



龚冬保教授考研数学

2006 版

数学 考研 典型题

数 学 二

龚冬保 魏战线 张永怀 魏立线



西安交通大学出版社
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY PRESS

(2006 版)

数学考研典型题

考卷分析·应试对策·全真模拟

(数学二)

龚冬保 魏战线

张永怀 魏立线

西安交通大学出版社

· 西安 ·

内 容 简 介

本书自1999年问世以来,2006版是最新修订版,也是本书第7版.在本书问世后的6年中,每年均以高分覆盖当年考题,深受考生欢迎.例如在2000年考研中,书中36道题命中考题中非客观题(大题)27道(次)(数学一,8题49分;数学二,7题44分;数学三,6题41分;数学四,5题44分);2000年修订后的第2版中相似题覆盖2001年考题66道(次)332分(数学一68分,数学二90分,数学三83分,数学四91分);2001年修订后的2002版中覆盖2002年考题338分(数学一87分,数学二91分,数学三81分,数学四79分);2002年修订后的2003版中覆盖2003年考题561分(数学一142分,数学二139分,数学三142分,数学四138分);2003年修订后的2004版覆盖2004年数学一试卷136分;2004年修订后的2005版(数学二分册)覆盖2005年数学二试卷135分.

本书由四部分组成:第一部分是考卷分析:对新“考试大纲”问世后2003~2005年的数学考研考卷作了列表分析,将每套考卷的内容覆盖、数学能力、认知水平及难度都量化了;第二部分是应试对策:讲的是复习备考及身临考场的策略;第三部分是典型题选讲与练习:选了1500余道题,其中500多道例题(包含了往届的考题),讲解采用分析、注释、一题多解等讲法,讲解解题的方法与技巧,所有练习题均给出了答案与提示;第四部分是考题分析:龚冬保教授每年都有一篇专文,深入剖析当年的试题,指出命题的动向.另外,附录中收录了2003~2005年考研试卷.

本书可供准备考研的读者使用,也可供大学数学教师参考.

如有建议和意见,请与本社联系. Email: xjtup_kysx@126.com

图书在版编目(CIP)数据

数学考研典型题—2006版(数学二)/龚冬保等编著.
—7版(修订版).—西安:西安交通大学出版社,2005.4
ISBN 7-5605-1968-7

I. 数… II. 龚… III. 高等数学—研究生—入学考试—解题 IV. O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 025299 号

- | | |
|------|-----------------------------|
| 书 名 | 数学考研典型题—2006版(数学二) |
| | 考卷分析 应试对策 全真模拟 |
| 编 著 | 龚冬保 魏战线 张永怀 魏立线 |
| 出版发行 | 西安交通大学出版社 |
| 地 址 | 西安市兴庆南路25号(邮编:710049) |
| 电 话 | (029)82668357 82667874(发行部) |
| | (029)82668315 82669096(总编办) |
| 印 刷 | 西安交通大学印刷厂 |
| 字 数 | 505千字 |
| 开 本 | 787mm×1092mm 1/16 |
| 印 张 | 18.125 |
| 版 次 | 2005年4月第7版 2005年4月第2次印刷 |
| 书 号 | ISBN 7-5605-1968-7 / O·224 |
| 定 价 | 27.20元 |

从 2005 年考研的数学试题谈起

(代 2006 版前言)

本书至今不觉已出到第 7 版了,用本书的“典型题”、“典型的解题方法”与每年的四套考研的数学试卷对比,两者极相似的题都在 90% 左右. 这并不奇怪,原因是我们能“紧扣大纲”、认真分析历年考卷,精选典型例题,突出讲解一些重要的解题思路、方法和技巧,不少题采用多种解法,有利于训练解题的灵活性.

以下围绕 2005 年四套考卷中的典型试题,详细分析它们的解法及出题动向,以帮助考研同学做好数学的复习.

一、填空题仍强调考基本运算

2005 年填空题的运算步骤更简单,但又有几个更灵活的题,举例如下:

例 1 (数学三、四) $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{2x}{x^2 + 1} = \underline{\hspace{2cm}}$.

解 应填 2. 当 $x \rightarrow \infty$ 时,只要直接用等价无穷小替换 $\sin \frac{2x}{x^2 + 1} \sim \frac{2x}{x^2 + 1}$,便可得:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \frac{\sin 2x}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \cdot 2x}{x^2 + 1} = 2.$$

例 2 (数学一、二) (1) 曲线 $y = \frac{x^2}{2x + 1}$ 的斜渐近线为 .

(2) 曲线 $y = \frac{(1+x)^{3/2}}{\sqrt{x}}$ 的斜渐近线为 .

解 (1) 只要用除法: $\frac{x^2}{2x+1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2x^2 + x - \frac{1}{2}(2x+1) + \frac{1}{2}}{2x+1} = \frac{x}{2} - \frac{1}{4} + o(1)$. 故,斜渐近线为: $y = \underline{\frac{x}{2} - \frac{1}{4}}$.

(2) 注意 $x > 0$, 因此 $\frac{(1+x)^{3/2}}{\sqrt{x}} = x(1+\frac{1}{x})^{3/2} = x + \frac{3}{2} + o(1)$. 用的是泰勒公式. 斜渐近线为: $y = x + \underline{\frac{3}{2}}$.

例 3 (数学二) $x \rightarrow 0, \alpha(x) = kx^2$ 与 $\beta(x) = \sqrt{1+x\sin x} - \sqrt{\cos x}$ 是等价无穷小, 则 .

解 本题最好的方法是用泰勒公式:

当 $x \rightarrow 0$ 时, $(1+x\sin x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x\sin x + o(x^2) = 1 + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$

$$\sqrt{\cos x} = [1 + (\cos x - 1)]^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}(1 - \cos x) + o(x^2)$$

$$= 1 - \frac{1}{4}x^2 + o(x^2).$$

故 $\beta(x) = \frac{3}{4}x^2 + o(x^2)$. 从而填: $k = \frac{3}{4}$. (以上解题方法是本书最强调的)

例 4 (1) (数学三、四) 方程 $xy' + y = 0$ 满足 $y(1) = 2$ 的特解为_____.

