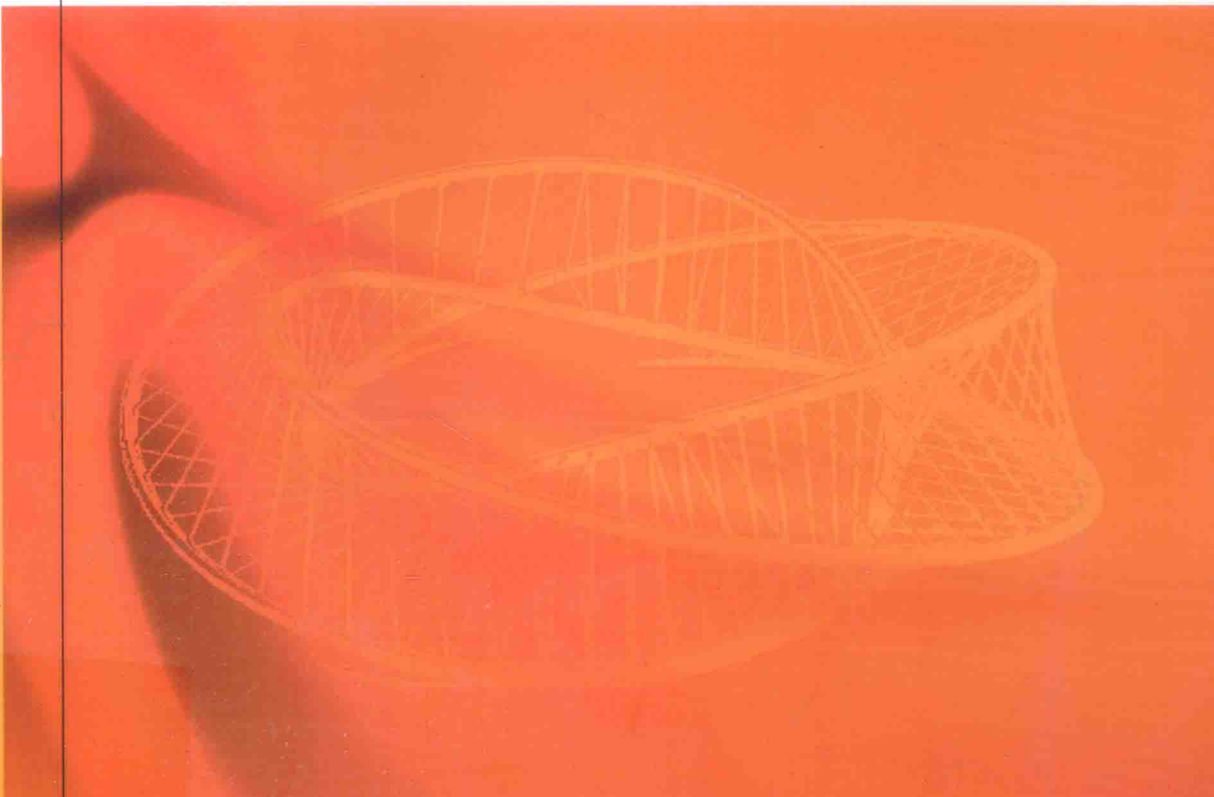
21世纪高等学校数学系列教材

中国大学慕课“数学文化欣赏”指定参考书

（第三版）

数学文化赏析

主编　邹庭荣　沈婧芳　汪仲文



WUHAN UNIVERSITY PRESS
武汉大学出版社

21世纪高等学校数学系列教材

中国大学慕课“数学文化欣赏”指定参考书

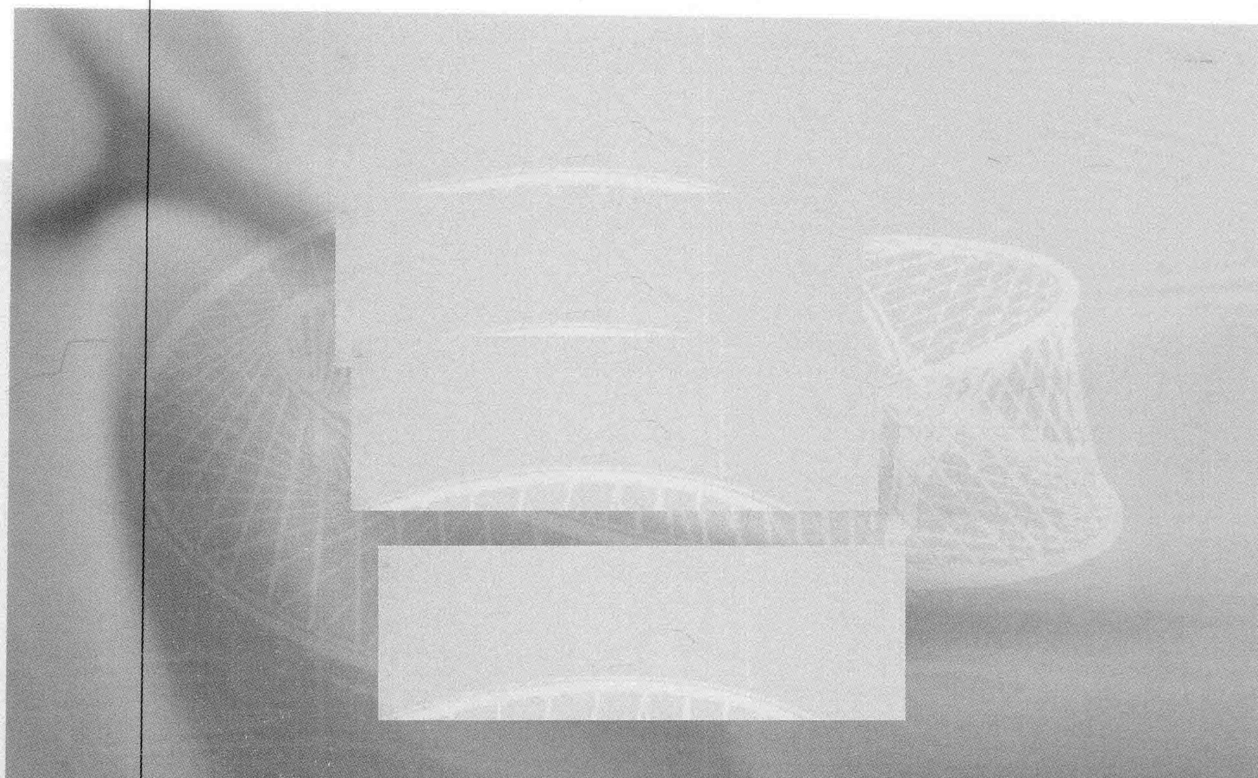
（第三版）

数学文化赏析

■ 主　编　邹庭荣　沈婧芳　汪仲文

■ 副主编　阿吉木·优力达西　徐艳玲　张英豪

■ 参　编　官春梅　宋爱丽　张四保



WUHAN UNIVERSITY PRESS

武汉大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

数学文化赏析/邹庭荣,沈婧芳,汪仲文主编.—3版.—武汉:武汉大学出版社,2016.7
21世纪高等学校数学系列教材
ISBN 978-7-307-18204-2

Ⅰ.数… Ⅱ.①邹… ②沈… ③汪… Ⅲ.数学—文化—高等学校—教材 Ⅳ.O1-05

中国版本图书馆CIP数据核字(2016)第144979号

责任编辑:胡 艳　　责任校对:李孟潇　　版式设计:马 佳

出版发行:武汉大学出版社 (430072 武昌 珞珈山)
(电子邮件:cbs22@whu.edu.cn 网址:www.wdp.com.cn)
印刷:武汉科源印刷设计有限公司
开本:787×1092 1/16 印张:15 字数:364千字 插页:1
版次:2007年11月第1版 2013年2月第2版
