测绘地理信息科技出版资金资助
CEHUI DILI XINXI KEJI CHUBAN ZIJIN ZIZHU

Solving the Gravity Boundary Value Problem with the Border of Ellipsoidal Surface Using Spherical Harmonic Function

用球函数解椭球面为边界的重力学边值问题

骆鸣津 张赤军 著

测绘出版社

测绘地理信息科技出版资金资助

用球函数解椭球面为边界的重力学边值问题

Solving the Gravity Boundary Value Problem with the Border of Ellipsoidal Surface Using Spherical Harmonic Function

骆鸣津　张赤军　著

测绘出版社

·北京·

内容简介

前人将大地水准面上的重力异常作为球面上的边界条件，用球函数解出大地水准面上和地面的扰动位，但与地球是一个椭球体的事实相差太远，因此无法得到地球外部空间点的引力场结果。本书用球函数解椭球面为边界的大地重力学的边值问题，为此导出了椭球坐标与球坐标之间的换算关系，将椭球面上用椭球坐标表示的边界条件换算成用球坐标表示，并换算为调和函数，用球函数方法，把椭球面上的第一、第二、第三边界条件，分别解析延拓到球面上，再用球函数方法，得到椭球面上及其外部空间点的正常重力位、正常重力、正常引力、重力扰动位，以及地球引力，为全面研究地球重力场、引力场开拓了新的思路。

图书在版编目(CIP)数据

用球函数解椭球面为边界的重力学边值问题 / 骆鸣津，张赤军著. —北京：测绘出版社，2016.11
ISBN 978-7-5030-3986-7

Ⅰ. ①用…　Ⅱ. ①骆…　②张…　Ⅲ. ①球函数—应用—重力学—边值观测　Ⅳ. ①O231

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 264797 号

责任编辑　田　力　**封面设计**　李　伟　**责任校对**　孙立新　**责任印制**　陈　超

出版发行	测绘出版社	**电　话**	010—83543956(发行部)
地　址	北京市西城区三里河路 50 号		010—68531609(门市部)
邮政编码	100045		010—68531363(编辑部)
电子信箱	smp@sinomaps.com	**网　址**	www.chinasmp.com
印　刷	北京京华虎彩印刷有限公司	**经　销**	新华书店
成品规格	169mm×239mm		
印　张	7.5	**字　数**	142 千字
版　次	2016 年 11 月第 1 版	**印　次**	2016 年 11 月第 1 次印刷
印　数	001—800	**定　价**	32.00 元

书　号　ISBN 978-7-5030-3986-7

序

欣闻骆鸣津研究员和张赤军研究员的著作《用球函数解椭球面为边界的重力学边值问题》获测绘地理信息科技出版资金资助，并即将出版，作为他们二位的老友又师出同门，除了表示祝贺之外，为新书作序也是责无旁贷。

作者是两位长期从事地球重力学研究的老专家，本书研究用球函数求解椭球面为边界的重力边值问题，对大地测量边值问题而言，是一个值得探讨的新问题。传统的研究都是把地球视为球形，把椭球面的边值问题作为球面边值问题来解，再考虑扁率的改正，这就自然地可以使用球函数作为数学工具，但在理论上是不够严密的。尽管近年来也有个别学者试图直接利用椭球谐函数来解边值问题，不过至今研讨不多。

实际上，球体的引力问题比较简单，但椭球的引力问题却很复杂，即便是匀质旋转椭球表面的引力也不是那么容易求解。

本书是对椭球的引力问题进行深入研究。作者根据椭球坐标与球坐标的换算关系，将椭球坐标表示的椭球边界面上的函数转换为用球坐标表示的边界函数，从而建立了一套以椭球坐标为基础、以球函数作为工具的地球椭球面上的正常位、正常重力，以及外部边值问题的解，具有较高的学术价值。

