iCourse·教材

线性代数

□ 北京理工大学 孙 良 闫桂峰 编

高等教育出版社

iCourse·教材

线性代数

XIANXING DAISHU

□ 北京理工大学　孙　良　闫桂峰　编

高等教育出版社·北京

内容简介

本书是与中国大学 MOOC 上北京理工大学的“线性代数 MOOC”配套的教材，是作者根据非数学专业线性代数课程的基本要求编著的。内容包括线性方程组、矩阵、向量空间、行列式、方阵的特征值与特征向量、二次型与正定矩阵。

本书可以作为非数学专业线性代数课程的教材或教学参考书，也可供社会学习者学习“线性代数 MOOC”时参考使用。

图书在版编目（CIP）数据

线性代数 / 孙良，闫桂峰编. -- 北京：高等教育出版社，2016.9

iCourse · 教材

ISBN 978-7-04-046128-2

Ⅰ. ①线… Ⅱ. ①孙… ②闫… Ⅲ. ①线性代数-高等学校-教材 Ⅳ. ①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2016）第 192132 号

策划编辑 李 茜　　责任编辑 李 茜　　封面设计 张 志　　版式设计 于 婕

插图绘制 于 博　　责任校对 刘春萍　　责任印制 毛斯璐

出版发行 高等教育出版社
社　　址 北京市西城区德外大街 4 号
邮政编码 100120
印　　刷 北京中科印刷有限公司
开　　本 787mm×1092mm 1/16
印　　张 16.75
字　　数 310 千字
购书热线 010-58581118
咨询电话 400-810-0598
网　　址 http://www.hep.edu.cn
http://www.hep.com.cn
网上订购 http://www.hepmall.com.cn
http://www.hepmall.com
http://www.hepmall.cn
版　　次 2016 年 9 月第 1 版
印　　次 2016 年 9 月第 1 次印刷
定　　价 30.80 元

物 料 号 46128-00

前　言

本书讲授的线性代数是面向非数学专业学生的一门公共基础课,它不仅为我们提供学好后继课程的数学知识,而且为我们提供在各个学科领域中通用的分析问题与解决问题的方法。

本书是我们为了适应 MOOC 需要编著的,由我们制作的线性代数 MOOC 已在中国大学 MOOC 上线。我们按照教育部高等学校教学指导委员会以及全国硕士研究生入学考试大纲对线性代数课程的要求,基于 MOOC 的特点,本着“由浅入深、由易到难”的原则,对线性代数的课程内容做了系统整合,使得课程结构更加紧凑,课程的前后顺序更加合理,使得这门课更加容易教与学。全书分为 6 章。

第一章讲线性方程组。我们由线性方程组的化简,引出线性方程组的初等变换(互换两个方程的位置,某个方程乘非零常数,某个方程的倍数加到另外一个方程上);将方程组等价到增广矩阵、方程组的初等变换等价到增广矩阵的初等行变换,定义一般矩阵的初等行变换;用矩阵的阶梯形的非零行数定义矩阵的秩;给出线性方程组有解的充分必要条件是线性方程组的系数矩阵的秩等于增广矩阵的秩,线性方程组有解并且解唯一的充分必要条件是线性方程组的系数矩阵的秩等于增广矩阵的秩且等于方程组的未知数的个数;通过方程组的增广矩阵的简化阶梯形给出求有解线性方程组的解的方法。

第二章讲矩阵代数。我们定义了矩阵的 4 种运算:加法,数乘,乘法,转置。在定义矩阵乘法的时候,我们特别注重矩阵的行与列的整体性,将矩阵按行或者按列表示,这不仅讲清了矩阵乘法的本质,也为后面讲矩阵的分块、向量以及向量组做了铺垫和准备。进一步地,矩阵的按行、按列表示也为证明矩阵运算的性质提供了极大的方便。

第三章讲向量空间,这是线性代数的核心内容。在这一章,判断向量组的线性相关与线性无关,以及向量可否由向量组线性表示的工具是线性方程组,求向量组的极大无关组与秩的工具是矩阵以及矩阵的初等行变换。矩阵与向量组是可以互相转换的。一个矩阵可以决定 3 个向量空间:零空间,列空间,行空间。由矩阵的零空间可以给出线性方程组的解的向量形式,这样就完善了线性方程组的解的理论。在 n 元实向量空间上定义了两个向量的内积,向量的长度,以及两个向量的正交,给出了线性无关向量组的施密特正交化方法,为讲行列式在几何方面的应用与实对称矩阵的相似对角化准备好了工具。

