

非高斯系统的 控制及滤波

任密峰 张建华 王宏/著

Control and Filtering for Non-Gaussian
Systems



科学出版社

非高斯系统的控制及滤波

任密蜂 张建华 王 宏 著

科学出版社

北 京

内 容 简 介

本书介绍了非高斯系统控制及滤波的最新研究成果, 主要包括随机性度量及其非参数估计、控制输入受限的非高斯系统最小熵控制、多变量非高斯系统跟踪控制及最小熵滤波、数据驱动框架下的单神经元自适应控制器设计、非高斯网络化控制系统 (h, ϕ) -熵控制理论及应用、非高斯随机系统的多目标优化控制理论及应用。

本书适合高等院校和研究机构从事随机控制、信号处理、优化控制等研究工作的师生及其他科技工作者阅读参考。

图书在版编目 (CIP) 数据

非高斯系统的控制及滤波 / 任密峰, 张建华, 王宏著. —北京: 科学出版社, 2016.7

ISBN 978-7-03-049120-6

I. ①非… II. ①任… ②张… ③王… III. ①随机系统-研究

IV. ①O231

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2016) 第 143315 号

责任编辑: 张 震 姜 红/责任校对: 郭瑞芝

责任印制: 张 伟/封面设计: 无极书装

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码: 100717

<http://www.sciencep.com>

北京教图印刷有限公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2016 年 7 月第 一 版 开本: 720×1000 1/16

2016 年 7 月第一次印刷 印张: 11 1/8

字数: 230 000

定价: 66.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

前 言

随机分布控制理论为解决非高斯随机系统的控制及滤波问题开辟了一条全新的研究思路。传统随机控制方法仅仅考虑系统输出的均值和方差，而随机分布控制不同，它控制的是非高斯随机系统输出的整个概率密度函数（probability density function, PDF）形状。随机分布控制理论最早由王宏教授于 1996 年提出，用来解决造纸过程中的建模和控制等问题。2000 年王宏教授出版专著《Bounded Dynamic Stochastic Systems: Modelling and Control》，得到英国格拉斯哥大学 Michael Grimbale 教授和 Mike Johnson 教授的高度评价。该专著主要内容为采用 B-样条函数逼近系统的输出 PDF，进而建立 B-样条权值和控制输入之间的动态关系，这样，输出 PDF 的形状控制就转化为 B-样条权值的控制问题，可以采用已有的控制理论得到解决。

随着精密仪器、通信网络、图像处理和数据处理技术的快速发展，可以很容易通过测量系统输出数据或图像得到随机变量的统计信息集或 PDF 形状信息。这也使得随机分布控制理论广泛应用于系统建模、数据降维、滤波器设计和故障诊断等领域。例如，在系统建模过程中，通过选择模型参数使得建模误差服从从尽可能窄的零均值高斯分布，即可得到合理的系统模型。从 2002 年起，郭雷教授和王宏教授等学者采用基于线性矩阵不等式（linear matrix inequality, LMI）的凸优化方法解决随机分布系统中的控制、滤波、故障诊断等问题，并于 2010 年出版专著《Stochastic Distribution Control System Design: A Convex Optimization Approach》，该专著系统阐述了基于 LMI 凸优化方法在随机分布系统分析和综合中的应用。与之前的随机分布控制理论不同，该专著从建模的角度出发，建立非线性非高斯系统的两步神经网络模型，从而可以利用 LMI 优化工具达到控制 PDF 形状或统计信息集的目的。

以上两本有关随机分布控制理论的专著都是通过两个关键步骤达到输出 PDF 形状控制的目的：①采用 B-样条或其他神经网络近似系统输出的 PDF 或统计信息集；②建立 B-样条（神经网络）权值和控制输入之间的动态关系。众所周知，随机系统的控制目标为尽可能减小闭环系统的随机性，而传统的最小方差控制对于非高斯随机系统无法得到满意的控制效果，这就需要引入更一般的随机性度量来刻画非高斯随机变量的随机特性。受信息论中熵、距离等概念的启发，近年来，相关学者从信息论的角度出发对非高斯随机系统的控制做