相信本书的出版有助于有关学者、研究生对这一问题的深入探讨，促进学术繁荣。

许厚泽 院士

2015年12月10日于武昌

前　言

大地水准面是地球表面高程的基准，在国民经济和国防建设中甚为重要，因而引起多方关注。它也是大地重力学(物理大地测量学)主要研究内容之一。1849 年，在斯托克斯(Stokes)理论中，为研究大地水准面的形状，把地球表面的重力异常归算到大地水准面上，将大地水准面作为球面边界面，用球函数级数和球面积分求解大地水准面上的重力扰动位。该理论的最大问题是必须假定边界外部没有质量，而事实上是有质量的，这就不能严格地应用调和函数的边值问题来求解。约 100 年后，Molodensky[1](莫洛坚斯基，简称为莫氏)为改变上述不足，提出了以地球表面(似地形面)为边界面，来研究地球的真实形状。近几十年来，国内外众多学者在解大地重力学边值问题和大地水准面的研究方面做了许多有益工作，并发表了多篇论文。其中，在我国就有 3 本影响大的著作，分别由方俊[2]、许厚泽等[3]和李建成等[4]所写，并付诸应用。

1962 年，本书作者之一的骆鸣津，在对莫氏论文进行了认真学习和思考后，为避免解 Molodensky 问题中的一些困难和不足(如它属于解非线性自由边值问题)，试图用另一种方法来求解扰动位。为此，当年的研究生毕业论文的题目就选为《用球函数解重力测量的基本微分方程》[5]，后于 1965 年该文在科学出版社《测量与地球物理集刊》中问世，由于当时该刊发行量很少，以致后人几乎未见过此文，故在本书中以附录 2 表示。众所周知，用球谐函数解球面边值问题最为方便，该文也以其为工具推导了有关公式，并将所推导的公式在扁率级精度上与莫氏的进行了比较，且在模型上作了验算，其结果也为理想。所推导高程异常公式与莫氏的基本等价，但其中没有莫氏公式中存在自由边界面单层密度位对外法线方向的导数，产生的地球表面倾斜角项。因该项的存在已给许多同行带来了很大的困难，而缺少此项的球函数方法，正是构成该文的一个特色；而另一个特色是可将形状不一的地表观测值解析延拓到地球内部半径为定值的球面上，这对向外部空间的延拓也很方便。值得指出的是，对于这种由地表延拓到内球半径指定值球面上的方法，与国外的 Bjerhammar[6](布耶哈马，简称为布氏)用泊松(Poisson)积分构建虚拟球的原理基本一致，可以认为上述两者是一种不谋而合，只是布氏的文章在 1964 年就发表了。然而，将上述两者比较起来，正如边少锋等在《用地表、低空重力资料解三类大地测量边值问题》[10]文中指出："该方法比布氏用 Poisson 积分法更为方便。"我们曾经也发表过类似的文章，如在《大地测量与地球动力学》《中国科学》《自然科学进展》等杂志上已经刊出，并提出了用球函数级数展开法解椭球体大地测量

边值问题。这样不仅使计算方便,还可以保证所要求的精度,同样可用于正常重力公式的推求,并可由地球椭球面上的重力(位)向外空延拓。至于地表和空间的重力、引力(位)如何推求等,现今尚未发现同行们——包括国外的学者如 Hofman、Moritz[7] 在 2005 年所著的《Physic Geodesy》(物理大地测量学)增订版——对上述问题的探讨。至于如何综合利用空间大地测量资料,如 GPS、LSR 及卫星测高、卫星重力梯度等所提供的边界条件,无论是求解扰动位、扰动重力,还是重力异常,根据该理论和方法都会得到解决。虽然目前重力场模型已进展到 EGM-2008,但是对于高精度、高分辨率地区的重力数据而言,该模型就显得不足,尤其是在我国崎岖不平的高山地区更为稀少。这时,如何运用等效球理论解边值问题更为人们所期待。

