计算流体力学

——有限体积法基础及其应用

JISUAN LIUTI LIXUE

YOUXIAN TIJIFA JICHU JIQI YINGYONG

陈丽萍 编著

苏州大学出版社

计 算 流 体 力 学

——有限体积法基础及其应用

陈丽萍　编著

苏 州 大 学 出 版 社

图书在版编目(CIP)数据

计算流体力学：有限体积法基础及其应用/陈丽萍编著. —苏州：苏州大学出版社，2016. 9
ISBN 978-7-5672-1859-8

Ⅰ. ①计… Ⅱ. ①陈… Ⅲ. ①计算流体力学 Ⅳ. ①O35

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 226995 号

内容简介

本书论述有限体积法的基本思想和特点，重点介绍稳态条件下扩散问题、对流扩散问题、压力—速度耦合问题的有限体积法. 简要介绍非稳态流动问题的有限体积和边界条件处理，讨论对方程求解收敛性和求解精度有重要影响的差分格式问题及有限体积法离散方程的基本解法，并通过多个实例一步一步讲解 FLUENT 在计算流体力学中的应用.

本书内容由浅入深，循序渐进，便于自学，可作为大专院校教材使用，也可供工程技术人员参考.

计算流体力学
——有限体积法基础及其应用
陈丽萍　编著
责任编辑　周建兰

苏州大学出版社出版发行
(地址：苏州市十梓街 1 号　邮编：215006)
宜兴市盛世文化印刷有限公司印装
(地址：宜兴市万石镇南漕河滨路 58 号　邮编：214217)

开本 787 mm×1 092 mm　1/16　印张 10.75　字数 255 千
2016 年 9 月第 1 版　2016 年 9 月第 1 次印刷
ISBN 978-7-5672-1859-8　定价：29.00 元

苏州大学版图书若有印装错误，本社负责调换
苏州大学出版社营销部　电话：0512-65225020
苏州大学出版社网址　http://www.sudapress.com

前 言

有限体积法是求解流体流动和传热问题偏微分方程的数值方法之一.近年来,计算流体力学和计算传热学发展非常迅速,许多过去只能靠实验测量和风洞模拟来研究的流动和传热问题,现在都可以用数值计算的方法由计算机来解决.由于大型计算流体力学商用软件的出现,过去只能由从事力学或流体计算的专业人员来分析的许多问题,现在一般的工程师和技术人员也可以解决.过去多半靠经验公式近似计算,现在都可以借助于流体数值计算软件自行做仔细的分析和计算.因此工科专业的学生,特别是研究生,应该学习和掌握计算流体力学的方法.

作者多年来为研究生开设计算流体力学和计算传热学课程,教学实践中发现对于工科类专业的学生来说,流体流动和传热问题是比较复杂的问题,要在有限的课时内全面掌握流体力学和传热学的基本理论和数值计算方法有一定的难度,在应用已有软件做工程分析时常处于知其然而不知其所以然的尴尬境地.因此,学生迫切需要一本突出介绍流体流动和传热数值计算核心算法,而较少涉及复杂的流体力学和传热学的原理内容的教材.在流体流动和传热问题诸多数值计算方法中,有限体积法较好地保持原微分方程的守恒性,此外其各项物理意义明确、方程形式规范.目前主要的流体流动计算软件,如 STARCD、FLUENT、FLOW3D、PHOENICS、CFX 都采用有限体积法作为其核心算法.本教材突出介绍有限体积法.

20 世纪 80 年代以来,国内出版了不少论述流体流动和传热数值计算的教材和专著.虽然对有限体积法有所介绍,但它们或涉及的内容较深,不适合非力学专业学生的学习;或篇幅过大,无法满足少学时的教学要求;或多种方法并行介绍,使初学者难以取舍,抓不住重点.李人宪教授编写的《有限体积法基础》一书较清楚地介绍了有限体积法的基本计算过程,内容适中,易于理解.作者在编写本教材时参考了此书的相关内容,并对此书中的算例进行编程计算,计算结果

通过 Tecplot 软件图形化显示. 本书还通过多个实例一步一步讲解 FLUENT 在计算流体力学中的应用. 希望读者能通过本书的学习对有限体积法的基本思想和计算原理有一个概括的了解，从而满足非力学专业学生和工程技术人员学习有限体积法和更好地应用已有软件进行工程流体分析的需求，为深入研究奠定基础.