了大量的研究，发展了随机分布控制理论的另一分支——（广义）最小误差熵控制。系统跟踪误差的熵越小，其 PDF 越尖越窄，这也属于 PDF 形状控制问题。

受国家自然科学基金（项目编号 61503271，61374052，61511130082）、国家重点基础研究发展计划（973 计划）（项目编号 2011CB710706）、北京市自然科学基金（项目编号 4142048）等项目的支持，从 2011 年开始，本书作者在信息论框架下从解析和数据驱动两方面对非高斯随机系统的控制和滤波问题做了大量的研究工作，并在国际期刊和会议上发表了多篇相关论文。事实上，基于统计信息集（熵、信息势等）的非高斯系统控制和滤波理论已经形成了系统的研究框架。在这一框架下，研究内容主要集中在三个方面：①选择合适的性能指标；②优化算法的选取；③闭环系统稳定性或收敛性分析。但是，将这一新的理论成果应用于实际工业系统时还存在诸多挑战。因此，有必要将现有的研究成果进行总结，整理成专著，方便相关领域研究人员参考和借鉴，进一步完善随机控制理论。

本书是近 5 年来在王宏教授随机分布控制理论基础上采用统计信息对非高斯随机系统的控制和滤波进行研究所得到的最新成果。首先，给出非高斯系统控制及滤波研究的发展概况；接着针对连续和离散两类非高斯系统从解析和数据驱动两个角度在信息论框架下详细研究了控制器和滤波器的设计方法，并对闭环系统的稳定性进行了相应的分析；最后还给出了最新理论成果在实际工业过程中的应用。

为充分理解本书的内容，读者需要了解概率论、信息论、非参数估计、优化控制理论、自适应滤波等相关理论。本书适用于对随机控制和滤波感兴趣的专业人士或是想寻找新的研究思路的科研人员。

本书由任密峰撰写（23 万字），由张建华和王宏统稿。在本书的撰写过程中，作者得到了家人和朋友的大力支持和帮助，在此向他们表示衷心的感谢。同时还要感谢北京航空航天大学郭雷教授、华北电力大学侯国莲教授、台湾中原大学陈荣辉教授对部分章节内容的指导。感谢太原理工大学及信息工程学院领导和同仁的大力支持。作者在书中引用了一些学者的论著及其研究成果，在此向他们表示深深的谢意。

任密峰 张建华 王 宏

2016 年 3 月 14 日

目 录

前言

1 绪论	1
1.1 非高斯系统控制及滤波研究意义	1
1.2 非高斯系统的控制问题	3
1.2.1 基于偏微分方程的 PDF 控制	3
1.2.2 基于随机结构的 PDF 控制	4
1.2.3 基于随机分布控制理论的 PDF 控制	6
1.3 非高斯系统的滤波问题	9
1.4 本书的研究内容	10
2 随机性度量	13
2.1 PDF 及其矩函数	13
2.1.1 随机变量的 PDF	13
2.1.2 矩函数	14
2.2 信息熵	15
2.3 互信息	19
2.4 Fisher 信息	21
2.5 信息散度	22
3 Renyi 熵及其非参数估计	25
3.1 Renyi 熵的定义	25
3.2 二阶 Renyi 熵的估计	28
4 外部噪声非高斯随机系统带约束随机分布控制	34
4.1 模型描述	35
4.2 跟踪误差的 PDF	36
4.3 控制策略设计	36
4.3.1 性能指标的建立	36
4.3.2 带约束的最优控制律设计	37
4.3.3 稳定性分析	38
4.4 数值算例	39

4.5	本章小结	44
5	非线性非高斯两入两出动态随机系统的最小熵控制	45
5.1	问题描述	46
5.2	跟踪误差的 PDF	46
5.3	最小熵控制	48
5.3.1	改进的最小熵性能指标	48
5.3.2	最优控制律设计	49
5.4	稳定性分析	51
5.5	仿真分析	54
5.6	本章小结	58
6	控制输入受限的广义非线性非高斯系统最小熵控制	59
6.1	问题描述	59
6.1.1	广义随机系统模型描述	59
6.1.2	跟踪误差的 PDF 演化方程	60
6.2	最优控制律设计	61
6.2.1	性能指标的建立	61
6.2.2	带约束的最优控制律设计	62
6.2.3	稳定性分析	63
6.3	数值算例	65
6.4	本章小结	67
7	基于广义密度演化方程的多变量非高斯系统随机跟踪控制	68
7.1	问题描述	69
7.2	随机分布控制律	69
7.2.1	跟踪误差的 PDF	69
7.2.2	性能指标	71
7.2.3	最优控制器设计	72
7.2.4	基于统计线性化方法的稳定性分析	73
7.3	数值算例	75
7.4	本章小结	77
8	基于广义密度演化方程的非线性非高斯连续系统最小熵滤波研究	78
8.1	非高斯系统和滤波器模型	78
8.2	估计误差的 PDF	79