本书的中心内容和特点是:一是强调了球函数在解析延拓中的作用,并解决了地面向径 ρ 作为经纬度的已知函数 $\rho(\phi,\lambda)$,代入球函数级数和的公式中时,(与球半径之比)已不是经纬度的球谐函数级数的难题;二是导出了椭球坐标与球坐标之间的换算关系的公式;三是找到了以椭球面为边界面,地球正常重力场的大地重力学边值问题的求解方法;四是找到了以椭球面为边界面,地球异常重力场的大地重力学边值问题的求解方法;五是导出了调和函数的球函数级数表示式与积分表示式之间的换算的方法;六是导出了调和函数三个边界条件,以及在球外边界上与球面边界上相互交叉延拓的方法;七是导出了积分核的球函数级数表示式与积分形式,以及它们相互换算的方法;最后是给出了用球函数级数求取积分核的方法,使之在用椭球面为边界面,与地球异常重力场的重力学边值问题解算与应用等成为可能[9-13]。

由于本书内容比较新颖,富有一定独创性,且与不少人的研究内容有较多的联系,故在该书的撰写与计算过程中,得到所长助理柳林涛、刘成恕、郝晓光等研究员以及张为民高级工程师等的支持和关心;而我们推导的公式占了文稿中的大部分篇幅,又得到田蔚博士帮助对文稿中的公式进行了统一整理和处理;周江存博士对摘要及目录提供了翻译等。

值得一提的是,本书的出版得到了测绘出版社的大力支持;测绘地理信息科技出版资金、中科院测量与地球物理研究所、大地测量与地球动力学国家重点实验室(L2013-03)、国家自然科学基金(40874098)等课题给予了出版资助,作者特在此对上述单位及同人致以诚挚的敬意和衷心的感谢!

最后还得承认,这次出版的内容是在 50 年前作者研究生论文基础上的深入和发展,由于多年来我们未连续从事大地重力学的研究,新知识也知之不多,以致挂一漏万,乃至可能出现错误,敬希读者指教、验证和完善(如还有许多积分核没有求出)。只因我俩的余辉不多,现将近年来已做的工作,奉献给诸位读者,借此以了却心愿,未来的希望一定属于“可畏的后生们”!

目　录

Contents

第1章 综 述

地球是一个近似于旋转椭球形状的天体，用椭球坐标系统表示的椭球函数来解大地重力学的边值问题和地球常重力场的边值问题，是符合情理的。但调和函数的椭球函数级数解 $V(u,\theta,\lambda)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\frac{Q_n^m(u)}{Q_n^m(b)}V_n^m(b,\theta,\lambda)$ 中的 $Q_n^m(u)$ 的表示和计算是浩繁的，不如球函数级数 $T(\rho,\theta,\lambda)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^{n+1}T_n(b,\theta,\lambda)$ 中的 $\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^{n+1}$ 简明。尤其是对解调和函数的边值问题时，求取导数又是计算正常引力和重力异常所必须。$Q_n^m(u)$ 取导数 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}Q_n^m(u)$ 时，涉及递推公式，变成 $Q_n^m(u)$ 增减 n、m 后各项之和。而 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^{n+1}=-\frac{n+1}{\rho_0}\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^{n+2}$ 中的系数 $-\frac{n+1}{\rho_0}$ 为与 ρ 无关的常数。

要用球函数来解以椭球面为边界面的调和函数边值问题，必须找到椭球坐标与球坐标换算关系。必须将用椭球坐标表示的边界函数改换成用球坐标表示的边界函数。当为非调和正则函数时，必须转算成调和正则函数。