全书第 1 章在比较几种常用的流体流动数值计算方法特点的基础上着重介绍有限体积法的基本思想和特点；第 2 章介绍扩散问题的有限体积法，从一维稳态扩散问题入手，简要介绍区域离散方法、离散方程的推导和控制容积界面值的近似计算；第 3 章介绍对流扩散问题的有限体积法，通过例题说明对流项对数值计算的影响；第 4 章从离散方程的守恒性、方程系数的有限性和流动过程的输运性出发讨论有限体积法中重要的差分格式问题；第 5 章介绍压力—速度耦合问题的有限体积算法，讨论解决压力—速度耦合问题数值计算中两个难点的方法，即交错网格算法和压力耦合问题的半隐算法(SIMPLE 算法及其改进算法)；第 6 章介绍求解三对角方程的 TDMA 算法及其在高维问题中的应用，并给出 Jacobi 迭代、Gauss-Seidel 迭代算法及其程序；第 7 章通过编程实例讨论非稳态流动问题的有限体积算法的实现过程；第 8 章介绍入口边界、出口边界、固体壁面边界、压力边界、对称边界的处理方法；第 9 章通过二维室内机械通风、二维室内自然通风、通风房间空气龄的计算、室内热舒适 PMV 和 PPD 计算及室内颗粒物运动计算五个算例说明 FLUENT 的应用. 附录介绍用 Tecplot 软件将计算结果图形化显示的过程.

本书在编写过程中得到了作者的同事张广丽及学生宣凯云、薛芳玲、金椿明的鼓励和帮助，得到了南京工业大学的大力支持，在此一并表示感谢. 由于作者水平所限，书中错误和不足之处在所难免，希望读者批评指正.

作　者

2016 年 6 月

Concent

目录

第 1 章

绪 论

§1-1 概 述

有限体积法(Finite volume method)也称为控制容积法，是一种主要用于求解流体流动和传热问题的数值计算方法. 当前人们对流体流动和传热问题已经有了比较深刻的认识. 尽管理论上还有一些不完善之处，但绝大多数流动和传热问题都可以用数学公式来描述. 例如，一般认为下面一组笛卡尔坐标系下的方程可以用来表述绝大部分流体流动和传热问题.

质量守恒方程：

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\operatorname{div}(\rho \boldsymbol{u})=0 \tag{1-1}$$

动量守恒方程：

$$\frac{\partial(\rho \boldsymbol{u})}{\partial t}+\operatorname{div}(\rho \boldsymbol{u}\boldsymbol{u})=\operatorname{div}(\mu \cdot \operatorname{grad} \boldsymbol{u})-\frac{\partial p}{\partial \boldsymbol{n}}+S_n \tag{1-2}$$

能量守恒方程：

$$\frac{\partial(\rho i)}{\partial t}+\operatorname{div}(\rho \boldsymbol{u} i)=\operatorname{div}(\lambda \cdot \operatorname{grad} T)-p \cdot \operatorname{div}(\boldsymbol{u})+\Phi+S_T \tag{1-3}$$

式中

$$\Phi=\mu\left\{2\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2\right]+\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right\}$$
$$+\lambda(\operatorname{div}(\boldsymbol{u}))^2$$

流体状态方程：

$$p=p(\rho, T) \text{和 } i=i(\rho, T) \tag{1-4}$$

式中，$\boldsymbol{u}=u\boldsymbol{i}+v\boldsymbol{j}+w\boldsymbol{k}$；$u$、$v$、$w$ 为流速在 x、y、z 坐标方向的分量；ρ 为流体密度；μ 为流体动力粘度；i 为流体内能；λ 为导热系数；p 为流体压力；S_n 为流体各方向的源(汇)；S_T 为热源.