第四章讲行列式。我们采用递归的方法定义行列式,先给出 2 阶行列

式的定义与性质，然后利用行列式的第 1 行的展开，递归定义当 $n > 2$ 时的 n 阶行列式。这样定义既容易理解，也方便低阶时直接计算，并且它还是行列式按行展开的一种特殊情况。关于行列式性质的证明，只要熟悉数学归纳法，并不是很难理解。而且弄懂一个性质的证明即可，方法都是一样的。作为行列式在代数方面的应用，我们证明了矩阵的秩等于矩阵的非零子式的最大阶数，通过伴随矩阵证明了求解 $n \times n$ 线性方程组的克拉默法则。作为行列式在几何方面的应用，我们给出了 3 阶行列式的几何意义：实数集上的 3 阶行列式的绝对值等于以行列式的行向量组或者列向量组为邻边构成的平行六面体的体积。

第五章讲方阵的特征值与特征向量。这一章分为两部分，第 1 部分讨论方阵可以相似对角化的条件，第 2 部分证明实对称矩阵可以用正交矩阵化为对角矩阵。第 2 部分为下一章介绍用正交替换化实二次型为标准形提供了理论基础。

第六章讲二次型与正定矩阵。这一章的前半部分介绍了化二次型为标准形的 3 种方法（配方法，初等变换法，正交替换法），前两种方法适用于任意二次型，第 3 种方法只能用于实二次型；后半部分讨论实二次型的定性与正定矩阵的充分必要条件。

线性代数的内容是自封闭的。在本书中，除了代数学基本定理（超出了范围）以及少数几个浅显易懂的结论（避免过于冗长）以外，其他结论都给出了证明。此外，我们对线性代数的实际背景与历史人物作了适当介绍。所以，这是一本内容丰富而又全面的线性代数教材，它既适用于课堂讲授，也适用于自学。如果将本书与我们制作的 MOOC 视频一起使用，采用“翻转课堂”教学法，那么将会极大地调动学生的学习积极性，收到非常好的效果。

本书可以作为 30 到 60 学时之间的线性代数课程的教材或者教学参考书。如果学时数比较少，那么定理 1.3、定理 1.5、定理 2.9、定理 5.5、定理 5.6、定理 5.9、定理 6.5、定理 6.9 的证明，不相容方程组的最小二乘法以及行列式的几何应用都可以作为选修内容，灵活处理。

本书的出版得到北京理工大学“十三五”教材规划的资助；我们的许多同事对本书的写作提供了慷慨的帮助；我们的学生在使用本书初稿时，指出了若干错误；高等教育出版社的张长虹编辑对我们的写作提供了许多指导；本书的责任编辑李茜为本书的出版做了大量工作。在此一并表示衷心感谢！

孙　良　闫桂峰

2016 年 3 月

目 录

第一章　线性方程组

MOOC 1.1
线性方程组

线性方程组不仅是线性代数的研究对象，也是我们研究线性代数中其他问题的重要工具，所以本课程从线性方程组讲起．我们对线性方程组并不陌生，在中学的数学课程里，我们学习过一些特殊类型的线性方程组——方程的个数与未知数的个数都为 2 或 3 的线性方程组．我们在这一章讨论的是方程的个数与未知数的个数都是任意有限多个的、一般情况下的线性方程组．

1.1　线性方程与线性方程组

在这一节，我们介绍与线性方程组有关的基本概念，并且提出关于线性方程组所要研究的基本问题．

定义 1.1　设 a_1，a_2，$\cdots$，a_n，b 是常数，x_1，x_2，$\cdots$，x_n 是未知数，形如

$$a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n=b$$

的表达式称为 n 元线性方程，其中 a_i 是未知数 x_i 的系数，$i\in\{1,2,\cdots,n\}$，b 是常数项．

定义 1.1 中的“元”是未知数的简称，“n 元”表示方程中有 n 个未知数；“线性”表示方程中只有“加法”和“常数与未知数的乘法”这两种运算，这就是我们通常所说的线性运算．