在三维空间中已知其形状的封闭曲面 $S(\rho_S,\theta,\lambda)$ 上，如：①已知 S 面上的调和函数 $V(\rho_S,\theta,\lambda)$，即构成第一边界条件；②已知 S 面上的调和函数在垂线（等位面的法线）方向的导数 $\frac{\partial}{\partial\rho}V(\rho,\theta,\lambda)\big|_{\rho=\rho_n}$，即构成第二边界条件；③已知前两者的线性和，即构成第三边界条件。当已知三种边界条件之一时，就可唯一地求出 S 面上及其外调和空间中任一点上的调和函数 $V(\rho,\theta,\lambda)$ 的函数值及其导数。由于不要求确定 S 面内的函数值，故 S 曲面内的质量可任意的分布，只要满足 S 面上边界条件为原来的边界条件即可。在此，在 S 曲面内设置一球面，球面外没有质量，即球外为调和空间，则 S 面上任一点的函数值可以唯一地用球面边界条件求定；反之，球面任一点的函数值可以唯一地用 S 面上的边界条件求定。只要用球面上的边界条件求出 S 面上的值满足 S 面上原来的边界条件，则可认为球面边界条件与 S 面的边界条件是等价的。现在把用数学运算的方法，即将 S 面上的边界条件计算成球面上的边界条件，称为解析延拓，反之亦然。

本书共六章，含三大内容。第一大内容为第 1 章综述，第 2 章椭球坐标与球坐标的关系，是本书的理论基础。第二大内容为第 3 章和第 4 章，讨论地球正常重力场。在讨论正常重力场时设定四个条件：①地球椭球面上的正常重力位为等位面

即它等于常数(可由赤道正常重力或全球平差得到);②地球椭球面的形状为已知,即椭球面的长、短半轴 a、b 为给定值;③地球自转角速度为实测之值;④地球赤道和两极的重力为给定值。还要假定在等效内球的外部空间为调和函数空间。

本书讨论了三个正常重力位模型。

第一是满足①、②、③三个条件。在第 3 章中讨论,由于椭球面上的正常重力位不是调和函数,必须减去椭球面上的离心力位,得到椭球面上的引力位,作为调和函数在椭球面上第一边值问题的边界条件,并把用椭球坐标表示的边界条件改用球坐标表示的边界条件。再解析延拓到 $\rho=b$ 的球面上,展为球面函数,据此外推,得到椭球面上及其外空间任一点的引力和引力位,加上该点的离心力和离心力位,得到椭球面上及其外空间任一点的重力和重力位。我们把本书得到的椭球面上的正常重力公式与通用的正常重力公式作一比较,赤道重力相同时,两极重力相差17 毫伽。

第二是满足①、②、④三个条件。只有改变地球自转角速度才有可能。

第三是在第 4 章中讨论用椭球面上的通用的正常重力公式作为边界条件,减去椭球面上的离心力,得到椭球上的正常引力,作为调和函数在椭球面上第二边值问题的边界条件,并把用椭球坐标表示的边界条件改用球坐标表示的边界条件,将其解析延拓到球面上,得到球面上的正常引力位,并展为球面函数,据此外推,得到椭球面上及其外空间任一点的引力和引力位,加上该点的离心力和离心力位,得到椭球面上及其外空间任一点的重力和重力位。其中,得到的椭球面上的重力位并不等于常数,即满足②、③、④条件的通用的正常重力公式,并不满足①椭球面为正常位等位面的条件。总之,四个条件不能同时满足,只能满足三个条件。

本书第三大内容为第 5 章和第 6 章,讨论大地测量边值问题,即扰动位的边值问题,同样要假定在等效内球外部为调和函数空间。第 5 章讨论用调和函数的球函数级数解的解析延拓方法,解以椭球面为边界的大地重力学的第一、第二、第三边值问题,求出椭球面外及其上的扰动位和纯重力异常。由于椭球面向径 ρ_E 与球半径 b 之差和 $\dfrac{\rho_E-b}{b}$ 是纬度的已知函数,就可将二重面积分化为一重面积分,即可以把积分核的全球定积分预先积出来,这样就与解球面边值问题一样求解,即将边界条件乘以积分核,对全球积分,得到椭球外调和空间的扰动位。