如果流体流动状态为紊流，由于紊态流动的复杂性，直接求解上述方程组的难度较大. 工程上采用所谓时均方程加紊流模型的求解方法，即把紊流流动看作时间平均流动和脉动流动的叠加. 这种方法将控制方程对时间做平均而把脉动流动的影响用紊流模型表示. 此时一般还要额外求解关于紊流模型的方程. 例如，常用的 $k-\varepsilon$ 两方程紊流模型，还需求解下述两个方程.

紊动能 k 方程：

$$\frac{\partial(\rho k)}{\partial t}+\operatorname{div}(\rho \boldsymbol{u} k)=\operatorname{div}\left[\left(\mu+\frac{\mu_t}{\sigma_k}\right)\cdot \operatorname{grad} k\right]-\rho\varepsilon+\mu_t P_G \tag{1-5}$$

紊动耗散率 ε 方程：

$$\frac{\partial(\rho\varepsilon)}{\partial t}+\operatorname{div}(\rho \boldsymbol{u}\varepsilon)=\operatorname{div}\left[\left(\mu+\frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon}\right)\cdot \operatorname{grad}\varepsilon\right]-\rho C_2\frac{\varepsilon^2}{k}+\mu_t C_1\frac{\varepsilon}{k}P_G \tag{1-6}$$

式中

$$\mu_t=\rho C_\mu\frac{k^2}{\varepsilon}$$

$$P_G=2\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2\right]+\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2$$

C_μ、σ_k、σ_ε、C_1、C_2 为常数(适用面较广的一组为 0.09、1.00、1.30、1.44、1.92).

显然，这一组方程在数学上太过复杂，目前还无法用解析的方法将其解出. 因此，当前对流体流动和传热问题的研究除采用试验测量、试验模拟观察的方法外，在计算上主要采取两种措施：其一，根据具体问题中流体流动和传热的特征对方程进行简化，如无粘流、稳态流、不可压缩流、无热源传热、纯导热等；其二，采用数值计算的方法求解流动和传热方程. 然而，即使经过简化，相当多的流动和传热方程仍然无法用解析的方法得到理论解. 因此，数值计算方法即成为求解工程中流体流动和传热问题的最主要的方法.

§1-2 求解流体流动和传热问题的常用数值计算方法

数值计算是将描述物理现象的偏微分方程在一定的网格系统内离散，用网格节点处的场变量值近似描述微分方程中各项所表示的数学关系，按一定的物理定律或数学原理构造与微分方程相关的离散代数方程组. 引入边界条件后求解离散代数方程组，得到各网格节点处的场变量分布，用这一离散的场变量分布近似代替原微分方程的解析解. 当前求解流体流动和传热方程的数值计算方法比较多，如有限差分法、有限元法、有限体积法、边界元法、特征线法、谱方法、有限分析法、格子类方法等. 每种数值计算方法各有其特点和适用范围，其中通用性比较好、应用比较广泛的是前 4 种.

一、有限差分法

有限差分法用差商代替微商，用计算区域网格节点值构成差商，近似表示微分方程中各阶导数. 例如：

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{i,n}\approx\frac{u_i^{n+1}-u_i^n}{\Delta t} \tag{1-7}$$

节点 i 处速度对时间的一阶导数用一阶向前差分来表示，类似的可以有一阶向后差分，如：

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{i,n}\approx\frac{u_i^{n}-u_i^{n-1}}{\Delta t} \tag{1-8}$$

节点 i 处速度在 x 方向的一阶导数用一阶向前差分和向后差分来表示：

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i,n} \approx \frac{u_{i+1}^{n} - u_{i}^{n}}{\Delta x}, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i,n} \approx \frac{u_{i}^{n} - u_{i-1}^{n}}{\Delta x} \tag{1-9}$$