(2) (数学一、二) 方程 $xy' + 2y = x \ln x$ 满足 $y(1) = -\frac{1}{9}$ 的解为_____.

解 (1) 原方程即 $(xy)' = 0$, 故 $xy = c$. 代入 $y(1) = 2$, 得 $c = 2$. 故特解应填: $xy = 2$.

(2) 原方程即 $(x^2y)' = x^2 \ln x$. 由 $y(1) = -\frac{1}{9}$ 得

$$x^2y = \int_1^x x^2 \ln x dx - \frac{1}{9} = \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^3}{9}. \text{ 故填: } y = \frac{x}{3} (\ln x - \frac{1}{3}).$$

以上两题并未套一阶线性方程解的公式, 只要微积分熟悉便可. 这是本书介绍的独特方法.

例 5 (1) (数学三、四) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 均为 3 维列向量, 记 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $B = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + 2\alpha_2 + 4\alpha_3, \alpha_1 + 3\alpha_2 + 9\alpha_3)$. 如果 $|A| = 1$, 那么 $|B| =$ _____.

(2) (数学三) 设行向量组 $(2, 1, 1, 1), (2, 1, a, a), (3, 2, 1, a), (4, 3, 2, 1)$ 线性相关, 且 $a \neq 1$. 则 $a =$ _____.

解 (1) 只要知 $B = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix}$.

故 $|B| = |A| \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 6 \end{vmatrix} = 2$. 填: 2. (本题用到矩阵分块乘法, 较灵活).

(2) 只要计算行列式

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & a & a \\ 3 & 2 & 1 & a \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1-a & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1-a \end{vmatrix} (a-1) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & a & 1-a \end{vmatrix} (a-1) \\ = (1-a) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a & 1-a \end{vmatrix} = (1-a)(1-2a).$$

$a \neq 1$, 故 $a = \frac{1}{2}$. 填 $\frac{1}{2}$.

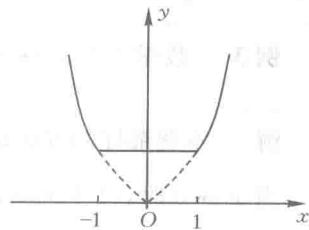
二、选择题加强了对基本概念考查

例 6 (数学一、二) 设 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + |x|^{3n}}$, 则 $f(x)$ ()

- (A) 处处可导 (B) 恰有一个不可导点
(C) 恰有两个不可导点 (D) 至少有三个不可导点

解 首先 $f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1 \\ |x|^3, & |x| > 1 \end{cases}$ 在 $|x| = 1$ 两点均不可

导. 选(C). (用我们强调形数结合的方法, 作出 $y = f(x)$ 图像, 便一目了然)



例 6 图

例 7 (数学一、二) 设 $F(x)$ 是连续函数 $f(x)$ 的一个原函数, 则必有()

(A) $F(x)$ 是偶函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是奇函数.

(B) $F(x)$ 是奇函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是偶函数.

(C) $F(x)$ 是周期函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是周期函数.

(D) $F(x)$ 是单调函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是单调函数.

解 选(A). 本题除了选项(D)外, (B)、(C)均是必要而非充分条件. 排除(B)、(C)、(D)可用同一个 $F(x) = x + \sin x + 1$, 则 $f(x) = 1 + \cos x$. $f(x)$ 是周期函数, $F(x)$ 不是; $F(x)$ 是单调增函数, $f(x)$ 不是; $f(x)$ 是偶函数, $F(x)$ 是非奇非偶的函数. 因此, 只有(A)正确. 在单调性上, $F(x)$ 与 $f(x)$ 无必要或充分条件的关系. 而(A)、(B)差别在于原函数 $F(x)$ 不是唯一的, 它们之间相差一个常数, 对偶函数而言加个任意常数仍是偶函数; 奇函数(连续的)只有当 $F(0) = 0$ 才对. 因此(B)换成 $F'(x) = f(x)$ 连续, 且有 $F(0) = 0$, 则 $F(x)$ 是奇函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是偶函数. 或者说, $f(x)$ 是连续的偶函数 $\Leftrightarrow$ 有且仅有一个原函数是奇函数.

如果 $f(x)$ 是周期函数, 则 $F(x)$ 必为周期函数与一个线性函数的代数和. 我们将其作一个例题来证明.

例8 设 $f(x)$ 是连续的周期函数, 则其原函数必是周期函数与一个线性函数之和.

证 令 $F(x) = \varphi(x) + kx + b$, 其中 $\varphi(x)$ 与 $f(x)$ 有同样的周期 T . 于是

$$F'(x) = \varphi'(x) + k = f(x)$$

从而 $\varphi(x) + kx = \int_0^x f(t) dt + c$ (c 是任意常数)

$$\varphi(x+T) + kx + kT = \int_0^{x+T} f(t) dt + c$$

故 $kT = \int_0^{x+T} f(t) dt - \int_0^x f(t) dt = \int_x^{x+T} f(t) dt = \int_0^T f(t) dt$

$$k = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt$$

即 $F(x) = \varphi(x) + \frac{x}{T} \int_0^T f(t) dt + b$ (b 是任意常数)

于是我们知道, 当且仅当 $\int_0^T f(t) dt = 0$ 时, 以 T 为周期的连续函数 $f(x)$ 的原函数是周期函数.

通过以上讨论, 对一些选项为什么不对, 有无可能使其对, 增加什么条件可使之正确, 等等. 这样去分析一道简单的题, 可使我们对有关基本概念搞得更加透彻, 从而牢固掌握这些概念.

例9 (数学三、四) 以下四个命题中, 正确的是().

(A) 若 $f'(x)$ 在 $(0, 1)$ 内连续, 则 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 内有界.

(B) 若 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 内连续, 则 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 内有界.

(C) 若 $f'(x)$ 在 $(0, 1)$ 内有界, 则 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 内有界.

(D) 若 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 内有界, 则 $f'(x)$ 在 $(0, 1)$ 内有界.

解 我们只要对拉格朗日中值定理熟悉, 便知选(C).