8.3	改进的最小熵滤波器	80
8.3.1	基于共轭梯度法的最优滤波增益矩阵	81
8.3.2	均方指数有界性分析	82
8.4	仿真分析	84
8.5	本章小结	88
9	非高斯离散随机系统的滤波器设计	89
9.1	滤波问题描述	89
9.2	基于最小误差熵准则的滤波器设计	90
9.3	基于中心误差熵准则的滤波器设计	93
9.4	数值仿真	94
9.5	本章小结	101
10	数据驱动框架下的非高斯随机系统单神经元自适应控制器设计	102
10.1	单变量系统的单神经元自适应控制	102
10.1.1	单神经元自适应控制器的结构	102
10.1.2	改进的最小熵准则	103
10.1.3	最优控制律及稳定性分析	104
10.2	多变量系统的单神经元 PID 控制	109
10.2.1	问题描述	109
10.2.2	性能指标及 (h, ϕ) -熵估计	110
10.2.3	单神经元自适应控制器设计	112
10.2.4	收敛性分析	114
10.2.5	数值仿真	118
10.3	基于 SIP 准则的单神经元随机预测控制器设计	120
10.3.1	单神经元随机预测控制	121
10.3.2	均方稳定性分析	124
10.3.3	数值仿真	129
10.4	本章小结	131
11	非高斯随机网络化控制系统的最小 (h, ϕ) -熵控制理论及应用	133
11.1	问题描述	134
11.2	最优控制律设计	136
11.2.1	二次性能指标的 PDF	136

11.2.2	广义最小熵控制律设计	137
11.3	网络化直流电机控制系统	137
11.3.1	直流电机的数学模型	138
11.3.2	网络化直流电机控制系统	139
11.3.3	实验结果	140
11.4	本章小结	143
12	非线性非高斯随机系统的多目标优化控制理论及应用	144
12.1	预备知识	144
12.2	问题描述	145
12.3	多目标分布估计算法	146
12.4	仿真分析	147
12.4.1	实验结果	147
12.4.2	有机朗肯循环温度控制系统	150
12.5	本章小结	155
13	结论与展望	157
	参考文献	160

1.1 非高斯系统控制及滤波研究意义

自然界中随机噪声广泛存在,如飞机或导弹在飞行中遇到的阵风,在空间环境中卫星姿态和轨道测量系统中的测量噪声,各种电子装置中的噪声,生产过程中的各种随机波动等。随机系统的控制与滤波一直是系统控制和信号处理领域研究的热点问题。随机控制系统的应用很广,涉及航天、航空、航海和军事上的火力控制系统,工业过程控制,经济模型的控制,乃至生物医学等。随机控制理论的目标是解决随机控制系统的分析和综合问题,维纳滤波理论和卡尔曼-布什滤波理论^[1, 2]是随机控制理论的基础之一。随机最优控制问题的求解依赖于动态规划的概念和方法。对于线性二次型高斯(linear quadratic Gaussian, LQG)随机过程控制问题,包括它的特例最小方差控制问题,可以应用分离原理把随机最优控制问题分解成状态估计问题和确定性最优控制问题,最终能得到全局最优的结果。分离原理是滤波理论和最优控制理论联系的纽带。然而,对于一般的随机控制问题只能得到次优的结果。基于噪声高斯性的假设,随机系统的控制与滤波研究已经取得了大量的理论成果,并被广泛应用到了工程实际中^[3-6]。在研究这些问题时,控制和优化的目标仅仅是系统输出或跟踪误差的均值和方差,这是因为当系统输出或跟踪误差服从高斯分布时,均值和方差可以充分地描述其概率统计特性。

然而,在实际工业过程中,随机输入往往是非高斯的;即使是高斯输入,系统的非线性特性也将使得系统输出服从非高斯分布。在许多优化问题中,目标函数是不对称的,特别是当约束条件存在时,这种情况在加工制造过程中尤其突出。这时,均值和方差不能完全捕捉非高斯概率密度函数(probability density function, PDF)的概率特性,而这种非高斯恰恰反映了随机过程在约束边界附近极其重要的特征。值得注意的是,通常情况下随机过程的行为可以由其 PDF 完全刻画。因此,在分析和设计随机系统时需要研究整个 PDF 的形状。PDF 形状控制是通过选择所研究随机过程的一个特定 PDF 形状作为目标 PDF,选择时需要充分考虑控制策略的精确性和鲁棒性,能适用于一类性能指标函数。