2016年7月第3版 2016年7月第3版第1次印刷
ISBN 978-7-307-18204-2 定价:30.00元

第三版前言

本教材自2012年第二版出版以来，国内外教育教学发生了翻天覆地的变化，尤其是慕课的出现，为教育界教学方法的改革注入了新的活力，带来了新鲜血液，我们的“数学文化欣赏”课程也正好赶上这趟奔驰的列车，并于2016年4月在中国大学慕课上线，第一次授课就有超过3000名学员注册学习。本教材是该课程指定的教材和参考书，第三版在第一版和第二版的基础之上并结合慕课的教学内容作了适当的调整，将第1章的部分内容作了适当删减，标题更名为“关于数学文化”；第10章加进了反映慕课内容的数学与艺术欣赏。参加本次修订工作的作者有华中农业大学邹庭荣、沈婧芳、徐艳玲、张英豪，以及喀什大学的汪仲文、阿吉木·优力达西、官春梅、宋爱丽、张四保等。

在第一版和第二版教材的使用过程中，许多读者均提出了很多宝贵的意见和建议，在此表示感谢。第三版教材中难免存在疏漏之处，期待广大读者的批评指正。

作　者

2016年5月

第二版前言

本书第一版于2007年在武汉大学出版社出版，第一版的书名为《数学文化欣赏》，在作者提出本书再版的意向时，本书责任编辑提议将书名改为《数学文化赏析》，我也认为"数学文化赏析"的叫法更贴切，所以就欣然接受了。

本书第一版出版至今得到许多读者和朋友的关心和支持，许多读者来信还提出了许多非常好的意见和建议，尤其是云南大学的张大中老先生，他几乎是逐字逐句地阅读了本书，提出了许多建设性意见和建议，多数意见已经在第二版中有所体现。在此对张先生及所有关心本书的读者表示感谢！