定义 1.2　对于 n 元线性方程

$$a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n=b, \tag{1}$$

如果存在 n 个常数 s_1，s_2，$\cdots$，s_n，当我们将 $x_1=s_1$，$x_2=s_2$，$\cdots$，$x_n=s_n$ 代入方程(1) 时，能使得等号成立，即

$$a_1s_1+a_2s_2+\cdots+a_ns_n=b,$$

那么称

$$\begin{cases} x_1=s_1, \\ x_2=s_2, \\ \quad\vdots \\ x_n=s_n \end{cases} \tag{2}$$

是方程(1) 的一个解．如果(2) 是方程(1) 的解，并且 s_1，s_2，$\cdots$，s_n 都为实数，那么称(2) 为方程(1) 的实数解．

现在我们给出线性方程组的定义．

定义 1.3　设 m, n 是两个正整数. 由 m 个 n 元线性方程按如下形式构成的集合

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{3}$$

称为 $m \times n$ 线性方程组.

在线性方程组(3)中，未知数的系数是用双下标来描述的，a_{ij} 是第 i 个方程中第 j 个未知数 x_j 的系数；b_i 是第 i 个方程的常数项.

因为线性代数中涉及的方程组都是线性的，所以我们经常将线性方程组简称为方程组.

我们用 **F** 表示实数集 **R** 或者复数集 **C**. 显然，**F** 中两个数的和、差、积、商(零不为除数)仍然在 **F** 中. 在本书中，未加特别说明的常数都在 **F** 中. 我们将系数和常数项都在数集 **F** 中的方程组称为 **F** 上的方程组.

下面给出方程组的解的定义.

定义 1.4　如果存在 n 个常数 s_1, s_2, $\cdots$, s_n, 使得

$$\begin{cases} x_1 = s_1, \\ x_2 = s_2, \\ \quad\vdots \\ x_n = s_n \end{cases} \tag{4}$$

是线性方程组(3)中所有方程的解，那么称(4)为线性方程组(3)的一个解.

如果(4)是方程组(3)的一个解，我们也称(4)满足方程组(3). 根据定义，一组常数满足方程组的所有方程才叫做方程组的一个解，只要有一个方程得不到满足，这组常数就不是方程组的解.

对于实数集 **R** 上的线性方程组，我们通常只考虑其实数解.

例 1.1　考虑下列线性方程组：

(1) $\begin{cases} x_1 + x_2 = 33, \\ 2x_1 + 4x_2 = 100; \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 3, \\ 2x_1 + 4x_2 = 5. \end{cases}$

判断其是否有解，如果有解的话，解是否唯一.

解　(1) 这个方程组有唯一解$\begin{cases} x_1 = 16, \\ x_2 = 17. \end{cases}$

(2) 这个方程组有解，并且$\begin{cases} x_1 = 1, \\ x_2 = 1, \\ x_3 = 1 \end{cases}$和$\begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 = 3, \\ x_3 = 0 \end{cases}$都是它的解，因此这个方程组的解不唯一.

(3) 容易验证这个方程组无解. ■

一般来说，一个线性方程组可能有解，也可能无解；在有解的情况下，其解可能唯一，也可能不唯一.

有了线性方程组的这些基本概念，就可以提出关于线性方程组我们所要研究的基本问题.

问题 1　如何判断一个线性方程组是否有解?

问题 2　如果一个线性方程组有解，如何判断其解是否唯一?

问题 3　如何求出有解线性方程组的解?

本章的主要任务就是要解决这 3 个问题. 对于问题 1 与问题 2，我们将给出判断的充分必要条件；对于问题 3，我们将给出计算的方法.

1.2　线性方程组的初等变换

MOOC 1.2
线性方程组的初等变换

本节介绍线性方程组的初等变换.

为了解决上一节提出的关于线性方程组的基本问题，需要将方程组化简. 在化简时，要保持方程组的性质不变，也就是说，有解的方程组经过化简得到的方程组仍然是有解的，并且解构成的集合不变；无解的方程组经过化简还是无解的. 这就需要制定化简的规则，在此之前，我们定义同解方程组.

定义 1.5　设

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{1}$$

与

$$\begin{cases} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \cdots + c_{1n}x_n = d_1, \\ c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + \cdots + c_{2n}x_n = d_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ c_{t1}x_1 + c_{t2}x_2 + \cdots + c_{tn}x_n = d_t \end{cases} \tag{2}$$

都是以 x_1, x_2, $\cdots$, x_n 为未知数的线性方程组. 如果方程组(1)的解都是方程组(2)的解, 并且方程组(2)的解也都是方程组(1)的解, 那么方程组(1)与方程组(2)称为是同解的.