第 6 章用调和函数球函数级数解的解析延拓方法,解以地形表面为边界的大地重力学的第一、第二、第三边值问题,求出地形表面外及其上的重力扰动位和纯重力异常。其方法是将地形表面为边界的边界条件解析延拓到椭球面上,在解析延拓时,把椭球面作为球面,球的半轴为该待算点下椭球面上垂足点处的向径。这是因为解析延拓进行积分计算时,远区域的边界条件和高差对计算扰动位的影响小,故可将椭球面视为球面。然后用第 5 章的方法求出扰动位和纯重力异常。

以上工作是当今对正常重力场和扰动位边值问题较为全面的讨论，至少有如下的现实意义：①求出了严格满足椭球面为正常重力位等位面的正常重力公式，并证明根据索米里安正常重力公式算出的椭球面上的正常重力位不等于常数。②求出地球椭球面上正常重力位等位面上位的具体数值$\overline{U_0}$。③构建了莫洛坚斯基边界条件的基础：地球表面只能测出重力值，如何计算到地球表面测点和测点下面近似地球面上相应点的正常重力值就成了问题（总不能全球都用 0.308 6 H 来计算），本书给出了计算地球表面、近似地球面和外空间任一点正常重力的公式。④能计算水准原点的重力位 W_0，成为构建莫洛坚斯基第一边界问题中边界条件的基础。⑤能求出调和空间任一点的重力位和重力、引力位和引力：本书考虑了地球是椭球体，故求出地球表面及其外空间任一点（乃至高空）的重力扰动位和纯重力异常是接近真实的；加上本书公式计算出该点的正常重力位和正常重力，得到地球外空间任一点的地球重力位和地球重力，因对任一点重力和正常重力中的离心力是相同的；重力扰动位即引力扰动位，因此引力扰动位和纯引力异常也是接近真实的；再用本书公式计算出该点的正常引力位和正常引力，与之相加，就可得到地球外空间任一点的地球引力位和地球引力。

本书推导运算时，有两个成果值得一提：①用 $\dfrac{1}{r}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{\rho_0}\left(\dfrac{\rho_0}{\rho}\right)^{n+1}P_n(\cos\tau)$ 的表示式，可对各种积分核进行推导求定，使之成为 r_0 的函数，r_0 为球面上的待算点与球面上的观测点之间的直线距离。$\dfrac{1}{r}$ 表示式与 $V_n(\theta,\lambda)=\dfrac{2n+1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}V(\theta',\lambda')P_n(\cos\tau)\sin\theta'\mathrm{d}\theta'\mathrm{d}\lambda'$ 一起，可以对正常引力位和重力扰动位的球函数级数表示式与积分表示式之间进行相互转换。②扰动位 $T(\rho,\theta,\lambda)$、重力异常 $\Delta g(\rho,\theta,\lambda)$ 与向径 ρ 乘积 $\rho\dfrac{\partial T(\rho,\theta,\lambda)}{\partial\rho}=\rho\Delta g(\rho,\theta,\lambda)$、重力异常垂直梯度 $\eta(\rho,\theta,\lambda)$ 与向径平方 ρ^2 乘积 $\rho^2\dfrac{\partial^2 T(\rho,\theta,\lambda)}{\partial\rho^2}=\rho^2\dfrac{\partial\Delta g(\rho,\theta,\lambda)}{\partial\rho}=\rho^2\eta(\rho,\theta,\lambda)$ 都是调和函数，将它们代入 $V(\rho,\theta,\lambda)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{\rho_0}{\rho}\right)^{n+1}V_n(\rho_0,\theta,\lambda)$ 公式中，从而得到 $T(\rho,\theta,\lambda)$、$\Delta g(\rho,\theta,\lambda)$、$\eta(\rho,\theta,\lambda)$ 与球面上的 $T(\rho_0,\theta,\lambda)$、$\Delta g(\rho_0,\theta,\lambda)$、$\eta(\rho_0,\theta,\lambda)$ 之间的交互关系。据此，可以将它们交叉求定和解析延拓。