这次修订再版在保持第一版通俗性、趣味性、知识性于一体特色的同时，有下列变化：

1. 根据读者的意见和建议对相关内容作了修改。

2. 增加了几位作者，他们都是我校数学文化团队的主要成员，这些成员在该课程讲授及本书修订再版过程中，做了许多建设性工作。

3. 在每一章后面增加了适量的复习与思考题，供读者阅读时参考。

4. 在本书的最后增加了一个附录：数学与建筑艺术——分析古今著名建筑中的数学思想与数学元素。这部分内容是根据2012年在南京举行的第二届数学文化论坛上作者所作的大会报告整理而成。

2012年8月，作者应中国数学会严加安院士的邀请，在"第二届数学文化论坛"上作了45分钟特邀大会报告，在作此报告之前，花了比较多的精力查阅资料，收集材料。报告的效果比较好，尤其是许多与会代表对报告非常感兴趣(有的还拷贝了PPT)，所以让作者觉得这些材料可能对读者有用，正赶上本书修订再版，故借本书第二版出版之际，将其部分内容整理并作为附录一并出版。

武汉大学出版社的编辑为本书第二版的出版付出了辛勤的劳动，使得本书得以顺利出版，在此深表感谢！

作　者

2012年9月

前　言

从书名就可以知道，展现在读者面前的不是一部数学作品，而是一部文化作品。当然，本书以数学为背景，因此要涉及数学。我们是从欣赏的角度去介绍数学。不仅要使本书易于理解，更重要的是如何品味它、欣赏它，亦即从文化的角度看待它。

之前，作者曾给大学生作过“数学美学欣赏”和“数学文化欣赏”两场报告，均受到热烈欢迎，反应很强烈。从那时起，作者就萌生了开设数学文化课的念头。只是由于缺乏资料可以借鉴，更由于“数学文化”仍是一个有待于深入研究的课题，连名称也有争议，空有想法而已。而今，许多高校都开设了“数学文化”选修课，据说效果很佳。这也坚定了作者在本校开设这门课的决心，把这门课取名为“数学文化欣赏”，是源于那两次讲座的缘故，一是同学们习惯这个名称；二是希望同学们从欣赏的角度去看待数学文化，看待数学文化的美。

说到数学文化，不过是为了强调而已。其实，数学本身就是一种文化，上海教育出版社的叶中豪先生认为：“数学是一种文化，而文化就是要被继承的东西。事实也确实如此：世界上的语言、文字、宗教等都有地域之分，但世界上只有一种数学，数学定理又能万世流传。”按叶中豪先生的说法，数学确实是最具有文化特征的了。

本书是为大学生素质教育通识课而编写的教材，兼通俗性、趣味性、知识性于一体；对于中学生也不失为一部素质训练的好教材或课外读物，对大学、中学数学教师以及数学爱好者也是一部好的教学参考书。我们希望通过本书，能达到下列目的：

给读者一个睿智的数学头脑，丰富他们理性思考世界的方式；

给读者一个好奇的广阔心胸，点燃他们强烈盼望求知的欲望；

给读者一个全新的研究模式，指引他们探索世界奥秘的途径；

给读者一个交叉的学科空间，带领他们寻求发明创造的乐土。

在成书过程中，作者参考了许多相关资料，也得到一些朋友的帮助和鼓励，有的同志甚至提议让作者尽快出版此书，提出了许多有益的建议不说，还提供了部分资料，在此谨向各位表示由衷的感谢！武汉大学出版社的李汉保同志为出版此书付出了辛勤的劳动，使本书得以顺利出版，在此一并致谢！同时，由于作者水平有限以及限于篇幅，读者可能会觉得有些感兴趣的内容没有写进来，疏漏之处，作者期待广大读者批评指正。

作　者

2007 年 8 月

目　录

绪论：关于数学文化

一、 数学文化的内涵

(一)文化的含义

文化问题是随着19世纪下半叶人类学、社会学、文化学等学科的兴起才受到人们的重视的．1871年泰勒在《原始文化》一书中提出了文化的经典定义："所谓文化或文明，就其广泛的民族学意义来说，乃是知识、信仰、艺术、道德、法律、习俗和任何人作为一名社会成员而获得的能力和习惯在内的复杂整体．"现在的文化定义也许有上百种．一般来说，文化有广义和狭义之分．广义的文化，是与自然相对的概念，它是指通过人的活动对自然状态的变革而创造的成果，即一切非自然的，由人类所创造的事物或对象看成文化；狭义的文化，则是指社会意识形态或观念形态，即人们的精神生活领域．