中心差分：

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{i,n} \approx \frac{u_{i}^{n+1} - u_{i}^{n-1}}{2\Delta t}, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i,n} \approx \frac{u_{i+1}^{n} - u_{i-1}^{n}}{2\Delta x} \tag{1-10}$$

二阶导数的差分格式：

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{i,n} \approx \frac{u_{i+1}^{n} - 2u_{i}^{n} + u_{i-1}^{n}}{\Delta x^2} \tag{1-11}$$

当然也可以用二阶差分(三点差分)来表示差商.将表示场变量一阶导数和二阶导数的差商近似取代微分方程,就可以得到关于各网格点处的差分方程.求解这一组代数方程,可得各节点处的场变量数值解.

事实上,上述近似式是通过对求解域中某点进行 Taylor 展开得到的.例如,欲求点(x_j, t_{n+1})处的未知函数值 u_j^{n+1},由参考点(x_j, t_n)进行 Taylor 展开,有

$$u_j^{n+1} = u_j^n + \Delta t\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{j,n} + \frac{\Delta t^2}{2!}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)_{j,n} + \frac{\Delta t^3}{3!}\left(\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}\right)_{j,n} + \cdots \tag{1-12}$$

即

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{j,n} = \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} - \frac{\Delta t}{2!}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)_{j,n} - \frac{\Delta t^2}{3!}\left(\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}\right)_{j,n} + \cdots \tag{1-13}$$

忽略掉二阶导数项及其更高阶导数项,就可得到关于时间向前差分的一阶导数近似表达式：

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{j,n} \approx \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t}$$

忽略掉各项之和引起的误差叫作截断误差,所忽略掉的最低阶导数前系数中的 Δt 或 Δx 的次数表示了截断误差的阶数,阶数越高表明截断误差越小.如前述向前差分格式得截断误差为一阶,而中心差分格式的截断误差为二阶.因此中心差分格式的计算精度比向前差分格式的计算精度要高.

有限差分形式简单,对任意复杂的偏微分方程都可以写出其对应的差分方程.但是有限差分方程的获得只是用差商代替微分方程中的微商(导数),而微分方程中各项的物理意义和微分方程所反应的物理定律(如守恒定律)在差分方程中并没有体现.因此具有不同流动或传热特征的实际问题在微分方程中所表现的特点,在差分方程中没有得到体现.所以差分方程只能认为是对微分方程的数学近似,基本上没有反映其物理特征.差分方程的计算结果有可能表现出某些不合理现象.

二、有限元法

有限元法是 20 世纪 60 年代出现的一种数值计算方法.它最初用于固体力学问题的数值计算,如杆系结构,梁系结构,板、壳、体结构的受力和变形问题.

20 世纪 70 年代在英国科学家 Zienkiewicz O. C. 等人的努力下,将它推广到各类场问题的数值求解,如温度场、电磁场,也包括流场.

有限元法离散方程获得方法主要有直接刚度法、虚功原理推导、泛函变分原理推导及加权余量推导. 直接刚度法是直接从问题的物理定律、物理公式中得到有限元离散方程,它只适用于比较简单的问题,如梁单元受力变形的有限元离散方程. 虚功原理一般只用于推导弹性力学中物体受力和变形问题的计算过程. 变分原理是将微分方程求解问题转换为泛函求极值问题,再对泛函的表达式进行一定的运算得到有限元离散方程. 它可以被用于许多问题的有限元离散方程的推导,但是首先要找到与所求解问题的微分方程对应的泛函,这不是一件容易的事情,在许多情况下所要求解的微分方程没有对应的泛函. 例如,前述流体流动和传热的控制微分方程组就没有对应的泛函,因此变分原理推导法不能应用. 这时一般采用加权余量法推导. 加权余量法的思想很简单,设某物理问题的控制微分方程及其边界条件分别为

$$f(\varphi)=0 \quad (在域\ \Omega\ 内) \tag{1-14}$$

$$g(\varphi)=0 \quad (在域\ \Omega\ 边界\ S\ 上) \tag{1-15}$$

φ 为待求函数. 首先选定一个试探函数

$$\tilde{\varphi}=\sum_{i=1}^{n} c_i \varphi_i \tag{1-16}$$

式中,c_i 为待定常数;φ_i 为试探函数项.