设 $x_0 \in (0, 1)$ 是任一定点, 则 $\forall x \in (0, 1)$ 有

$$|f(x) - f(x_0)| = |f'(\xi)| |x - x_0| < M \quad (M \text{ 是 } |f'(x)| \text{ 的上界})$$

于是 $|f(x)| \leq |f(x_0)| + |f(x) - f(x_0)| < M + f(x_0)$ 有界. 得证.

否定(A)、(B) 可令 $f(x) = \frac{1}{x}$, 则 $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$;

否定(D) 可令 $f(x) = \sqrt{x(1-x)}$, 则 $f'(x) = \frac{1-2x}{2\sqrt{x(1-x)}}$. 在 $(0, 1)$ 内无界.

例 10 (数学一、二、三) 设 λ_1, λ_2 是矩阵 A 两个不同特征值, 对应特征向量分别是 α_1, α_2 , 则 $\alpha_1, A(\alpha_1 + \alpha_2)$ 线性无关的充要条件是 ()

(A) $\lambda_1 \neq 0$ (B) $\lambda_2 \neq 0$ (C) $\lambda_1 = 0$ (D) $\lambda_2 = 0$

解 α_1 与 α_2 线性无关, 而 $A(\alpha_1 + \alpha_2) = \lambda_1 \alpha_1 + \lambda_2 \alpha_2$. 与 α_1 线性无关的充要条件明显是 $\lambda_2 \neq 0$. 如按定义证明

$$\text{令 } c_1 \alpha_1 + c_2 (\lambda_1 \alpha_1 + \lambda_2 \alpha_2) = (c_1 + c_2 \lambda_1) \alpha_1 + c_2 \lambda_2 \alpha_2 = 0$$

要 $(c_1 + c_2 \lambda_1)$ 与 $c_2 \lambda_2$ 不同时为 0. 若 $\lambda_2 = 0$ 势必 $c_1 + c_2 \lambda_1 = 0$. 故 $\lambda_2 \neq 0$.

又, 数学一的第(10)题是考隐函数存在定理的一个题, 由于 2005 年的“考试大纲”新增加了这个考点便出了此题. 这提醒我们要仔细阅读“大纲”, 凡是大纲规定的考试内容都可能出题. 我们在“应试对策”一章中一开始便强调这一点.

三、非客观题中综合性的题更多了

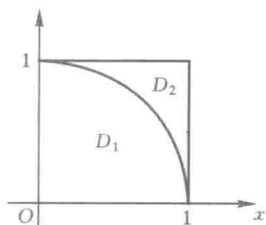
数学一、二的第(17)题是微积分中形数结合的综合题, 只要一看图便知 $f''(3) = 0, f'(0) = 2, f'(3) = -2$. 及 $f(0) = 0, f(3) = 2$ 便行了.

我们先来看数学二、三、四共同考的那道二重积分题:

例 10 (数学二、三、四) 计算二重积分 $\iint_D |x^2 + y^2 - 1| d\sigma$, 其中 $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$.

解 1 如图, 用单位圆弧 $x^2 + y^2 = 1$ 将 D 分为 D_1 和 D_2 两个域. 于是

$$\begin{aligned} I &= \iint_{D_1} (1 - x^2 - y^2) d\sigma + \iint_{D_2} (x^2 + y^2 - 1) d\sigma \\ &= \iint_{D_1} (1 - x^2 - y^2) d\sigma + \iint_D (x^2 + y^2 - 1) d\sigma + \iint_{D_1} (1 - x^2 - y^2) d\sigma \\ &= 2 \cdot \left[\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} \int_0^1 r^3 dr \right] - \frac{1}{3} \\ &= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{3}. \end{aligned}$$



例 10 图

请读者注意: 我们的解法比“参考答案”简略多了. 即便如参考答案, 也不用那样解. 请看解 2.

解 2 算 D_1 上积分如解 1 有 $\iint_{D_1} (1 - x^2 - y^2) d\sigma = \frac{\pi}{8}$

$$\begin{aligned} \text{而 } \iint_{D_2} (x^2 + y^2) d\sigma &= \int_0^{\pi/4} d\theta \int_0^{1/\cos\theta} r^3 dr + \int_{\pi/4}^{\pi/2} d\theta \int_1^{1/\sin\theta} r^3 dr \\ &= \frac{1}{4} \left[\int_0^{\pi/4} \frac{d\theta}{\cos^4\theta} + \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sin^4\theta} \right] - \frac{\pi}{8} \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} \sin^4\theta d\theta - \frac{\pi}{8} \\ &= \frac{2}{3} - \frac{\pi}{8}. \end{aligned}$$

而 D_2 的面积为 $1 - \frac{\pi}{4}$.

因此所求积分 $I = \frac{\pi}{8} + \frac{2}{3} - \frac{\pi}{8} - 1 + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{3}$.

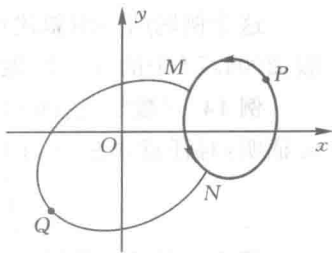
例 11 (数学一) 设 $\varphi(y)$ 有连续导数, 在围绕原点的任意分段光滑简单闭曲线 L 上, 曲线积分 $\oint_L \frac{\varphi(y)dx + 2xydy}{2x^2 + y^4}$ 的值恒为一常数.

(I) 证明: 对右半平面 $x > 0$ 内任意分段光滑简单闭曲线 C , 有 $\oint_C \frac{\varphi(y)dx + 2xydy}{2x^2 + y^4} = 0$;

(II) 求 $\varphi(y)$.

解 (I) 证明很简单, 如图: 设 $\widehat{MNPM}$ 就是 C , 则 $\oint_{\widehat{MNPM}} = \oint_{\widehat{MQNPM}}$

即得 $\oint_{\widehat{MNPM}} = 0$.