事实上,许多工业系统的输出不是单个的值而是一个分布,这使得 PDF 形状控制策略的研究具有重要的实际意义。输出是一个概率分布的工业过程很多,比如,①聚合过程的分子量分布控制^[7]。聚合物的分子量分布是评估其质量的重要指标,控制的目标是使得分子量分布跟理想的 PDF 形状所匹配。②造纸过程中的二维灰度分布控制^[8, 9]。由于纤维长度和填充物等具有很强的随机特性,网的固体密度分布也是随机的,当采用基于传感器的图像分析时,可以获取纸张二维质量的灰度分布函数,进而得到灰度分布量的 PDF。为了获得好的网状结构,应当选择合适的控制输入使得纤维网的密度分布尽可能地接近均匀分布。③燃烧过程的火焰(温度场)分布控制^[8]。随着图像处理技术的发展,数字摄像机可以用来测量火焰的分布,进一步转化为温度场分布。有效的燃烧是指控制温度场分布形状使得火焰分布形状(通常可表示为一个多维 PDF)跟踪目标分布形状。

另外,用 PDF 控制方法还可以很好地解决高维数据的降维问题。例如,使用主元分析(principal component analysis, PCA)技术可以降低海量数据的维数。这种数据降维的关键思想是:选择少量的主元使得这些主元可以表示原始高维数据的大多数信息。好的主元集合意味着从这些主元恢复的数据尽可能和原始数据接近。因而,数据恢复误差的零均值及最小方差已成为主元分析过程的主要衡量指标。对于非高斯数据,数据降维的恢复误差是非高斯的,因而,主元分析的关键之处在于:选择一组最优主元使得数据降维后的恢复误差跟踪一个具有零均值、服从窄的高斯分布的随机信号。这也是一个 PDF 控制问题,输入为可调的主元,而输出 PDF 是数据降维恢复误差的 PDF。

对于在航空航天、石油化工、社会经济及军事等领域应用广泛的滤波技术来说,非高斯随机噪声使得经典的 Kalman 滤波技术不能满足人们对精度的需求。理想的滤波器设计应该是:设计滤波器增益矩阵使得误差分布是一个窄的高斯分布。这也是一个 PDF 控制问题,输入为滤波器增益矩阵,而输出是滤波器残差的 PDF。因而,最优滤波器的设计目标是:在线调整滤波器增益矩阵,使得滤波器残差的 PDF 跟踪一个零均值、窄的高斯分布。

可以看出,PDF 控制思想可以广泛应用于系统的控制理论研究及工程实践中,解决控制系统与控制工程中的许多重要问题。因此,发展一种能在统计意义下更加充分利用随机变量 PDF 信息的控制和滤波方法是很有意义的。

熵优化与 PDF 形状控制密切相关,因为熵的确定必须归结到系统输出 PDF 的计算。熵越小,闭环随机不确定性就越小,相应的误差 PDF 的形状也就越尖锐。本书旨在采用熵对随机过程的随机性进行刻画,基于广义最小熵准则针对非线性非高斯系统进行控制器和滤波器设计提出一些新的研究思路和研究

究方法。为了建立误差 PDF 的演化过程, 本书提出了基于广义密度演化方程的最小熵控制和滤波方法。进一步针对带有随机时延的网络化控制系统, 提出一种新的控制策略, 并将此应用于网络化直流电机系统; 将多目标优化和随机分布控制相结合给出了多目标分布估计控制算法, 将其应用于有机朗肯循环温度控制系统, 为工程实践提供理论基础和依据。