根据定义, 如果方程组(1)与方程组(2)是同解的, 那么方程组(1)是无解的当且仅当方程组(2)是无解的.

所谓求解线性方程组就是将方程组化为简单的同解方程组, 从而判断出原方程组是否有解, 并且在有解的时候, 求出它的全部解. 于是我们需要引入线性方程组的初等变换.

定义 1.6 对线性方程组所作的以下 3 种变形:

(1) 互换方程组中第 i 个方程与第 j 个方程的位置,

(2) 将方程组中的第 i 个方程乘非零常数 h,

(3) 将方程组中的第 i 个方程的 k 倍加到第 j 个方程上,

统称为线性方程组的初等变换.

例 1.2 对线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4, \\ 2x_1 + 4x_2 - 6x_3 + 4x_4 = 8, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 = 2, \\ 3x_1 + 6x_2 - 9x_3 + 7x_4 = 9 \end{cases} \tag{3}$$

作 3 种初等变换: 互换方程组(3)中的第 1 个方程与第 3 个方程的位置, 将方程组(3)中的第 2 个方程乘常数$\frac{1}{2}$, 将方程组(3)中的第 1 个方程的 (-2)倍加到第 3 个方程上. 求经过变换得到的线性方程组.

解 (1) 互换方程组(3)中的第 1 个方程与第 3 个方程的位置, 得到的方程组为

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 = 2, \\ 2x_1 + 4x_2 - 6x_3 + 4x_4 = 8, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4, \\ 3x_1 + 6x_2 - 9x_3 + 7x_4 = 9. \end{cases}$$

（2）将方程组(3)中的第 2 个方程乘$\frac{1}{2}$，得到的方程组为

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 4, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 = 2, \\ 3x_1 + 6x_2 - 9x_3 + 7x_4 = 9. \end{cases}$$

（3）将方程组(3)中第 1 个方程的(-2)倍加到第 3 个方程上，得到的方程组为

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4, \\ 2x_1 + 4x_2 - 6x_3 + 4x_4 = 8, \\ \quad\; - 5x_2 + 5x_3 - 3x_4 = -6, \\ 3x_1 + 6x_2 - 9x_3 + 7x_4 = 9. \end{cases}$$ ■

从例 1.2 我们看到了 3 种初等变换在线性方程组上是怎样进行的．经过初等变换，线性方程组的形式发生了变化，那么初等变换前后的方程组有什么样的关系呢？为了回答这一问题，我们先给出一个引理．

引理 1.1　如果对线性方程组作一次初等变换得到另一个线性方程组，那么这两个方程组是同解的．

证明　设

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \quad\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{4}$$

是一个 $m \times n$ 线性方程组．下面按照 3 种初等变换讨论 3 种情况．

情况 1　设互换方程组(4)中的第 i 个方程与第 j 个方程(不妨假设 $i < j$)得到的方程组为

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \quad\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \cdots + a_{jn}x_n = b_j, \\ \quad\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = b_i, \\ \quad\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{5}$$

因为方程组(4)与方程组(5)只是方程的排列顺序不同，所以它们是同解

的．

情况 2　设方程组(4)中第 i 个方程乘非零常数 h 得到的方程组为

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \qquad\cdots\cdots\cdots\cdots \\ ha_{i1}x_1 + ha_{i2}x_2 + \cdots + ha_{in}x_n = hb_i, \\ \qquad\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{6}$$

这时候方程组(4)与方程组(6)只有第 i 个方程不同，其余方程都是一样的．因为 $h\neq 0$，所以线性方程

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = b_i$$

与线性方程

$$ha_{i1}x_1 + ha_{i2}x_2 + \cdots + ha_{in}x_n = hb_i$$

是同解的．因此，方程组(4)与方程组(6)是同解的．

情况 3　设方程组(4)中的第 i 个方程的 k 倍加到第 j 个方程上(不妨假设 $i<j$)得到的方程组为

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \qquad\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = b_i, \\ \qquad\cdots\cdots\cdots\cdots \\ (ka_{i1} + a_{j1})x_1 + (ka_{i2} + a_{j2})x_2 + \cdots + (ka_{in} + a_{jn})x_n = kb_i + b_j, \\ \qquad\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{7}$$