例 11 图

(II) 由(I)可知: $\frac{\varphi(y)dx + 2xydy}{2x^2 + y^4}$ 是全微分. 求 $\varphi(y)$ 有三种方法, 我们仅讲“凑全微分”方法:

因为
$$\frac{\varphi(y)dx + 2xydy}{2x^2 + y^4} = \frac{\varphi(y)dx + 2xydy}{x^2[2 + (\frac{y^2}{x})^2]}$$

只要使 $\frac{\varphi(y)dx + 2xydy}{x^2}$ 是 $(A \cdot \frac{y^2}{x})$ 形式的全微分, 即解得 $A = -1$, $\varphi(y) = -y^2$. 这时

$$\frac{\varphi(y)dx + 2xydy}{x^2} = -\frac{d(\frac{y^2}{x})}{2 + (\frac{y^2}{x})^2} = -\frac{1}{\sqrt{2}}d(\arctan \frac{y^2}{\sqrt{2}x})$$

故 $\varphi(y) = -y^2$. (类似本题“凑全微分”的技巧可见本书“数学一”分册中例 2.10 之解 2).

例 12 (数学一、二) $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 内可导. 且 $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, 证明:

(I) 存在 $\xi \in (0, 1)$ 使 $f(\xi) = 1 - \xi$;

(II) 存在两个不同的 $\eta, \zeta \in (0, 1)$, 使 $f'(\eta) \cdot f'(\zeta) = 1$.

解 (I) 用介值定理令 $F(x) = f(x) - (1 - x)$. 则 $f(0) = -1$, $f(1) = 1$, 故存在 $\xi \in (0, 1)$ 使 $F(\xi) = 0$ 即 $f(\xi) = 1 - \xi$.

(II) 在 $[0, \xi]$ 上由拉格朗日中值定理有 $\eta \in (0, \xi)$

$$f(\xi) - f(0) = \xi f'(\eta) \quad \text{即} \quad 1 - \xi = \xi f'(\eta)$$

在 $[\xi, 1]$ 上, $\zeta \in (\xi, 1)$ 有 $f(1) - f(\xi) = (1 - \xi)f'(\zeta)$. 即 $\xi = (1 - \xi)f'(\zeta)$.

于是有 $0 < \eta < \zeta < 1$ 使 $f'(\eta)f'(\zeta) = 1$.

例 11 和例 12 说明: 一个较难考题若分成两问, 前一问往往是对第二问的提示. 例 12 先用介值定理, 再用拉氏定理这样的考题, 是综合用这两个重要定理的新题型. 为了说明这种方法, 这里再举一例.

例 13 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 内可导, 且 $f(0) = 0$, $f(1) = 1$. 证明: 存在两不同点 $\xi_1, \xi_2 \in (0, 1)$, 使 $\frac{1}{f'(\xi_1)} + \frac{1}{f'(\xi_2)} = 2$.

证 由介值定理知, 存在 $x_0 \in (0, 1)$, 使 $f(x_0) = \frac{1}{2}$. 在 $[0, x_0]$ 上由拉氏定理知存在 $\xi_1 \in (0, x_0)$ 使

$$\frac{1}{2} = x_0 f'(\xi_1) \quad \text{或} \quad \frac{1}{f'(\xi_1)} = 2x_0$$

在 $[x_0, 1]$ 上由拉氏定理得, 存在 $\xi_2 \in (x_0, 1)$, 使 $\frac{1}{2} = (1 - x_0)f'(\xi_2)$.

故
$$\frac{1}{f'(\xi_1)} + \frac{1}{f'(\xi_2)} = 2.$$

这个例题的一般叙述可参阅《高等数学典型题(第3版)》(龚冬保主编, 西安交通大学出版社出版, 2004.7) 中的 3-25 题(第 84 页).

例 14 (数学三、四) 设 $f(x), g(x)$ 在 $[0, 1]$ 上有连续导数, 且 $f(0) = 0, f'(x) \geq 0, g'(x) \geq 0$. 证明: 对任意 $a \in [0, 1]$ 有

$$\int_0^a g(x)f'(x)dx + \int_0^1 f(x)g'(x)dx \geq f(a)g(1)$$

证 1 对这一类题, 一种简单方法就是用分部积分, 将它们化到最简单、容易证明的形式. 即要证:

$$\int_0^a g(x)f'(x)dx + \int_0^1 f(x)g'(x)dx - f(a)g(1) \geq 0$$

而
$$\int_0^a g(x)f'(x)dx + \int_0^a f(x)g'(x)dx + \int_a^1 f(x)g'(x)dx - f(a)g(1)$$

$$= f(a)g(a) + \int_a^1 f(x)g'(x)dx - f(a)g(1)$$

$$\geq f(a)[g(a) + \int_a^1 g'(x)dx - g(1)] = 0$$

自然地便有了结果. 这里仅用到 $f'(x) \geq 0$ 从而在 $[a, 1]$ 中 $f(x) \geq f(a)$.

证 2 (一般简单作辅助函数方法, 本书中有不只一道类似例题).

$$\text{令 } F(a) = \int_0^a g(x)f'(x)dx + \int_0^1 f(x)g'(x)dx - f(a)g(1) \quad a \in [0, 1]$$

$$F'(a) = g(a)f'(a) - f'(a)g(1) \leq 0. \quad \text{故 } F(a) \text{ 在 } [0, 1] \text{ 单减.}$$

$$\text{只要验证: } F(1) = \int_0^1 g(x)f'(x)dx + \int_0^1 f(x)g'(x)dx - f(1)g(1) = 0$$

结果是明显的, 因此命题获证.

例 15 (数学一、二) 已知三阶矩阵 A 的第一行 (a, b, c) 是非零向量, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & k \end{bmatrix}$ (k 是常

数). 且 $AB = O$, 求 $Ax = 0$ 的通解.

解 由已知知, $1 \leq r(A) < 3$. 又 $AB = O, r(B) = \begin{cases} 1, & \text{当 } k = 9 \\ 2, & \text{当 } k \neq 9 \end{cases}$. 当 B 的秩为 2 时, A 的秩

只能是 1. $Ax = 0$ 的基础解系应有两个线性无关的解. 自然是 B 的两列: $\eta_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \eta_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ k \end{bmatrix}$.