(二)数学文化的含义

1. 数学是一种文化．

数学是一种文化的观点，可以说是数学观的"现在时态"．但若是因为数学与宗教有关，数学像哲学，数学与逻辑是孪生姐妹，数学美具有艺术美的特征等缘故，而给数学贴上文化的标签，这未免太牵强附会了．

那么我们从历史的角度来看，考察人类文明史，数学与文化曾有过三次结合紧密的鼎盛时期，第一次是以毕达哥拉斯(Pythagoras)学派为代表的古希腊时期；第二次是以达·芬奇(Da Vinci)为代表的欧洲文艺复兴时期；第三次是20世纪中叶以来，随着科学一体化、系统化，以及大科学时代的到来和全球文化讨论热，数学与文化的关系受到人们相当的关注．然而，如果据此把数学说成是一种文化，还未免有点牵强，我们必须从数学这门学科自身的特点方面阐释论证．

数学作为一种量化模式，显然是描述客观世界的，相对于认识的主体而言，数学具有明显的客观性，但数学对象终究不是物质世界中的真实存在，而是抽象思维的产物，数学是一种人为的约定的规则系统．为了描绘世界，数学家总是在发明新的描述形式．同时，数学家发明的量化模式，除了在科学技术方面的应用外，同样具有精神领域的效用．如平时所说的推理意识、规划意识、抽象意识、数学审美意识．由此可见，数学就是一种文化．

数学是一门自然科学，也是一种文化．但数学文化不同于艺术、技术一类的文化，数学属于科学文化的范畴．数学是人类文化系统中的一个系统，是人类文化的一个有机组成部分，与其他各种成分密切相关，并在相互影响中共同发展．特别的，数学对象并非自然世界的真实存在，而是抽象思维的产物，是一种人为约定的逻辑建构系统．因此，数学对象正是作为文化而存在，是一种文化，一种特殊的文化，称为"数学文化"．

2. 数学文化的含义.

数学文化的提法与过去的“数学与文化”不同，“数学与文化”意味着数学和文化是两回事，数学是数学，文化是文化，重点是讨论它们的相互关系问题，而“数学文化”则强调的是数学与文化是一个有机整体，不能把它们分开来谈.

数学文化，笼统地说，就是指从文化这样一个特殊的视角对数学所作的分析．关于数学文化的详细定义，就存在许多不同的观点.

数学家齐民友先生从非欧几何产生的历史的角度阐述了数学文化的价值，指出了数学思维的文化意义．他说：“数学作为文化的一部分，其最根本的特征是它表达了一种探索精神．数学作为文化的一部分，其永恒的主题是‘认识宇宙，也认识人类自己’，在这个探索过程中，数学把理性思维的力量发挥得淋漓尽致．它提供了一种思维的方法与模式，提供了一种最有力的工具，提供了一种思维合理性的标准，给人类思想解放打开了道路．”齐民友先生深刻地指出：“没有现代的数学就不会有现代的文化．没有现代数学的文化是注定要衰落的．”“一个不掌握数学作为一种文化的民族也是注定要衰落的．”

张楚廷先生从广义文化学的角度来阐释数学文化，他认为，一般地讲，“文化即人类创造的物质文明和精神文明．数学则既是人类精神文明又是物质文明的产物，尤其要关注到，数学是人类精神文明的硕果，数学不仅闪耀着人类智慧的光芒，而且数学也最充分地体现了人类为真理而孜孜以求乃至奋不顾身的精神，以及对美和善的追求”．他指出，把数学作为一种文化的数学教育功能是多方面的，数学教育“不仅可以使人变得更富有知识、更聪明，而且可以使人更高大、更高尚、变善、变美”.

郑毓信先生在他的论著《数学文化学》一书中阐述：“由于在现代社会中数学家显然构成了一个特殊的群体(可以称为‘数学共同体’)，并有着相对稳定的数学传统．”因此，我们也就可以在所论意义上说，数学是一种文化．即指数学家的“行为方式”，或者说，即指特定的数学传统．他还指出：“数学作为文化的特殊性在于数学对象的形式建构性与数学世界的无限丰富性和秩序性．”

以上关于数学文化的三种解释，前两种倾向于强调数学文化发展的历史性，最后一种则强调了数学活动的整体性，数学共同体和数学传统正是表现了数学文化的整体性．他们都从不同层面揭示了数学的文化本质.

总之，数学文化作为人类基本的文化活动之一，与人类整体文化血肉相连．在现代意义下，数学文化作为一种基本的文化形态应属于科学文化的范畴.

二、数学文化的特点

由文化的定义与数学的特点可知，数学文化是人类文化中的一个相对独立的子文化系统，区别于其他文化．数学文化有以下特点：

(一)独特的研究对象

数学是关于量的科学，而所有文化均离不开量．由此可知，数学的研究对象十分广泛．哲学的十大范畴均有相应的数学研究，如原因与结果，数理逻辑方法；局部与整体，拓扑方法；可能与现实，控制论方法，等等．不仅如此，逻辑学抽象思维，形象思维，直觉思维等均在数学文化的研究范畴之内，甚至人类自身的思维能力(思维限度与思维可靠性)也成为数学的研究对象.