1.2 非高斯系统的控制问题

对于高斯随机变量, 均值和方差可以完全描述其概率特性(可以确定 PDF 形状, 而 PDF 包含了随机变量的全部信息), 因此高斯随机系统的控制问题主要涉及对均值和方差的控制, 而该方法对于非高斯随机系统则不再适用。这是因为非高斯随机变量的 PDF 不对称, 且可能为多峰形态, 单靠均值和方差不能描述 PDF 的特性, 这就需要对整个 PDF 进行研究。因此, 随机控制系统输出或闭环系统跟踪误差的 PDF 形状控制成为解决非高斯系统控制问题引人注目的研究方向。近年来, 已有国内外学者就随机系统输出 PDF 形状控制开展了一些研究工作。一般来说, PDF 控制方法可分为以下三类: ①基于偏微分方程的 PDF 控制; ②基于随机控制结构的闭环联合 PDF 控制; ③基于随机分布控制理论的 PDF 控制。

1.2.1 基于偏微分方程的 PDF 控制

福克-普朗克-柯尔莫哥洛夫(Fokker Planck Kolmogorov, FPK)方程一般用来刻画随机系统 PDF 的演化过程。连续时间随机过程可以用 Ito 微分方程进行描述:

$$dX_t = b(X_t, t; u)dt + \sigma(X_t, t)dW_t \quad (1.1)$$

式中, $X_t = (x_{1t}, \dots, x_{nt}) \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是由向量值函数 $b(X_t, t; u)$ 的确定性无穷小增量和一个正比于多维维纳过程 $dW_t \in \mathbb{R}^m$ 的随机增量构成。

随机过程的状态通常由其统计分布完全确定, 定义 $\gamma(x, t)$ 是随机过程 X_t 在 t 时刻的 PDF。控制的目标是确定控制输入 $u \in \mathbb{R}^l$ 使得过程从初始分布 $\gamma(x, t_0)$ 演化到目标 PDF $\gamma(x, t)$ 。基于随机系统 (1.1), X_t 的 PDF 演化过程可由如下的 FPK 方程给出^[10, 11]:

$$\frac{\partial \gamma(x, t)}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial b_i(x, t; u)}{\partial x_i} - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 \left([\sigma(x, t) \sigma^T(x, t)]_{ij} \gamma(x, t) \right)}{\partial x_i \partial x_j} = 0 \quad (1.2)$$

为了使得随机过程 X_t 的 PDF 尽可能逼近目标 PDF $\gamma_d(\mathbf{x}, t)$, 采用如下的性能指标函数^[12]:

$$J(\gamma, u) = \int (\gamma(\mathbf{x}, t) - \gamma_d(\mathbf{x}, t))^2 d\mathbf{x} \quad (1.3)$$

至此, 基于 FPK 方程建立的 PDF 控制为研究随机过程的最优控制提供了一个统一的框架。在此框架下, 关于非线性系统稳态下的精确 PDF 求解问题得到了大量的研究^[13-17]。基于滚动时域模型预测控制理论和演化方程的 FPK 模型, 通过最小化给定的性能指标可以得到最优控制律。文献[18]和文献[19]基于上述方法分别研究了一维和多维随机过程的 PDF 形状控制问题。利用无限维系统的最小值原理^[20], 文献[21]研究了状态 PDF 演化过程由 FPK 方程描述的随机系统的最优控制问题, 根据 Hamiltonian 方法得到数值的最优控制律。由于受到稳定性的约束, 文献[22]提出一种基于切换线性控制器的 PDF 形状控制方法, 利用 FPK 方程得到 PDF 的解析解。基于 FPK 方程的 PDF 形状控制方法也可用来解决滤波器设计^[23]和量子系统分析问题^[24]。从 Kolmogorov 方程的角度出发, 文献[25]给出了具有有限维数控制输入的状态 PDF 演化偏微分方程, 进而采用模型预测控制的方法进行控制律设计。

FPK 方程的精确瞬时解只针对一些特殊的一维非线性随机系统可以得到, 然而其精确稳态解却对各种非线性随机系统均能获得。对多自由度耗散 Hamiltonian 系统来说, 这些稳态解可以分为五类。所有这些精确稳态解可作为非线性随机系统跟踪目标静态 PDF 反馈控制的基础。然而, 目前只有一维非线性随机系统的精确稳态解用来设计反馈控制器使得系统输出 PDF 跟踪特定的静态 PDF^[26]。为解决这一问题, 文献[27]在得到多自由度耗散 Hamiltonian 系统精确稳态解的基础上, 针对多维非线性随机系统提出一种新的反馈控制律, 以解决 PDF 的跟踪问题。