从而通解是 $c_1\eta_1 + c_2\eta_2$.

若 $k = 9, r(B) = 1$, 则 A 的秩有可能是 1 和 2. $r(A) = 1$ 时, 方程组等价于 $ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0$. 由于 a, b, c 不全为零, 不妨设 $c \neq 0$, 则 $\bar{\eta}_1 = (c, 0, -a)^T, \bar{\eta}_2 = (0, c, -b)^T$ 是基础解系. 从而通解是 $c_1\bar{\eta}_1 + c_2\bar{\eta}_2$. 若 $r(A) = 2$, 则 $\eta_1 = (1, 2, 3)^T$ 是基础解系. 通解为 $c\eta_1$.

本题是个较中等的综合题. 综合了矩阵的秩的性质及非齐次方程解的结构等重要考点, 算得上是个“好题”.

数学四的第(21)题既与其第(5)题有共同考点,又与2001年数学一的一道题相似,我们简单解它一下.

例16 (数学四) 设 A 为三阶矩阵, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是线性无关的三维列向量.且满足 $A\alpha_1 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, A\alpha_2 = 2\alpha_2 + \alpha_3, A\alpha_3 = 2\alpha_2 + 3\alpha_3$

(I) 求 B ,使 $A(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)B$.

(II) 求 A 的特征值.

(III) 求可逆矩阵 P ,使 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵.

解 (I) $A(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, 2\alpha_2 + \alpha_3, 2\alpha_2 + 3\alpha_3)$

$$= (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

故

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

这与第(5)题属同一考点.

(II) 记 $C = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ 则 $A = CBC^{-1}$.即 A 相似于 B .故只求 B 的特征值:

$$\begin{vmatrix} \lambda - 1 & 0 & 0 \\ -1 & \lambda - 2 & -2 \\ -1 & -1 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda^2 - 5\lambda + 4) = (\lambda - 1)^2(\lambda - 4).$$

即 A 的特征值为1,1,4.

(III) 以 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ 代入方程是 $x_1 + x_2 + 2x_3 = 0$,解得特征向量为 $\xi_1 = (2, 0, -1)^T$ 及 $\xi_2 = (0, 2, -1)^T$. $\lambda_3 = 4$ 代入得特征向量 $\xi_3 = (0, 1, 1)^T$.即 $(\xi_1, \xi_2, \xi_3)^{-1}B(\xi_1, \xi_2, \xi_3) =$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}. \text{从而 } P = C \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

注 视 A 为在基 $e_1 = (1, 0, 0)^T, e_2 = (0, 1, 0)^T, e_3 = (0, 0, 1)^T$ 下线性变换 A 的矩阵,那么 B 就是这同一线性变换在基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 下的矩阵.因为 A 的特征值与 B 的特征值相同,故 A 的对角矩阵与 B 的对角矩阵相同.

限于篇幅,就不一一赘述了.总之,我们再一次强调,在学会“考卷分析”、把握“应试对策”的基础上,把书中例题当习题边作边看,尤其要注意旁注中的提示,对典型的、基本的解题方法与技巧熟练透,就一定能能在考试中取得理想的成绩.

龚冬保

2005.早春二月

(龚冬保教授关于2001年~2004年考研试卷的精辟分析,请参阅本书的附录——编者注)

2004 版 前 言

这一版与前面几版比较,变化较大,主要有:

1. 原书的第 13 章模拟题及答案去掉了,从 2002 年起,我们和《数学考研教程》一书的编者,根据当年最新的信息,有针对性地另行编写《数学考研模拟考试试卷》,于当年 11 月前后单独出版,供考生检验复习效果和考前冲刺使用。

2. 第 1 章每年根据最近的考试情况有较大的修改;

3. 其余各章又增、删了一些例题与习题。

本书自问世以来,每年一版。由于我们紧扣“考试大纲”,精选和编制了一些针对性强的典型题,而且书中旁注“画龙点睛”强调了一些重要的题型、考点及解题的思路与方法,因此本书的典型题与年年考研的题相似的很多。同时,本书前两章所讲“考卷分析”及“应试策略”也日益受到读者的关注。不少读者反映,这两章对他们考上研究生起了很大的作用。这一切都是对编者最大的鼓舞和激励,我们一定倍加努力,将此书越改越好。

此书排校差错以及编者的疏漏,年年有读者指正,在此表示衷心感谢。虽屡经修改,挂一漏万之事仍难以避免,诚恳希望读者像以往一样提出宝贵意见。

编者

2003.3 于西安交大

第 1 版 前 言

每当我们上了数学考研辅导课后,总有不少同学建议我们写一本考研辅导的书。在考生朋友不断地鼓励和期盼下,我们终于写成了此书,希望它能成为众多考生的一个好朋友,陪伴着他们去数学考场“潇洒走一回”。