这时候，方程组(4)与方程组(7)只有第 j 个方程不同，其余方程都是一样的．设

$$\begin{cases} x_1 = s_1, \\ x_2 = s_2, \\ \quad\vdots \\ x_n = s_n \end{cases} \tag{8}$$

是方程组(4)的解，那么我们有

$$a_{i1}s_1 + a_{i2}s_2 + \cdots + a_{in}s_n = b_i, \tag{9}$$

$$a_{j1}s_1 + a_{j2}s_2 + \cdots + a_{jn}s_n = b_j. \tag{10}$$

将等式(9)的 k 倍加到等式(10)上，得到

$$(ka_{i1} + a_{j1})s_1 + (ka_{i2} + a_{j2})s_2 + \cdots + (ka_{in} + a_{jn})s_n = kb_i + b_j,$$

这表明(8)是方程组(7)中第 j 个方程的解，所以(8)是方程组(7)的解．于是方程组(4)的解都是方程组(7)的解．

反过来，设(8)是方程组(7)的解，则有

$$a_{i1}s_1+a_{i2}s_2+\cdots+a_{in}s_n=b_i, \tag{11}$$

$$(ka_{i1}+a_{j1})s_1+(ka_{i2}+a_{j2})s_2+\cdots+(ka_{in}+a_{jn})s_n=kb_i+b_j, \tag{12}$$

将等式(11)的$(-k)$倍加到等式(12)上，得到

$$a_{j1}s_1+a_{j2}s_2+\cdots+a_{jn}s_n=b_j,$$

这表明(8)是方程组(4)中第 j 个方程的解，所以(8)是方程组(4)的解．于是方程组(7)的解都是方程组(4)的解．

因此，方程组(4)与方程组(7)是同解的．

综合以上 3 种情况可知，对方程组作一次初等变换得到的方程组与原方程组是同解的．■

反复利用引理 1.1 的结论，我们可以得到下面的定理．

定理 1.1　如果对一个线性方程组作有限次初等变换得到另外一个线性方程组，那么这两个线性方程组是同解的．■

这个定理等价于说对一个有解的方程组作初等变换不改变这个方程组的解构成的集合，对一个无解的方程组作初等变换得到的方程组还是无解的．因此，可以用初等变换化简方程组．

1.3　解线性方程组的消元法

MOOC 1.3
解线性方程组的消元法

现在我们看一个用初等变换求有解线性方程组的解的例子．

例 1.3　求解方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2-2x_3+x_4=4, \\ 2x_1+4x_2-6x_3+4x_4=8, \\ 2x_1-3x_2+x_3-x_4=2, \\ 3x_1+6x_2-9x_3+7x_4=9. \end{cases} \tag{1}$$

解　将方程组(1)的第 1 个方程乘-2分别加到第 2 与第 3 两个方程上，将第 1 个方程乘-3加到第 4 个方程上，消去第 2、第 3 与第 4 个方程中的未知数 x_1，得到

$$\begin{cases} x_1+x_2-2x_3+x_4=4, \\ 2x_2-2x_3+2x_4=0, \\ -5x_2+5x_3-3x_4=-6, \\ 3x_2-3x_3+4x_4=-3. \end{cases} \tag{2}$$

将方程组(2)中的第 2 个方程乘$\frac{1}{2}$，得到

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4, \\ x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ -5x_2 + 5x_3 - 3x_4 = -6, \\ 3x_2 - 3x_3 + 4x_4 = -3. \end{cases} \tag{3}$$

将方程组(3)中的第 2 个方程乘 5 加到第 3 个方程上，第 2 个方程乘-3 加到第 4 个方程上，消去第 3 与第 4 两个方程中的未知数 x_2，得到

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4, \\ x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_4 = -6, \\ x_4 = -3. \end{cases} \tag{4}$$

互换方程组(4)中的第 3 与第 4 两个方程，得到

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4, \\ x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ x_4 = -3, \\ 2x_4 = -6. \end{cases} \tag{5}$$

将方程组(5)中的第 3 个方程乘-2 加到第 4 个方程上，消去第 4 个方程中的未知数 x_4，并且去掉方程 0=0，得到

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4, \\ x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ x_4 = -3. \end{cases} \tag{6}$$