上述结果都是在噪声高斯分布的假设条件下得到的。而在实际系统中, 干扰一般都是非高斯的。因此文献[28]利用广义 FPK 方程来处理非高斯宽平稳随机激励下的 n 维非线性动态系统的控制问题。文献[29]针对 Poisson 白噪声激励下的非线性随机系统, 基于广义 FPK 方程设计控制器, 使得系统 PDF 能够很好地跟踪给定的稳态 PDF。

1.2.2 基于随机结构的 PDF 控制

自从 Iwan 和 Jensen^[30, 31]利用随机函数正交分解解决工程问题开始, 随机函数正交分解在有界随机参数结构系统中得到了广泛的应用^[32]。根据正交分解方法, 具有随机结构的系统随机控制问题可转化为确定性系统控制问题。为了

介绍将正交分解用于解决 PDF 形状的控制问题, 定义如下的离散非线性随机过程模型:

$$x_{t+1} = f(x_t, u_t) + \omega_t \quad (1.4)$$

式中, x_t 是状态, u_t 是控制输入, $f(\cdot, \cdot)$ 是解析的非线性函数。加性扰动 ω_t 是独立同分布的随机噪声序列, 其 PDF 定义为 $\gamma_\omega(\omega)$ 。这里采用 Gram-Charlier 级数来逼近 PDF, 级数中的每一项跟该随机变量的累积量有关, 其表达式为

$$\gamma(x) \approx \sum_{i=1}^n c_i h_i(x) N_{\mu, \sigma}(x) \quad (1.5)$$

式中, $N_{\mu, \sigma}(x)$ 是均值为 μ 标准差为 σ 的高斯分布。基函数定义为

$$\Phi_i(x) = (-1)^i \frac{\sigma^i}{\sqrt{i!}} + \frac{d^i N_{\mu, \sigma}(x)}{dx^i} \quad (1.6)$$

展开式 (1.5) 的系数可由下面公式给出:

$$c_i = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \gamma(x) dx, \quad h_i = \frac{\Phi_i(x)}{N_{\mu, \sigma}(x)} \quad (1.7)$$

由于 Gram-Charlier 的系数跟随机变量 PDF 的统计矩是线性关系^[33, 34], 而 PDF 的形状可由其统计矩确定, 从而 PDF 跟踪控制问题可转化为 Gram-Charlier 级数的系数匹配问题。因此, 可以通过最小化如下的性能指标得到最优控制律:

$$\min J_{GC} = \sum_{i=1}^n (c_i - c_{i, \text{target}})^2 \quad (1.8)$$

在上述框架下, 文献[9]、[22]、[35]~[39]研究了静态 PDF 的跟踪问题。针对一阶随机过程, 文献[37]和文献[38]采用 Gram-Charlier 正交分解方法研究了 PDF 的形状控制问题。文献[36]采用线性控制器和 Gram-Charlier 正交分解技术将问题扩展为高阶随机过程进行研究。针对一类具有非二次目标函数的离散随机过程, 文献[35]采用多变量 Gram-Charlier 基函数逼近静态 PDF 设计了最优控制策略, 实现了 PDF 的跟踪控制。

上述控制方法均是基于 Gram-Charlier 展式作为 PDF 的基函数, 设计静态反馈控制律使过程变量的 PDF 跟踪给定的目标 PDF。这种方法仅仅考虑了静态 PDF 跟踪问题, 忽略了 PDF 的时间演化。文献[39]将正交分解技术推广到随机激励下的非线性振荡器动态 PDF 控制问题的研究。该方法采用一系列标准化的多变量正交多项式逼近随机响应的 PDF, 根据 Galerkin 原理将原来的 FPK 方程求解问题转化为具有未知时变系数的一阶微分方程的求解, 从而得到了不确定响应的静态和非静态 PDF。

1.2.3 基于随机分布控制理论的 PDF 控制

上面提到的两种 PDF 控制方法主要存在两个问题：①Ito 类型的微分方程只对白噪声输入有效，不能解决非高斯噪声的问题，且 FPK 方程较难求解；②基于随机结构的 PDF 控制方法没有充分考虑状态 PDF 的时间演化特征。因此，非高斯动态随机系统的输出 PDF 控制问题仍然是随机控制中富有挑战性的研究课题。1996 年开始，英国曼彻斯特大学王宏教授受到造纸工业一个经典案例的启发，提出了一种新的随机控制策略——随机分布控制（stochastic distribution control, SDC）理论^[9]，其控制目标是而非高斯随机系统的输出 PDF。一般来说，随机分布控制理论的研究成果主要可以分为基于模型和无模型（数据驱动）两类。