本书推导时遇到的两个关键课题：①能否推导出椭球坐标与球坐标相互换算的关系；②在解析延拓时，将 $\left(\dfrac{\rho_0}{\rho}\right)^{n+1}$ 展为泰勒级数时，要到什么量级才能满足要求。幸好，我们用手工计算的情况下，展到 $\left(\dfrac{\rho_E-\rho_0}{\rho_0}\right)^2$ 级已能基本满足，ρ_E 为地球

椭球面上点的向径。

本书最大的贡献在于：用全新的球函数级数解的方法，解椭球面和近椭球面（地球表面）为边界的调和函数边值问题。目前，大地重力场研讨和应用都把地球视为球形，把椭球面的边值问题作为球面边值问题来求解，当然在理论上还不够严密。按理应该用椭球函数级数来求解，但工作量太大，无法实际应用。本书找到了一个可行的方法，其中，求出满足椭球面为正常位等位面的正常重力公式，既是应用，也检验了本文方法的正确性，为研究地球物理场开辟一条新路。同时，用球函数作为工具进行的解析延拓的原理和方法也得到验证。

第 2 章 椭球坐标与球坐标的关系

§ 2.1 椭球坐标、球坐标与笛卡儿直角坐标的关系

2.1.1 椭球坐标与笛卡儿直角坐标的关系

$$\left.\begin{aligned} x&=\sqrt{u^2+E^2}\cos\beta\cos\lambda \\ y&=\sqrt{u^2+E^2}\cos\beta\sin\lambda \\ z&=u\sin\beta \end{aligned}\right\} \tag{2.1}$$

式中：u 为通过(x, y, z)点所在椭球面的短半轴长度；β 为归化纬度；λ 为经度；E 为两焦点间距离的一半，为常数。式(2.1)中，归化纬度 β 用地理纬度 ϕ 按式(2.32)计算。

2.1.2 球坐标与笛卡儿直角坐标的关系

$$\left.\begin{aligned} x&=\rho\cos\psi\cos\lambda \\ y&=\rho\cos\psi\sin\lambda \\ z&=\rho\sin\psi \end{aligned}\right\} \tag{2.2}$$

式中，ρ 为(x, y, z)球坐标向径，ψ 为地心纬度。

§ 2.2 椭球坐标向径与球坐标的关系

$$\left.\begin{aligned} \rho^2&=x^2+y^2+z^2=u^2+E^2 \\ \rho&=\sqrt{u^2+E^2} \end{aligned}\right\} \tag{2.3}$$

当(x, y, z)点位于地球椭球面上时，有

$$\rho=\rho_E=\rho_E(\beta), \quad u=b, \quad u^2+E^2=a^2 \tag{2.4}$$

式中，ρ_E 为地球椭球面上点的向径，a、b 分别为地球椭球面的长半轴和短半轴。

$$\rho_E(\beta)=(b^2+E^2\cos^2\beta)^{\frac{1}{2}}=b\left[1+\left(\frac{E}{b}\right)^2\cos^2\beta\right]^{\frac{1}{2}} \tag{2.5}$$

$$\rho_E(\beta)=[(b^2+E^2)-E^2\sin^2\beta]^{\frac{1}{2}}=a\left[1-\left(\frac{E}{a}\right)^2\sin^2\beta\right]^{\frac{1}{2}} \tag{2.6}$$

$$\left.\begin{aligned}&\left(\frac{E}{b}\right)^2=\frac{a^2-b^2}{b^2}=\frac{a+b}{b}\ \frac{a-b}{b}=\frac{2}{296.73}\approx 2\alpha\\&\left(\frac{E}{a}\right)^2=\frac{a^2-b^2}{a^2}=\frac{a+b}{a}\ \frac{a-b}{a}=\frac{2}{298.75}\approx 2\alpha\\&\alpha=\frac{a-b}{a}=\frac{1}{298.25}\end{aligned}\right\}\tag{2.7}$$