将方程组(6)中的第 3 个方程乘-1 分别加到第 1 与第 2 两个方程上，消去第 1 与第 2 两个方程中的未知数 x_4，得到

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 7, \\ x_2 - x_3 = 3, \\ x_4 = -3. \end{cases} \tag{7}$$

将方程组(7)中的第 2 个方程乘-1 加到第 1 个方程上，消去第 1 个方程中的未知数 x_2，得到

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = 4, \\ x_2 - x_3 = 3, \\ x_4 = -3. \end{cases} \tag{8}$$

到这里，我们就将方程组(1)化成了最简形式的方程组(8)．在方程组(8)中，每个方程中出现的第1个未知数的系数都是1，并且这些未知数只在一个方程中出现，具体地说，x_1 只在第1个方程中出现，x_2 只在第2个方程中出现，x_4 只在第3个方程中出现．

由于方程组(8)是由方程组(1)经过有限次初等变换得到的，所以根据定理1.1，方程组(8)与方程组(1)是同解的．因此，求出了方程组(8)的解，也就得到了方程组(1)的解．

将方程组(8)中每个方程的第1个未知数项留在等式左边，其余的项都移到等式右边，得到

$$\begin{cases} x_1 = 4 + x_3, \\ x_2 = 3 + x_3, \\ x_4 = -3. \end{cases} \tag{9}$$

在方程组(9)中，令 x_3 等于任意一个常数 c，得到方程组(8)的一个解

$$\begin{cases} x_1 = 4 + c, \\ x_2 = 3 + c, \\ x_3 = c, \\ x_4 = -3. \end{cases}$$

进一步地，如果$\begin{cases} x_1 = s_1, \\ x_2 = s_2, \\ x_3 = s_3, \\ x_4 = s_4 \end{cases}$是方程组(8)的一个解，那么令 $s_3 = c$，则有

$$\begin{cases} s_1 = 4 + c, \\ s_2 = 3 + c, \\ s_3 = c, \\ s_4 = -3. \end{cases}$$

这就是我们在前面得到的方程组(8)的解．因此，方程组(1)的解的一般形式为

$$\begin{cases} x_1 = 4 + c, \\ x_2 = 3 + c, \\ x_3 = c, \\ x_4 = -3, \end{cases}$$

其中 c 为任意常数．■

例 1.3 中的方程组(1)有无穷多个解，最后给出的对所有解的描述称为方程组(1)的通解. 只有当一个方程组有无穷多个解的时候，才有通解的概念. 在通解中一定含有任意常数，这种任意常数可以是一个也可以是多个，这是由方程组决定的.

例题中解方程组的方法称为高斯消元法[①]. 从解题过程可以看出，消元法分为两个阶段：第 1 个阶段是从方程组(1)到方程组(6)的过程，在这一阶段里，我们是用方程组中上面方程的未知数去消下面方程中的未知数，消去未知数的下标是递增的；第二个阶段是从方程组(6)到方程组(8)，在这一阶段里，我们是用下面方程中的未知数去消上面方程中的未知数，消去未知数的下标是递减的. 这样做的目的是为了减少计算次数，提高效率.

从前面的讨论以及求解线性方程组的过程可以看出以下几个事实：

(1) 在求解方程组的过程中，方程是作为一个整体参加运算的，运算是在相同未知数的系数之间以及常数项之间进行的，未知数不参加运算；

(2) 线性方程 $a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n=b$ 与有序数组$(a_1, a_2, \cdots, a_n, b)$是一一对应的，具体地说，有一个线性方程就可以写出唯一的有序数组与方程相对应，反过来，有一个有序数组，就可以构造一个唯一的线性方程与这个有序数组相对应；

(3) $m\times n$ 线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases}$$

与下面 m 个按顺序排列的有序数组

$$\begin{gathered} (a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{1n}, b_1), \\ (a_{21}, a_{22}, \cdots, a_{2n}, b_2), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ (a_{m1}, a_{m2}, \cdots, a_{mn}, b_m) \end{gathered}$$

是一一对应的.

因此，由 m 个有序数组按顺序排列而成的数表可以用来简记线性方

① 在有的文献中，这种方法被称为高斯-若尔当消元法(Gauss-Jordan elimination). 高斯(C. F. Gauss, 1777—1855)，德国数学家；若尔当(Wilhelm Jordan, 1842—1899)，德国大地测量学家，他关于解线性方程组的贡献发表在他的名著《测量手册》(Handbook of Geodesy, 1888)中.