(二)独特的研究方法

数学研究对象的广泛性与独特性决定了数学研究方法的广泛与独特．数学的高度抽象性是连物理学也无法相比较的．如数学模拟，数学实验，公理化方法等，都足以说明数学方法的广泛性．

(三)独特的数学语言

数学语言是世界语，是科学通用语，是可以传授给机器人的一种语言．数学语言的特点是形式化、精确、逻辑严谨和应用广泛．

(四)独特的发展模式

如微积分模式：直观原型式实际问题——数学问题——数学方法——数学理论体系．

(五)独特的价值评判标准

数学独特的价值评判标准体现在数学认识论的数学真理观中，其结论是：数学具有模式真理性与现实真理性．

三、数学文化的功能

数学文化的功能可以概括为以下4个方面：

(一)历史性

一谈到数学文化，人们就很自然地想到数学史．数学发展的历史，不但是一部文明史，而且也是一部文化发展的史书．

人们对数学本质的认识，从作为一种科学的数学，到作为一种哲学的数学，再到作为一种文化的数学，这个变化过程与历史的发展是不能分割的．无论是公元前600年以前的早期数学，还是公元前600年到公元300年之间的古希腊数学，作为一门有组织的、独立的和理性学科的数学，不管它发展到怎样的程度，都离不开历史的积淀过程，即数学的社会历史性．研究数学史，可以增强全局观念，提高人们的学习兴趣．学习数学要讲究其方法，而数学史又为数学方法论的研究提供了最主要的素材．比如数学中“函数”这一概念在数学发展史上就经历了7次扩张，在每一次扩张中，随着科学的发展和社会的进步，由于需要不断地扩大函数的范围，直到形成今天严密、科学而又令人惊叹的广泛的函数概念．因此，一切与数学有关的研究，无论怎样也不能丢开数学史．数学传统的不断变革及数学知识的连续性，就可以看成数学发展的一个重要特征．

(二)思维性

数学研究的任务，主要是总结和应用人类关于现实世界的空间形式与数量关系的思维成果．因此，数学是思维的体现，思维是数学的灵魂．数学思维的素质有严谨性、灵活性、独创性、深刻性、目的性、概括性、主动性、批判性、论证性、条理性、简明性、敏捷性等．

数学文化的主体是数学知识以及运用这些知识的技巧与技能，它们都要通过数学语言表示出来并获得理解、掌握、交流和应用．数学语言包括文字语言、符号语言和图像语言，它们同样拥有基本词汇、基本句型、基本句法和基本图形；并且，通过听、说、读、写、译这五种形式来实现数学信息的吸收、输出和转换．与其他语言不同的是，运用数学语言时，人们进行的是关于实体的空间形式与数量关系的思维活动．这种思维成果以理性的逻辑思维为主，以所考察的实体为基础．在数学知识中，数学思想和数学方法是最活跃

的成分，它们成为数学知识的精髓．所谓“掌握数学”，实际上就是“掌握基本的数学思想和数学方法”，即数学的思维．这种思维集中地凝聚了人类对空间形式与数量关系的规律性的认识，并且始终随着数学的发展而发展．

(三)预见性

数学来自实践，但数学主要总结与应用了人类关于现实世界的空间形式和数量关系的思维成果，因此，这种思维成果就带有开发性和预见性，也就是说，数学能指导、调控人类未来的实践活动．

例如，1846 年 9 月 18 日，柏林天文台在黄经 326 度处的宝瓶座内黄道上，发现了海王星，其椭圆形轨道与位置完全符合勒威耶、亚当斯两人分别于 1844 年、1845 年得到的计算结果．1847 年，英国数学家、逻辑学家布尔和狄·莫根两人创立了逻辑代数．当时谁也不知道逻辑代数有什么用途，谁能料到，自 1946 年第一台电子计算机问世后，逻辑代数竟成了自动化系统和计算机科学的奠基石．上述例子说明，数学作为一种科学，可以有很大的贡献，同时数学也可以预见自身甚至别的科学的发展．

(四)审美性

数学内容充满着美感．数学既是一门纯科学，同时又是一门艺术．数学是美的王国，数学概念的简洁性、统一性、协调性、对称性等都是数学美的内容．数学美的内容是丰富的，不仅有形式美，而且有严谨美；不仅是逻辑抽象美，而且是创造美和应用美．