1. 基于模型的 SDC

1) 神经网络模型

文献[9]采用 B-样条神经网络（neural networks, NN）逼近瞬时可测的输出 PDF，建立神经网络参数（i. e. 权值和偏差）和控制输入之间的动态关系，从而将 PDF 形状控制问题转化为 NN 参数的控制问题。

定义 $y_k \in [a, b]$ 是一致有界系统输出随机变量，其 PDF 为 $\gamma(y, \mathbf{u}_k)$ ； $\mathbf{u}_k \in \mathbb{R}^m$ 是用来控制系统输出 PDF 的控制输入向量。则可以建立输出 PDF $\gamma(y, \mathbf{u}_k)$ 的四种 B-样条模型^[40]：

(1) 线性 B-样条模型^[7, 41-46]

$$\gamma(y, \mathbf{u}_k) = \sum_{i=1}^n B_i(y) w_i(\mathbf{u}_k) + e_0, \quad y \in [a, b] \quad (1.9)$$

式中， $B_i(y)$ 是固定的基函数， $w_i(\mathbf{u}_k)$ 是权值。由于 PDF 是非负的，而通过调节权值建立的模型（1.9）有时会是负值，因此提出了如下的 B-样条模型。

(2) 平方根 B-样条模型^[9, 47-55]

$$\sqrt{\gamma(y, \mathbf{u}_k)} = \sum_{i=1}^n B_i(y) w_i(\mathbf{u}_k) + e_0, \quad y \in [a, b] \quad (1.10)$$

(3) 有理 B-样条模型^[56-59]

考虑到 $\int \gamma(y, \mathbf{u}_k) dy = 1$ ，建立的模型表达式为

$$\gamma(y, \mathbf{u}_k) = \frac{\sum_{i=1}^n B_i(y) w_i(\mathbf{u}_k)}{\sum_{i=1}^n b_i w_i(\mathbf{u}_k)} + e_0, \quad y \in [a, b] \quad (1.11)$$

式中, $b_i = \int_a^b B_i(y) dy > 0$ 。

由于 $\int \gamma(y, \mathbf{u}_k) dy = 1$, 因此只有 $n-1$ 个权值是相互独立的。定义这独立的 $n-1$ 个权值组成的权向量为 $\mathbf{V}_k$, 则权向量和控制输入之间的动态关系可建立为

$$\mathbf{V}_{k+1} = f(\mathbf{V}_k, \mathbf{u}_k) \quad (1.12)$$

从而, 式 (1.9) ~ 式 (1.12) 构成了一般的随机分布控制系统模型, 输入是时变信号, 输出是一个 PDF, 而最优控制律可通过最小化下面的性能指标得到:

$$J = \sum_k \int (\gamma(y, \mathbf{u}_k) - g(y))^2 dy + \mathbf{u}_k^T \mathbf{R} \mathbf{u}_k \quad (1.13)$$

式中, $g(y)$ 是跟踪的目标 PDF。

近年来, 在上述框架下得到了大量的 PDF 最优控制方法。文献[9]最先由可测 PDF 和历史输入的线性组合作为闭环系统的控制输入, 并在此基础上发展了非线性系统的 PDF 控制方法^[51]。进一步, 闭环系统的鲁棒性分析也进行了讨论研究^[9, 42-44, 60]。文献[9]和文献[61]给出了线性权动态系统 $f(\mathbf{V}_k, \mathbf{u}_k)$ 的参数估计方法。另外, 多层传感器网络^[62, 63]和径向基函数^[64-66]也可以用来逼近系统输出的 PDF, 建立权值和控制输入之间的动态关系, 设计最优控制律调节权值, 进而达到 PDF 形状控制的目的。

尽管通过上述方法可以很好地实现 PDF 形状控制, 然而控制器没有固定的结构, 数值算法大大增加了闭环实现的计算量, 也很难对闭环系统的稳定性、鲁棒性等进行分析。为了解决这一问题, 具有固定控制结构[如比例-积分-微分 (proportion integration differentiation, PID)]的随机分布问题得到了大量的研究^[8, 44, 58, 60, 67-73], 控制器参数通过求 LMI 可以得到。这种方法的优点是所有控制器参数可以离线设计, 并可以解决闭环系统的稳定性问题, 建立了基于 LMI 的随机系统分析与综合框架。