通过目录,读者可以了解到本书的特点:第一部分(第 1 章)是考卷分析。新的“考试大纲”是 1997 年开始执行的,数学一是工学类代表,数学三是经济类的代表。我们对 1997 至 1999 三年的六份考卷一一作了列表分析。通过这些表格,将每套考卷的内容覆盖、数学能力、认知水平及难度都量化了。只要看看六张表格中的数字,就能知道每套考卷主要考些什么。比如在数学能力方面,计算题基本上要占 50 分以上;在认知水平上,要求“理解”水平的题在一半左右;在难易程度上,中档题占一半左右,等等。这样,您看了本书第 1 章应当对数学考试“心中有数”了。进一步,如果您借助我们设计的表格,按照自己的水平,去独立分析一两套试卷,那么就知道应当如何去准备这场考试了。因此,第 1 章是作复习前准备必不可少的。第二部分(第 2 章)是应试对策,讲的是复习迎考及身临考场的策略。在有一定数学水平的基础上,能不能考出理想成绩,就要看您的发挥了,如何能发挥好,应试策略是关键。而“策略”又是最容易被人们忽视的。“考试又不是打仗,讲什么策略”?岂不闻考场如战场,策略往往是成败的关键。我们写这一章也是个尝试,希望能引起考生对策略问题的重视。其实,对策是人们干什么事都应考虑的,所谓“优化运筹”不就是要寻找最优对策吗?有了好的复习迎考对策,在此基础上,订一个切实可行的计划,就可以帮助你以高效率 and 好效果较轻松地争取好成绩。第三部分(第 3~12 章)是典型题的选讲与练习,这是本书的主要部分。我们选了 1500 多道题,其中 500 道例题,采用分析、注释、一题多解等讲法,讲解解题的方法与技巧,所有练习题均给出了答案与提示。要想考个好成绩,关键是提高解题能力。我们的书主要围绕基本运算和推理能力、灵活善变的解题技巧、综合运用所学知识及提高应用意识来选题、讲题和布置练习题的。我们不主张单纯“猜题”,认为只要内容覆盖面全,主要方法都练到了,就能考好,比“猜题”更稳妥,而且有利于提高数学素养;第四部分(第 13 章)是模拟题,数学一和数学三各两套。在复习时,请先不要看模拟题,复习完临考前再用这两套题来进行两次“热身”。用三小时做一套题,看看自己究竟如何,最后找找差距。值得说明的是,本书中模拟题也有特色,它是以“从难、从严、从实战”出发设计的。每套试卷比正式考卷更难些,综合题、应用题多些,读者如能在三小时内将我们提供的每套考卷完成,并能获得 60 分以上的平均成绩,那么,上了考场,正常发挥也一定能考 60 分以上。但您如果提前看过了题目,再去做效果就不好了。

以上是我们编写本书的主要想法,但总觉得编写仓促,书中可能会有不少的问题和漏洞,恳切地希望读者多多批评指正。

感谢西安交通大学出版社的支持,使这本书能以面世,感谢关心与鼓励我们的朋友们!

编者

1999.5 于西安交大

目 录

从 2005 年考研的数学试题谈起(代 2006 版前言)

2004 版前言

第 1 版前言

第 1 章	考卷分析	(1)
1.1	分析的必要性	(1)
1.2	微观分析举例	(1)
1.3	宏观分析	(5)
1.4	小结与预估	(7)
第 2 章	应试对策	(12)
2.1	全面复习 把书读薄	(12)
2.2	突出重点 精益求精	(14)
2.3	基本训练 反复进行	(17)
2.4	探索思路 归纳方法	(20)
2.5	制定目标 增强信心	(23)
2.6	稳扎稳打 细心应付	(24)
2.7	机动灵活 定能潇洒	(26)
第 3 章	函数 极限 连续	(29)
3.1	函数 极限	(29)
3.2	连续函数	(37)
	练习题	(39)
	答案与提示	(43)
第 4 章	一元函数微分学	(44)
	练习题	(63)
	答案与提示	(69)
第 5 章	一元函数积分学	(74)
5.1	不定积分	(74)
5.2	定积分及其计算	(80)
5.3	积分的证明及应用例题	(90)
	练习题	(102)
	答案与提示	(107)
第 6 章	多元函数微积分学	(110)
6.1	极限、连续、偏导数及微分	(110)
6.2	多元函数微分法	(112)
6.3	多元函数微分应用	(121)

6.4	二重积分	(126)
	练习题	(136)
	答案与提示	(144)
第7章	常微分方程	(148)
7.1	一阶微分方程及其应用	(148)
7.2	高阶微分方程及其应用	(157)
	练习题	(167)
	答案与提示	(169)
第8章	线性代数	(171)
8.1	行列式	(171)
8.2	矩阵	(179)
8.3	向量	(194)
8.4	线性方程组	(203)
8.5	特征值与特征向量	(224)
	练习题	(240)
	答案与提示	(246)
附录A	2003~2005 年工学数学试卷及答案	(250)
	2003 年数学一试卷	(250)
	2003 年数学二试卷	(252)
	2004 年数学一试卷	(254)
	2004 年数学二试卷	(256)
	2005 年数学一试卷	(257)
	2005 年数学二试卷	(259)
	非客观题答案或提示	
	2003 年数学一	(261)
	2003 年数学二	(261)
	2004 年数学一	(262)
	2004 年数学二	(262)
	2005 年数学一	(262)
	2005 年数学二	(263)
附录B	对 2001 年工学数学考研试卷的浅析	(263)
附录C	2003 年数学考研试卷分析	(266)
附录D	加强基本功训练与综合能力的训练	(271)
附录E	本书(2005 版)与 2005 年考研试题的相似题对照表	(278)

第1章

考卷分析

依据教育测量学理论,本章对以往一些典型试题作了深入剖析,又对2003、2004年以及2005年数学二的3份试卷进行了定量分析,以使考研同学较深入了解考研试卷的主要特征.



1.1 分析的必要性

为什么要分析已考过的试卷?不少考生甚至觉得刚考过的题肯定不会再考了,对分析已考过试卷的必要性持怀疑态度,因此,我们先简单说一下分析的必要性.

考试是一种心理测量,一份考卷好比一杆“秤”.比如您上集市买菜,总要先看看秤一样,您准备考研究生,就得先分析考卷,看看在考试内容、考试难度、考题份量、认知和能力层次等等在每份考卷中是如何体现的,摸一摸近几年考卷的底,然后再制订适合自己的应试策略,从而减少复习迎考的盲目性.

对于考研试卷分析的方法,我们分为“微观分析”和“宏观分析”两种.首先作“微观分析”,就是对试卷中每道试题都要认真作,边作边分析这道题的考点,解这个题的思路及主要方法是什么,这一类题在考研中的地位等等.在“微观分析”的基础上进一步作“宏观分析”,我们的做法是,给每份试卷有一个表格,将这份试卷中的每道题的属性用数量表示在相应的空格之中,一份试卷一张表,只要看到表格中的数据,不必看具体的试卷本身,就可以了解这份试卷的考点分布、题型结构及整卷难度等等.

分析好,大有益.我们在本书中对近三年试卷的分析,不仅仅是将分析结果告诉读者,更重要是希望读者学会本书介绍的分析方法,结合自己的实际,针对性更强地去独立分析自己准备投考的那一类考卷,以便作到对数学考研“心中有数”.