早在公元前 6 世纪，毕达哥拉斯学派对数学在概念上就没有作严格的区分，他们提出了“美是和谐”的思想，把数与和谐的原则当做宇宙万物的根源，用数学和声学的观点去研究音乐的节奏与和谐．他们提出的“黄金分割”理论，将这些原则运用到建筑、绘画、音乐等各门艺术中．在那时，作为美学鼻祖的毕达哥拉斯本身就是一个数学家、物理学家、天文学家，同时又是艺术家的群体．在我国古代，数学也被融入了艺术之中，成为“礼、乐、射、御、书、数”六艺之一．数学的美感和数学的艺术特征，正是数学文化对人类高尚情操陶冶的具体表现．我们应该深入挖掘和精心提炼，从而使我们从数学的学习中去感受美、理解美、鉴别美、创造美．

四、数学是人类文化中最重要的一种文化

(一)从内在结构看：数学是一个相对独立的系统

第一，数学是关于量的科学，数学研究为人类提供了通过量的分析来把握事物的可能性与现实性．同时，也造就了人类通过量来把握质的科学态度．

第二，数学理论是严密的演绎系统．对数学的研究养成了人类做事的有条理的习惯，同时也造就了人类逻辑推理与理性分析问题的能力，推动了人类智力的发展和理性的形成．推理手段是人类理解大自然的最重要的思维手段．智力是人类最重要的思维能力．心理学家通过实验得出：人的智力与人的推理能力相关系数达到 0.89．这等于告诉人们数学是培养人智力的最好材料．数学素质是鉴别人智力素质的重要指标．难怪柏拉图说：“不懂几何学的人不得入内．”

第三，数学研究的原始动力源于现实，但纯数学早已远离了现实，“数学的本质在于自由”．数学的本质在于创造．今天，纯数学研究的动力主要来自于美，数学体系自身的完善需求与人的审美心理的需求推动着纯数学的发展．数学中蕴藏着无限丰富的美，对数

学的研究促使了人的审美能力与创造能力的极大发展.

(二)从外在环境看：数学是一个开放体系

第一，数学语言是科学的语言，数学方法是科学的方法(逻辑方法，实验方法与计算机计算方法). 数学是科学理论美的原因(形式美，结构美)，科学因为数学而成为科学.

第二，数学是艺术美的重要原因之一. 无论从音乐、诗歌、绘画、戏剧、雕塑、建筑等哪一方面看都会发现这一事实. 如：电脑，一切归于 0 和 1；舒心的声音、醉人的韵律、悦人的光泽、光滑的质地、美丽的形式、和谐的结构，无一不是数学.

第三，数学已渗透于人们日常生活的各个方面. 在人们的政治、经济、文化、娱乐生活中，哪一样不与数学相关?!

今天的数学，已经深入到生活的各个角落，不仅给人们带来了物质文明，也极大地影响了人们的思想、观念及生活方式. 数学促成了现代的精神文明，促成了人类的自信，促成了人类对世界、对未来的希望. 所以，可以毫不夸张地说，数学文化是人类诸文化中的最重要的一种文化.

第1章 数论与数学文化

数学——数的科学，没有数，就没有数学．同时，数学文化在很大程度上是数字的文化．本章讨论作为数学文化的重要组成部分的数论文化．

自然数(又称正整数)、整数、有理数、实数及复数构成数的结构．数学中所讨论的问题几乎都与数有关，而其中数字的诸多优美及特异的性质，一直吸引着许多职业数学家及业余数学家去探讨，形成了一门独特的数学文化．这类探讨的问题可以归于数学中的整数论，或者说数论的问题．数论起源甚早，影响深远．数论中优美及其丰富的内容，不知倾倒了多少数学家及数学爱好者，如三大数学家之一、有着数学王子之称的数学家高斯(Gauss，1777—1855)，另两位是阿基米德(Archimedes，公元前287—公元前212)及牛顿(Newton，1642—1727)．牛顿曾说“数学是科学的皇后”，而数论是数学的皇后(mathematics is the queen of the sciences，and the theory of numbers is the queen of mathematics)．

下面给出一些数论的初步知识．

1.1 数论预备知识简介

闵可夫斯基(H. Minkowski)说：整数是全部数学的基础．每个人最初接触的都是正整数——自然数．为了看清楚数字与数学文化的联系．这里先简要介绍数论(数字的理论)的相关知识．

1.1.1 关于数论

数论是研究整数性质的一门数学分支．数论包括初等数论、解析数论、代数数论、丢番图(Diophantus，公元250年左右)逼近、超越数论等．现代数论已经深入到数学的一切分支．

数学王子高斯说：“算术给予我们一个用之不尽的、充满有趣真理的宝库．”这些真理不是孤立的，而是以相互最密切的关系并立着的，而且随着科学的每一成功的进展，人们不断地发现这些真理之间的新的、完全意外的接触点．

事实上，初等数论以算术方法为主要方法．初等数论中某些问题的研究促成新的数学分支的产生．近数十年来，初等数论在计算机科学、组合数学、代数编码、计算方法、信号的数字处理等领域得到广泛的应用．

数论的特点是表面简单，实际难．所谓表面简单，是因为数论的主要定理的表达都不难理解，但证明起来，却需要极其艰深和复杂的数学工具，比如费尔马猜想、哥德巴赫猜想．这里必须指出，研究经典数论问题必须具有坚实的数学基础，否则会劳而无功，浪费

时间.

