2) 若约束条件右端常数项非正,则需要将等式的两端同时乘以-1,这样约束条件的右端项就变为非负。

(3) 若约束条件为不等式,分两种情况进行讨论:(1)当约束条件为"$\leqslant$"不等式时,约束条件的左端加入一个非负的松弛变量,就把不等式变成了等式。如 $4x_1+2x_2\leqslant 60$,在不等式的左端加入一个非负松弛变量 x_3,则有 $4x_1+2x_2+x_3=60$。(2)当约束条件为"$\geqslant$"不等式时,约束条件的左端减去一个非负的剩余变量(也称松弛变量),就把不等式变成了等式。如 $4x_1+2x_2\geqslant 60$,在不等式的左端减去一个非负松弛变量 x_3,则有 $4x_1+2x_2-x_3=60$。

(4) 若决策变量 x_k 不满足非负性,分两种情况讨论:(1)如果 $x_k\leqslant 0$,令 $x_k=-x'_k$,其中 $x'_k\geqslant 0$,用 x'_k 取代模型中的 x_k;(2)如果决策变量 x_k 为无约束变量,令 $x_k=x'_k-x''_k$,其中 x'_k, $x''_k\geqslant 0$,用 x'_k, x''_k 取代模型中的 x_k。

[例 1.4] 试将如下线性规划问题化成标准形式:

$$\max z=12x_1+8x_2$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} 5x_1+2x_2\leqslant 120 \\ 2x_1+3x_2\leqslant 90 \\ 4x_1+2x_2\leqslant 100 \\ x_1,\ x_2\geqslant 0 \end{cases}$$

解:依据标准形式的定义,该线性规划问题的目标函数、约束条件的右端项、变量的非负性都满足标准形式的要求,只有约束条件不满足等式要求。这三个约束条件都是"$\leqslant$"不等式,所以将变量 x_3, x_4, x_5 分别引进第一、二、三个约束条件中,则该问题的标准形式如下:

$$\max z=12x_1+8x_2+0x_3+0x_4+0x_5$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} 5x_1+2x_2+x_3=120 \\ 2x_1+3x_2+x_4=90 \\ 4x_1+2x_2+x_5=100 \\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5\geqslant 0 \end{cases}$$

［例 1.5］ 试将如下线性规划问题化成标准形式：

$$\min z = x_1 + 3x_2 - 4x_3$$
$$\text{s.t.} \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 \leqslant 5 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 \geqslant 6 \\ -x_1 - x_2 - x_3 \geqslant -2 \\ x_1 \geqslant 0,\ x_3 \leqslant 0 \end{cases}$$

解：令 $z' = -z$，$x_3 = -x_3'$，$x_2 = x_2' - x_2''$，x_2'，x_2''，$x_3' \geqslant 0$。

将第三个约束条件的两端同时乘以-1。引进变量 x_4，x_5，x_6，分别在第一个约束条件左端加上非负松弛变量 x_4、第二个约束条件左端减去非负松弛变量 x_5、第三个约束条件左端加上非负松弛变量 x_6，则该问题的标准形式如下：

$$\max z' = -x_1 - 3(x_2' - x_2'') - 4x_3' + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6$$
$$\text{s.t.} \begin{cases} x_1 + 2(x_2' - x_2'') + x_3' + x_4 = 5 \\ 2x_1 + 3(x_2' - x_2'') + x_3' - x_5 = 6 \\ x_1 + (x_2' - x_2'') - x_3' + x_6 = 2 \\ x_1,\ x_2',\ x_2'',\ x_3',\ x_4,\ x_5,\ x_6 \geqslant 0 \end{cases}$$

1.1.4　线性规划问题解的概念

在学习线性规划问题的求解之前，先要了解线性规划问题有关解的概念。由前面讨论可知线性规划问题的标准形式为：

$$\max z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{1.5}$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \quad (i = 1,\ 2,\ \cdots,\ m) & (1.6) \\ x_j \geqslant 0 \quad (j = 1,\ 2,\ \cdots,\ n) & (1.7) \end{cases}$$

求解线性规划问题就是从满足约束条件式(1.6)、式(1.7)的方程组中找出一个解，使目标函数式(1.5)达到最大值。线性规划问题有关解的基本概念如下：

1. 可行解与非可行解

满足约束条件式(1.6)和非负条件式(1.7)的解 $\boldsymbol{X}$ 称为可行解(feasible solution)；满足约束条件式(1.6)但不满足非负条件式(1.7)的解 $\boldsymbol{X}$ 称为非可行解(infeasible solution)。

2. 可行域

可行解组成的集合叫做可行域(feasible region)。

3. 最优解

使目标函数式(1.5)达到最大值的解称为最优解(optimal solution)。

4. 基

线性规划问题的系数矩阵中任意 m 个线性无关的列所构成的一个矩阵称为线性规划的一个基。若系数矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2, \cdots, \boldsymbol{P}_n)$，设 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 m，当 $R(\boldsymbol{A})=m<n$，$\boldsymbol{A}$ 中必有线性独立的 m 列，构成该标准形式的一个基，即 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2, \cdots, \boldsymbol{P}_m)$，$|\boldsymbol{B}|\neq 0$，称 $\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2, \cdots, \boldsymbol{P}_m$ 为基向量。