2) 输入输出模型

上述基于神经网络模型的 PDF 控制方法存在的主要问题是网络权值模型没有直接的物理意义, 而且当输出 PDF 具有多个峰值、形状比较复杂时, 基函数的数量将非常庞大, 得到的权值模型维数较高, 较难求解。因此, 采用一般输入输出模型进行随机分布控制理论的研究:

$$y_k = f(y_{k-1}, y_{k-2}, \dots, y_{k-n}, \mathbf{u}_k, \mathbf{u}_{k-1}, \mathbf{u}_{k-2}, \dots, \mathbf{u}_{k-m}, \omega_k) \quad (1.14)$$

式中, y_k 是系统输出, $\mathbf{u}_k$ 是控制输入, ω_k 是随机噪声, 其 PDF 为 $\gamma_\omega(x)$ 。利用概率论的知识, 可建立输出 PDF 和输入 $\mathbf{u}_k$ 之间的关系:

$$\gamma(y, \mathbf{u}_k) = \gamma_\omega \left(f^{-1}(\phi_k, \mathbf{u}_k, y) \right) \left| \frac{df^{-1}(\phi_k, \mathbf{u}_k, y)}{dy} \right| \quad (1.15)$$

式中, $\phi_k = [y_{k-1}, y_{k-2}, \dots, y_{k-n}, \mathbf{u}_{k-1}, \mathbf{u}_{k-2}, \dots, \mathbf{u}_{k-m}]$ 。则通过最小化性能指标式(1.13)可得到最优控制律。

上述控制方法可由文献[74]总结给出, 但并没有给出闭环系统的稳定性分析。为此, 文献[75]和文献[76]基于非线性 ARMAX 模型, 通过最小化多步前向非线性累积性能指标得到最优控制律, 并进一步给出闭环系统的局部稳定性条件。对于具有未知概率分布的随机参数非高斯系统, 文献[77]基于可测量的输出 PDF 和输入信号给出一种新的随机参数在线估计方法, 一旦估计出未知参数的 PDF, 可根据文献[78]中的方法得到最优控制律。

熵是随机不确定性的一种度量, 最小化跟踪误差的熵可以最小化其高阶矩。熵越小, 说明系统所含的随机不确定性越小, 相应的跟踪误差 PDF 就越尖越窄。因此, 可通过如下的最小熵准则进行控制器设计^[58, 76, 79-90]:

$$J = - \sum_k \int \gamma(y, \mathbf{u}_k) \log[\gamma(y, \mathbf{u}_k)] dy + \mathbf{u}_k^T \mathbf{R} \mathbf{u}_k \quad (1.16)$$

或者

$$J = - \int \gamma(e, \mathbf{u}_k) \log[\gamma(e, \mathbf{u}_k)] de + \mathbf{u}_k^T \mathbf{R} \mathbf{u}_k \quad (1.17)$$

其中, 式(1.16)和式(1.17)中的第一项分别是系统输出 y_k 和跟踪误差 $e_k = r_k - y_k$ 的香农熵(也可用其他形式的熵代替^[91])。

当输出 PDF 可测时, B-样条神经网络用来逼近输出 PDF, 建立网络权值和控制输入之间的动态关系, 通过最小化性能指标式(1.16)即可得到最优控制输入^[83, 84, 87, 92, 93]。当输出 PDF 不可测时, 可根据式(1.15)获得跟踪误差 PDF 的演化方程, 进而最小化性能指标式(1.17)可得到最优控制律^[88, 89, 94-97]。

2. 无模型(数据驱动)SDC

上述随机分布控制策略都是建立在系统模型基础之上的。然而, 对复杂的工业过程来说, 系统的精确模型很难建立, 这就需要根据可测量的系统输入输出数据给出新的控制器设计方法。神经网络具有逼近任意连续函数的性质, 因此在系统建模中得到广泛的应用, 特别是非线性随机系统的建模^[98, 99]。在随机分布控制框架下, 基于最小熵准则, 文献[100]采用两个神经网络(一个用来建模, 另一个用来构造自适应控制器)研究一般非线性非高斯随机系统的跟踪控制问题, 仿真结果表明该方法具有很好的控制效果。首先利用神经网络建立随机系统的数学模型, 然后在此基础上进行最小熵的最优控制^[72, 86, 100-102], 该方法可