§ 2.3 归化纬度 $\boldsymbol{\beta}$ 与地心纬度 $\boldsymbol{\psi}$ 的关系

由式(2.1)和式(2.2),有

$$\rho^2\cos^2\psi=x^2+y^2=(u^2+E^2)\cos^2\beta\tag{2.8}$$

在地球椭球面上,由式(2.5)和式(2.8),得

$$\begin{aligned}\rho_E^2\cos^2\psi&=(b^2+E^2\cos^2\beta)\cos^2\psi=b^2\cos^2\psi+E^2\cos^2\psi\cos^2\beta\\&=(b^2+E^2)\cos^2\beta=a^2\cos^2\beta\end{aligned}$$

$$b^2\cos^2\psi=(a^2-E^2\cos^2\psi)\cos^2\beta$$

$$\cos^2\beta=\frac{b^2\cos^2\psi}{a^2-E^2\cos^2\psi}=\frac{b^2\cos^2\psi}{b^2+E^2\sin^2\psi}=\cos^2\psi\left[1+\left(\frac{E}{b}\right)^2\sin^2\psi\right]^{-1}\tag{2.9}$$

$$\begin{aligned}\cos^2\beta&=\cos^2\psi\left[1-\left(\frac{E}{b}\right)^2\sin^2\psi+\left(\frac{E}{b}\right)^4\sin^4\psi-\left(\frac{E}{b}\right)^6\sin^6\psi+\cdots\right]\\&=1-\left(\frac{a}{b}\right)^2\sin^2\psi+\left(\frac{a}{b}\right)^2\left(\frac{E}{b}\right)^2\sin^4\psi-\left(\frac{a}{b}\right)^2\left(\frac{E}{b}\right)^4\sin^6\psi+\cdots\end{aligned}\tag{2.10}$$

$$\cos\beta=\cos\psi\left[1+\left(\frac{E}{b}\right)^2\sin^2\psi\right]^{-\frac{1}{2}}\tag{2.11}$$

$$\begin{aligned}\cos\beta&=\cos\psi\left[1-\frac{1}{2}\left(\frac{E}{b}\right)^2\sin^2\psi+\frac{3}{8}\left(\frac{E}{b}\right)^4\sin^4\psi\right]\\&=1-\frac{1}{2}\left(\frac{a}{b}\right)^2\sin^2\psi-\frac{1}{2}\left(\frac{a}{b}\right)^2\left[\left(\frac{a}{b}\right)^2-\frac{1}{4}\left(\frac{E}{b}\right)^2\right]\sin^4\psi\end{aligned}\tag{2.12}$$

由式(2.1)、式(2.2)和式(2.3),有

$$\rho^2\sin^2\psi=z^2=u^2\sin^2\beta$$

在地球椭球面上,有

$$\rho_E^2\sin^2\psi=(b^2+E^2\cos^2\beta)\sin^2\psi=b^2\sin^2\beta=(a^2-E^2\sin^2\beta)\sin^2\psi$$

$$a^2\sin^2\psi=(b^2+E^2\sin^2\psi)\sin^2\beta\tag{2.13}$$

$$\sin^2\beta=\frac{a^2\sin^2\psi}{b^2+E^2\sin^2\psi}=\frac{a^2\sin^2\psi}{a^2-E^2\cos^2\psi}=\sin^2\psi\left[1-\left(\frac{E}{b}\right)^2\cos^2\psi\right]^{-1}\tag{2.14}$$

$$\sin\beta=\sin\psi\left(\frac{a^2}{b^2+E^2\sin^2\psi}\right)^{\frac{1}{2}}=\sin\psi\left[1-\left(\frac{E}{a}\right)^2\cos^2\psi\right]^{-\frac{1}{2}}\tag{2.15}$$