1.2 微观分析举例

例 1.1 我们试比较 2004 年工学和经济学的两道相似的试题:

(1) (2004, I、II) 设 $f(x)$ 连续,且 $f'(0) > 0$,则存在 $\delta > 0$,使().

(A) $f(x)$ 在 $(0, \delta)$ 单调增.

(B) $f(x)$ 在 $(-\delta, 0)$ 单调减.

(C) 对 $\forall x \in (0, \delta)$ 有 $f(x) > f(0)$.

(D) $\forall x \in (-\delta, 0)$ 有 $f(x) > f(0)$.

(2) (2004, III、IV) 设 $f'(x)$ 在 $[a, b]$ 连续, 且 $f'(a) > 0, f'(b) < 0$, 则下列结论中错误的是 ().

- (A) 至少存在一点 $x_0 \in (a, b)$ 使 $f(x_0) > f(a)$.
 (B) 至少存在一点 $x_0 \in (a, b)$ 使 $f(x_0) > f(b)$.
 (C) 至少存在一点 $x_0 \in (a, b)$ 使 $f'(x_0) = 0$.
 (D) 至少存在一点 $x_0 \in (a, b)$ 使 $f(x_0) = 0$.

解 选(C) 由 $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} > 0$, 知存在 $\delta > 0$, 当 $0 < x < \delta$ 有 $f(x) - f(0) >$

0. 故(C) 正确.

(2) 选(D), (A)(B) 的正确性即是(1)之选项(C). 至少(C) 的正确性可用连续函数的介值定理; 故只有(D) 的结论是不对的, 故选(D).

比较这两道题(1)中仅有一点的导数 $f'(0) > 0$ 的假设; (2)中设 $f'(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 而(2)中的选项(A), (B) 均可用到(1)的概念, 即只要对导数概念清楚就行了. 在(1)中若假设 $f'(x)$ 在 0 点连续, 那么选项(A) 也是对的. 证明是这样. 由 $f'(x)$ 连续, 且 $f'(x) > 0$ 故存在 $\delta > 0$, 在 $(0, \delta)$ 上 $f'(x) > 0$, 因此 $f(x)$ 在 $(0, \delta)$ 上单调增. 因此(2) 的假设太强; 用 $f'(x)$ 的连续性由 $f'(a) > 0$ 知存在 $\delta_1 > 0$, 在 $(a, a + \delta_1)$ 上 $f(x)$ 单增. 当然有 $f(x_0) > f(a)$; 由 $f'(b) < 0$ 知存在 $\delta_2 > 0$, 在 $(b - \delta_2, b)$ 上 $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调减, 有 $f(x_0) > f(b)$ 十分简单. 因此(1) 题要难些, 且选项(A) 有迷惑性, 作这样的题要求概念清楚, 并直接证明(C) 的正确性; 而(2) 较简单, 用排除法较好因为(A)、(B)(C) 是正确的结论太好证明了.

顺便指出如将(2) 题的假设改成 $f'(x)$ 在 $[a, b]$ 上存在. 其它不变那么选项(A)、(B)、(C) 中结论的正确性正是本书例 4.34(达布中值定理) 的证(1). 读者不妨查读一下, 是完全一样的.

至于(2) 的选项(D) 的结论未必正确可以看一个很简单的例子: 设 $f(x) = 2 - x^2$. 在 $[-1, 1]$ 上, $f'(-1) = 2 > 0, f'(1) = -2 < 0$, 但在 $[-1, 1]$ 上 $f(x) \geq 1 > 0$, 不存在 0 点.

在考场上作这两个题用不了几行, 但剖析起来, 尤其是对照剖析, 使我们对极限、导数及连续性、单调性都有更深刻的领会, 甚至变化一下(2) 题, 还可引领到“达布中值定理” 这就是举一反三, 触类旁通的意思, 只限于会不会做这两道题去做题, 就不会有多大的收获. 这是我们说的微观分析的方法.

例 1.2 (2001, I) 设 $f(0) = 0$, 则 $f(x)$ 在 $x = 0$ 可导的充要条件是

- (A) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^2} f(1 - \cosh h)$ 存在. (B) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} f(1 - e^h)$ 存在.
 (C) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^2} f(1 - \sinh h)$ 存在. (D) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [f(2h) - f(h)]$ 存在.

解 选(B). 本题是概念性较强的题. 只要对导数的定义有透彻理解, 就能容易用排除法排除不正确选项. 如, 由定义知 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = f'(0)$. 而选项(A)、(C) 中, 相当于 x 的因式是 h^2 , 只能取正数趋于 0, 不能作导数存在充要条件; 而选项(D) 中的极限存在与 $f(0)$ 的取值无关. 也不能作可导充要条件. 因而只有(B) 是正确的选项. 不必举反例, 也不要会证明选项(B) 的正确性.

作为平时的练习, 深入分析本题, 则可以有许多启发. 首先, 我们来举反例否定三个不正确选项. 对(A)、(C), 可用同一反例: $f(x) = |x|$, 满足 $f(0) = 0$, 且 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1 - \cosh h)}{h^2} = \frac{1}{2}$ 存在及 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h - \sinh h)}{h^2} = 0$ 存在, 但 $f(x)$ 在 0 点不可导, 说明(A)、(C) 选项均不对; 对于(D), 令

$f(x) = \begin{cases} 1, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$ 也有 $f(0) = 0$, $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2h) - f(h)}{h} = 0$ 存在, 而 $f(x)$ 在 0 点间断, 故不可导.

因此(D)也被排除. 仿此, 读者还可自己举出与上面不同的反例. 顺便提及, 本书的第4章之例4.3、4.4、4.5及其注释, 与本题的考点及分析问题方法以及在那里我们列举的反例, 均与本题是一致的. 由于导数概念的重要性, 此书的每一版都保留了这几个题. 读者可对比着看, 以加深对导数概念及其存在的充分条件、必要条件及充要条件的理解.

其次, 我们来证明选项(B)的正确性.