5. 基变量与非基变量

与基相对应的变量称为基变量，记为 $\boldsymbol{X}_B=(x_1, x_2, \cdots, x_m)^{\mathrm{T}}$；不是基变量的变量称为非基变量，记为 $\boldsymbol{X}_N=(x_{m+1}, x_{m+2}, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}$。则有：

$$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{X}_B\\ \boldsymbol{X}_N\end{pmatrix}$$

6. 基本解

基变量在目标函数中的系数构成的行向量为 $\boldsymbol{C}_B$，即 $\boldsymbol{C}_B=(c_1, c_2, \cdots, c_m)$；非基变量在目标函数中的系数构成的行向量为 $\boldsymbol{C}_N$，即 $\boldsymbol{C}_N=(c_{m+1}, c_{m+2}, \cdots, c_n)$，则 $\boldsymbol{C}=(\boldsymbol{C}_B, \boldsymbol{C}_N)$。于是式(1.6)可以表示为：

$$\boldsymbol{AX}=(\boldsymbol{B}, \boldsymbol{N})(\boldsymbol{X}_B, \boldsymbol{X}_N)^{\mathrm{T}}=b$$

将约束条件展开得：

$$\boldsymbol{BX}_B+\boldsymbol{NX}_N=b$$

两端同时左乘以 $\boldsymbol{B}^{-1}$，则有：$\boldsymbol{X}_B=\boldsymbol{B}^{-1}b-\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{NX}_N$。

令非基变量 $X_N=0$，求得基变量 $\boldsymbol{X}_B$ 的值为：$\boldsymbol{X}_B=\boldsymbol{B}^{-1}b=b'$，也就是：

$$\boldsymbol{X}=(b_1, b_2, \cdots, b_m, 0, 0, \cdots, 0)^{\mathrm{T}}$$

称 $\boldsymbol{X}=(b_1, b_2, \cdots, b_m, 0, 0, \cdots, 0)^{\mathrm{T}}$ 为对应于基 $\boldsymbol{B}$ 的基本解。

7. 基本可行解

基本解 X_B 的非零分量都大于等于零时，称为基本可行解。

8. 可行基

对应于基本可行解的基，称为可行基。

上述线性规划问题有关解的关系可以用图 1.1 表示。

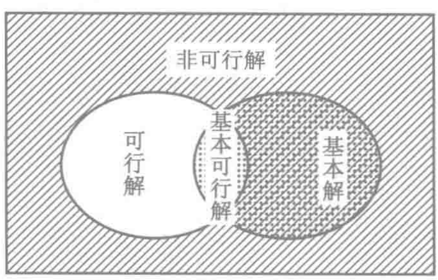

图 1.1　线性规划问题解之间的关系

［例 1.6］ 写出下列线性规划问题的一个基、基变量、非基变量、基本解、基本可行解、可行基。

$$\max z = 12x_1 + 8x_2$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 \leqslant 120 \\ 2x_1 + 3x_2 \leqslant 90 \\ 4x_1 + 2x_2 \leqslant 100 \\ x_1,\ x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

解：上述线性规划问题的标准形式如下：

$$\max z = 12x_1 + 8x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + x_3 = 120 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_4 = 90 \\ 4x_1 + 2x_2 + x_5 = 100 \\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5 \geqslant 0 \end{cases}$$

其系数矩阵的增广矩阵为：

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & \end{array} \\ \widetilde{\boldsymbol{A}} = & \left[\begin{array}{ccccc|c} 5 & 2 & 1 & 0 & 0 & 120 \\ 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 90 \\ 4 & 2 & 0 & 0 & 1 & 100 \end{array}\right] \end{array}$$

从上述矩阵不难看出，变量 x_3，x_4，x_5 的系数列向量是线性无关的，所以 x_3，x_4，x_5 的系数列向量构成的一个矩阵就是一个基，即：

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

与基 $\boldsymbol{B}$ 相对应的变量 x_3，x_4，x_5 就是基变量，而 x_1，x_2 就是非基变量。将基变量用非基变量线性表出，则有：

$$\max z = 12x_1 + 8x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} x_3 = 120 - 5x_1 - 2x_2 \\ x_4 = 90 - 2x_1 - 3x_2 \\ x_5 = 100 - 4x_1 - 2x_2 \end{cases}$$

令非基变量 $x_1 = x_2 = 0$，得到 $x_3 = 120$，$x_4 = 90$，$x_5 = 100$，即 $\boldsymbol{X}^{(0)} = (0,\ 0,\ 120,\ 90,\ 100)^{\mathrm{T}}$ 为对应于基 $\boldsymbol{B}$ 的基本解。由于基本解中所有的分量都是大于等于零，所以此