由式(2.11)和式(2.15),得

$$\tan\beta=\frac{\sin\beta}{\cos\beta}=\frac{\sin\psi\left(\dfrac{a^2}{b^2+E^2\sin^2\psi}\right)^{\frac{1}{2}}}{\cos\left(\dfrac{b^2}{b^2+E^2\sin^2\psi}\right)^{\frac{1}{2}}}=\frac{a\sin\psi}{b\cos\psi}=\frac{a}{b}\tan\psi \tag{2.16}$$

式(2.16)与前人导出的公式相同，证明上列诸公式是正确的。

§2.4　地心纬度 ψ 与地理纬度 ϕ 的关系

令

$$\varepsilon^2=\frac{a^4-b^4}{a^4}=\frac{a^2+b^2}{a^2}\frac{a^2-b^2}{a^2}=\left[2-\left(\frac{E}{a}\right)^2\right]\left(\frac{E}{a}\right)^2 \tag{2.17}$$

$$\tan\psi=\sqrt{1-\varepsilon^2}\tan\phi=\frac{b^2}{a^2}\tan\phi \tag{2.18}$$

$$\sin^2\psi=\frac{(1-\varepsilon^2)\sin^2\phi}{1-\varepsilon^2\sin^2\phi} \tag{2.19}$$

$$\cos^2\psi=\frac{\cos^2\phi}{1-\varepsilon^2\sin^2\phi} \tag{2.20}$$

$$\begin{aligned}\sin^2\psi&=(1-\varepsilon^2)\sin^2\phi(1+\varepsilon^2\sin^2\phi+\varepsilon^4\sin^4\phi)\\&=(1-\varepsilon^2)\sin^2\phi+(1-\varepsilon^2)\varepsilon^2\sin^4\phi+(1-\varepsilon^2)\varepsilon^4\sin^6\phi\end{aligned} \tag{2.21}$$

§2.5　将由 β 表示的函数 $\rho_E(\beta)$ 换算成由 ψ 表示的函数 $\rho_E(\psi)$

将式(2.10)代入式(2.5)中，得

$$\begin{aligned}\rho_E^2(\beta)&=b^2\left[1+\left(\frac{E}{b}\right)^2\cos^2\beta\right]=b^2\left[1+\left(\frac{E}{b}\right)^2\cos^2\psi-\left(\frac{E}{b}\right)^4\sin^4\psi+\cdots\right]\\&=b^2\left[\frac{a^2}{b^2}-\left(\frac{a}{b}\right)^2\left(\frac{E}{b}\right)^2\sin^2\psi+\left(\frac{a}{b}\right)^2\left(\frac{E}{b}\right)^4\sin^4\psi-\cdots\right]\\&=a^2\left[1-\left(\frac{E}{b}\right)^2\sin^2\psi+\left(\frac{E}{b}\right)^4\sin^4\psi-\left(\frac{E}{b}\right)^6\sin^6\psi+\cdots\right]\end{aligned} \tag{2.22}$$

$$\rho_E(\beta)=a\left[1-\frac{1}{2}\left(\frac{E}{b}\right)^2\sin^2\psi+\frac{3}{8}\left(\frac{E}{b}\right)^4\sin^4\psi-\cdots\right] \tag{2.23}$$

$$\rho_E^2(\beta)\cos^2\psi=a^2\left\{1-\left[1+\left(\frac{E}{b}\right)^2\right]\sin^2\psi+\left(\frac{E}{b}\right)^2\left[1+\left(\frac{E}{b}\right)^2\right]\sin^4\psi-\left(\frac{E}{b}\right)^4\sin^6\psi\right\} \tag{2.24}$$

$$\rho_E(\beta)\cos^2\psi=a\left\{1-\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{E}{b}\right)^2\right]\sin^2\psi+\frac{1}{2}\left(\frac{E}{b}\right)^2\left[1+\frac{3}{4}\left(\frac{E}{b}\right)^2\right]\sin^4\psi-\right.$$