1.1.2 数论的基本知识

(1)正整数、负整数、零统称为整数.

(2)b 被 $a(a\neq0)$ 除时，如果余数是0，即存在整数 q，使得 $b=aq$，则称 a 整除 b，或者 b 可以被 a 整除，记作 $a\mid b$，此时也称 b 是 a 的倍数，a 是 b 的因数.

(3)大于1且除了1和其自身外无其他因数的整数称为素数(或质数)，1以外的非素数称为合数.

(4)将整数表示为一些素数的乘积称为该数的素因数分解.

(5)整数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的公共倍数称为 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的公倍数. 最小的正公倍数称为最小公倍数，记为 $[a_1, a_2, \cdots, a_n]$.

(6)整数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的公共因数称为 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的公因数. 最大的公因数称为最大公因数，记为 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$.

(7)当 $(a, b)=1$ 时，称 a 与 b 互素.

(8)设 m 为正整数，若整数 a 与 b 之差可以被 m 整除，称 a 与 b 关于模 m 同余. 记作 $a\equiv b(\bmod m)$.

(9)不大于 a 而与 a 互素的数的个数称为 Euler 函数.

(10)(算术基本定理)每个大于1的整数要么是素数，要么是若干素数的乘积，一个数的素因数分解式是唯一的.

这说明分解的方法可以是多种多样的. 特别对大合数更是如此. 但一个重要的事实是，不管这种素因数分解是如何实现的，除了这些因数的次序外，所得的结果总是一样的，即在同一个数的任意两个素因数分解中，素数是相同的. 且每个素数均出现相同的次数.

例
$$60=4\times15=2\times2\times3\times5$$
$$60=30\times2=15\times2\times2=3\times5\times2\times2$$

(11)(欧几里得算法)设 a, b 为两个整数($a\geqslant b$)，则存在两数 q，$r\geqslant0$，使得
$$a=bq+r$$
其中，$r=0$ 或 $r<|b|$.

1.2 数字美学欣赏

数字中许多颇具魅力、令人叹赏的性质，使得许多科学家、文学家、艺术家们大为感慨. 伽利略曾说：“数学是上帝用来书写宇宙的文字.”毕达哥拉斯学派的学者，对于数字的崇拜达到“神话”的程度，他们崇拜“4”，因为“4”代表四种元素：火、水、气、土；他们把“10”看成是“圣数”，因为“10”是由前四个自然数1、2、3、4结合而成；他们还认为：“1”表示理性，因为理性是不变的；“2”表示意见；“4”代表公平，因为4是第一个平方数；“5”代表婚姻，因为5是第一个阴数2与第一个阳数3的结合. 近年来，人们喜欢数字“8”，是因为8意味着“发”，也有人喜欢“6”，因为6意味着“六六大顺”. 人们不惜出高价抢注末尾是“8”或“6”的汽车牌号、移动电话号码等. 可见，数字中蕴涵着丰富的

文化．不过，这只是一些表面现象，深入一点研究它们的性质，人们会为数字王国的奇妙而赞叹不已.

1.2.1 亲和数(也叫相亲数)

远古时代，人类的一些部落把220和284两个数字奉若神明，男女青年结缔婚姻时，往往把这两个数字分别写在不同的签上，两个青年在抽签时，若分别抽到了220和284，便被确定为终身伴侣；若抽不到这两个数，他们则天生无缘，只好分道扬镳了．这种缔婚方式固然是这些部落的风俗，但在某些迷信色彩的背后，倒也有些说道．表面上，这两个数字似乎没有什么神秘之处，然而，它们却存在着某些内在的联系：

能够整除220的全部正整数(不包括220)之和恰好等于284；而能够整除284的全部正整数(不包括284)之和又恰好等于220.

这真是绝妙的吻合!

也许有人认为，这样的"吻合"极其偶然，抹去迷信的色彩，很难有什么规律蕴涵于其中．恰恰相反，这偶然的"吻合"引起了数学家们极大的关注，他们花费了大量的精力进行研究、探索，终于发现"相亲"数对不是唯一的，它们在自然数中构成了一个独特的数系．人们称具有这种性质的两个数为亲和数(或相亲数对).

第一对相亲数(220，284)是最小的一对，是数学先师毕达哥拉斯发现的：

$$1+2+4+5+10+11+20+22+44+55+110=284$$

$$1+2+4+71+142=220$$

这两个数的这一性质，引起了毕达哥拉斯的极大兴趣，他把这两个数比做一对亲密的恋人，称它们是亲和数．是否还有别的亲和数呢?