必要性. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1 - e^h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1 - e^h)}{1 - e^h} \cdot \frac{1 - e^h}{h} = -f'(0)$ 存在.

充分性. 对任意 $x \rightarrow 0$, 取 $|x| < 1$, 令 $1 - e^h = x$, 或 $h = \ln(1 - x)$. 则 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1 - e^h)}{h} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} \cdot \frac{x}{\ln(1 - x)}$

于是 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = -\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1 - e^h)}{h}$ 存在即 $f'(0)$ 存在.

细心的读者会问 由 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1 - \cosh h)}{h^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1 - \cosh h)}{1 - \cosh h} \cdot \frac{1 - \cosh h}{h^2}$ 令 $1 - \cosh h = x$, 则 $x \rightarrow 0$. 不是也有 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1 - \cosh h)}{h^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} \cdot \frac{1}{2}$ 存在吗. 不是同样证明了选项(A)也是正确的吗?! 问题在哪里?! 原来, 令 $1 - \cosh h = x$, 由 $h \rightarrow 0$, 只能有 $x \rightarrow 0^+$. 因此, 我们知道, 选项(A)是 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处右导数存在的充要条件, 因此, 我们举反例只要举 $f(x)$ 在 $x = 0$ 点右导数存在而导数不存在的例子; 进一步看选项(C), 我们知道当 $h \rightarrow 0$ 时, $h - \sinh h$ 是与 h^3 同阶的无穷小, 因而

$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h - \sinh h)}{h^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h - \sinh h)}{h - \sinh h} \cdot \frac{h - \sinh h}{h^2}$. 只要当 $h \rightarrow 0$ 时, $h \frac{f(h - \sinh h)}{h - \sinh h}$ 的极限存在, $f'(0)$

可以是无穷大量. 于是令 $f(x) = x^{2/3}$. 显然 $f(0) = 0$, $f'(0) = \infty$ 不存在. 但 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h - \sinh h)}{h^2} =$

$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(h - \sinh h)^{2/3}}{h^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{h - \sinh h}{h^3} \right)^{2/3} = \left(\frac{1}{6} \right)^{2/3}$ 存在.

至于选项(D), 如果我们令 $f(x) = \begin{cases} 0, & x \text{ 是有理数} \\ 1, & x \text{ 是无理数} \end{cases}$, 那么, 总有 $f(0) = 0$, $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2h) - f(h)}{h} = 0$ 存在, 但 $f(x)$ 处处间断!

像这样去分析一道题, 必定能作到举一反三、触类旁通, 做一个题胜似做一类题.

例 1.3 (2002, II) 已知 A, B 为 3 阶矩阵, 且 $2A^{-1}B = B - 4E$.

(1) 证明: $A - 2E$ 可逆;

(2) 若 $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, 求 A .

解 (1) 由于逆矩阵来源于矩阵乘法的逆运算. 故求逆矩阵的一种方法是: 求 $A - 2E$ 的逆矩阵, 便设法去分解 $A - 2E$ 的因式, 于是由 $2A^{-1}B = B - 4E$, 在等式两端左乘矩阵 A , 并移项整理得

$$AB - 2B - 4A = 0$$

得 $(A - 2E)B - 4(A - 2E) = 8E$.

从而 $(A - 2E)(B - 4E) = 8E$, $(A - 2E)^{-1} = \frac{1}{8}(B - 4E)$.

(2) 由 $A - 2E = 8(B - 4E)^{-1}$.

$$B - 4E = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

用分块矩阵求逆得

$$8(B - 4E)^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ -1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

分析 此题使我们想到 2000 年数学二的一道填空题:

$$\text{设 } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 7 \end{pmatrix}, B = (E + A)^{-1}(E - A), \text{ 则 } (E + B)^{-1} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

这个题的考点、思路与方法与 2002 年的题完全相同: 为求 $(E + B)^{-1}$, 先从 $B = (E + A)^{-1}(E - A)$ 来分解 $B + E$ 的因式: $B + AB + A = E, \Rightarrow B + E + A(B + E) = 2E$.

$$(E + A)(B + E) = 2E$$

$$(B + E)^{-1} = \frac{1}{2}(E + A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 4 \end{pmatrix}.$$

再联系 2001 年数学一的一道填空题:

设 $A^2 + A - 4E = 0$, 则 $(A - E)^{-1} = \underline{\hspace{2cm}}.$

解 还是分解 $A - E$ 的因式. $A^2 + A - 4E = (A - E)(A + 2E) - 2E = 0$. 故 $(A - E)^{-1} = \frac{1}{2}(A + 2E)$.

这样分析, 我们发现同样考点、思路和解法的题, 连续三年分别在数学一和数学二中考到. 那种认为考过的题不可能再考的说法显然是幼稚的. 从表面上看, 这三道题是不同的, 但是经过分析, 它们考点、解法思路均相同, 这三道题属于“一样的”题型. 再进一步想, 在线性代数中, 矩阵是重要的一章, 而用分解因式方法求逆矩阵, 几乎用遍了矩阵的代数运算及其性质, 因此, 这一类的题必定是考研的热点. (果然, 2003 年数学二之一(6)题及数学四之一(4)题又考了. 见本书附录 D).

我们再看几道相同题型的高数题.

例 1.4 (2001, III、IV 与 1991, I、II)

(1) (2001, III) 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 内可导, 且 $f(1) = k \int_0^{1/k} x e^{1-x} f(x) dx$ ($k > 1$), 证明存在 $\xi \in (0, 1)$, 使 $f'(\xi) = (1 - \xi^{-1})f(\xi)$.

(2) (2001, IV) 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 内可导, 且 $f(1) = 3 \int_0^{1/3} e^{1-x^2} f(x) dx$, 证明存在 $\xi \in (0, 1)$ 使 $f'(\xi) = 2\xi f(\xi)$.

(3) (1991, I、II) 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, $(0, 1)$ 内可导, 且 $3 \int_{2/3}^1 f(x) dx = f(0)$. 证明存在 $c \in (0, 1)$ 使 $f'(c) = 0$.

解 这三道题从考点、思路、解法上也是一样的题. 我们只要解其中一题, 其余两题读者一定