2000多年后，第二对相亲数(17296，18416)于1636年由法国天才数学家费尔马找到．

第三对相亲数(9363548，9437056)于1638年被法国数学家笛卡儿(R. Descartes)发现．

1750年，瑞士伟大的数学家欧拉一个人就找到了60对相亲数对，并将其列成表，(2620，2924)是其中最小的一对．当时，人们有一种错觉，以为经过像欧拉这样的大数学家研究过，而且一下子找到60对亲和数，在比该表中所找到亲和数小的正整数中不会再有亲和数了．然而，偏偏出人意料，有一对比该表中所列亲和数更小的亲和数，竟在大数学家的眼皮下溜过去了．100多年后，意大利16岁的少年巴格尼于1860年找到了一对比欧拉的亲和数表所列的数更小的亲和数对(1184，1210)，于是，这个本来已经降温的问题又重新点燃了人们的热情，在比欧拉的亲和数表中所得的数更小的自然数中是否还有亲和数?到1903年，有人证明了最小的5对亲和数是：

220和284，1184和1210，2620和2924，5020和5564，6232和6368

其中，第一对为毕达哥拉斯发现，第二对为意大利少年发现，其余三对则是欧拉的亲和数表中最小的三对.

今天亲和数的研究仍在继续，主要有两方面的工作：

(1)寻找新的亲和数；

(2)寻找亲和数的表达公式.

迄今为止，人们已经找到了1200对亲和数，这1200对亲和数要么两个都是偶数，要么两个都是奇数，是否存在一奇一偶的亲和数呢？这个问题是欧拉提出来的，几百年来尚未解决．人们估计这是一个像哥德巴赫猜想那样困难的问题.

到1974年为止，人们所知的一对最大的亲和数是：

$$3^4 \cdot 5 \cdot 5281^{19} \cdot 29 \cdot 89 \cdot (2 \cdot 1291 \cdot 5281^{19}-1)$$
$$3^4 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 5281^{19}(2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 1291 \cdot 5281^{19}-1)$$

从两个数字的偶然性竟然引出了数论中一个丰富的数系，这确实令人惊叹不已！

最近，人们把亲和数对推广成亲和数链．链中每一个数的因数之和等于下一个数，而最后一个数的因数之和等于第一个数，比如2115324，3317740，3649556，2797612等.

还有学者把亲和数推广到“金兰数”，即数组中第一个数的所有真因数之和等于第二个数与第三个数之和；第二个数的所有真因数之和等于第一个数与第三个数之和；而第三个数的所有真因数之和等于第一个数与第二个数之和．简而言之，每个数的真因数之和都等于另两个数之和．例如：1945330728960，2324196638720，2615631953920.

目前所知最小的金兰数是123228768，103340640，124015008.

1.2.2 完全数(完美数)

与亲和数类似具有奇妙特征与神秘意义的数是完全数．在古希腊，毕达哥拉斯学派在一些数字中，发现一完美的性质，这些数是其除自身外的一切正因数之和．他们称这种数为完全数．如6，小于6的正因数有1、2、3，而6=1+2+3. 6也确实与宗教里面的一些完美性相关联，在西方《圣经》里记载，上帝在6天内创造世界，因此，古代人认为6是一个很完美的数字；28是第二个完全数，28=1+2+4+7+14.

随后，496=1+2+4+8+16+31+62+124+248；可见496是完全数．类似地，第四个具有这种性质的数是8128，这个数是早在1800多年前就为人所知．看来，完全数不多．前8000多个正整数中才4个．物以稀为贵，完全数非常稀罕.

完全数即完美数，人们用美来形容完全数，表明这种数的完美．一方面表现在这种数稀罕、奇妙；另一方面表现在这种数的完满．各因数之和不多不少等于这种数本身，第5个完美数在哪里？在距离发现第四个完美数之后1000多年，于公元1538年终于发现了第5个完美数33550336. 又过了50年才发现第6个完美数8589869056.

寻找这种数那么难，却还有人去寻找，到现在为止，也只发现了20余个.

欧几里得发现，前四个完美数皆可以表示为$2^{n-1}(2^n-1)$的形式：

当$n=2$时，$2^1(2^2-1)=2\times3=6$

当$n=3$时，$2^2(2^3-1)=4\times7=28$

当$n=5$时，$2^4(2^5-1)=16\times31=496$

当$n=7$时，$2^6(2^7-1)=64\times127=8128$

欧几里得也看出，当$n=2, 3, 5, 7$时，2^n-1是素数．这项观察使得他在《几何原本》一书中证明了下述结论：

若2^n-1为素数，则$2^{n-1}(2^n-1)$为一完全数.

同时，我们还有下述结论：

对每一个正整数n，若2^n-1为素数，则n为素数.