将试探函数代入式(1-14)和式(1-15),一般来讲不可能正好满足,在域 Ω 内和边界 S 上会产生误差,即

$$f(\tilde{\varphi})=R \tag{1-17a}$$

$$g(\tilde{\varphi})=R_b \tag{1-17b}$$

式中,R 和 R_b 称为余量. 加权余量法的基本思想是在域 Ω 内或边界 S 上寻找 n 个线性无关的函数 $\delta W_i(i=1,2,\cdots,n)$,使余量 R 和 R_b 在加权平均的意义上等于零,即

$$\int_{\Omega} R \cdot \delta W_i \mathrm{d}\Omega = 0 \tag{1-18a}$$

$$\int_{\Omega} R_b \cdot \delta W_i \mathrm{d}\Omega = 0 \tag{1-18b}$$

这里 δW_i 称为权函数.

式(1-18)表明了这样一个思想:尽管 $\tilde{\varphi}$ 本身不能满足微分方程式(1-14)和式(1-15),但是当其余量与许多线性无关的权函数相乘并积分时,这个余量在总体上接近于零,也就是说 $\tilde{\varphi}$ 在积分的意义上满足微分方程式(1-14)和式(1-15). 当 n 足够大时,$\tilde{\varphi}$ 就趋近于真解 φ.

有限元法的优点是解题能力强,可以比较精确地模拟各种复杂的曲线或曲面边界,网格的划分比较随意,可以统一处理多种边界条件,离散方程的形式规范,便于编制通用的计算机程序. 因此,有限元法在固体力学方程的数值计算方面取得了巨大的成功. 但是在应用于流体流动和传热方程求解过程中却遇到了一些困难. 其原因仍可归结为按加权余量法推导出的有限元离散方程也只是对原微分方程的数学近似. 当处理流动和传热问题的守恒性、强对流、不可压缩条件等方面的要求时,有限元离散方程中各项还无法给出合理的物理解释,对计算机中出现的一些误差也难以进行改进. 因此有限元法在流体力学和传热学中的应用

还存在一些问题.

三、有限体积法

有限体积法是在有限差分法的基础上发展起来的,同时它又吸收了有限元法的一些优点.有限体积法生成离散方程的方法很简单,可以看成有限元法加权余量法推导方程中令加权函数 $\delta W=1$ 而得到的积分方程.但是方程的物理意义完全不同.首先,积分的区域是与某节点相关的控制容积;其次,积分方程表示的物理意义是控制容积的通量平衡.有限体积法推导其离散方程时以控制容积中的积分方程作为出发点,这一点与有限差分法直接从微分方程推导完全不同.另外,有限体积法获得的离散方程,物理上表示的是控制容积的通量平衡,方程中各项有明确的物理意义,这也是有限体积法与有限差分法和有限元法相比更具优势的地方.据此,有限体积法是目前在流体流动和传热问题求解中最有效的数值计算方法,已经得到了广泛的应用.

四、边界元法

边界元法是20世纪70年代后期针对有限差分法和有限元法占用计算机内存资源过多的缺点而发展起来的一种求解偏微分方程的数值计算方法.它的最大优点是降维,只在求解区域的边界进行离散就能求得整个流场的解.这样一来,三维问题降维为二维问题,二维问题降维为一维问题.人们通过小机器求解大问题的愿望就有可能实现.

边界元法的基本思想并不复杂,用边界积分方法将求解域的边界条件与域内任意一点的待求变量值联系起来,然后求解边界积分方程即可.但是边界积分方程的导出却不简单.一般来讲,边界元法由于降维导致占用计算机内存资源少,计算精度较高,更适宜于大空间外部绕流计算,特别是无粘势流的计算采用边界元法有一定的优势.但是,若流体描述方程(如粘性N-S方程)本身比较复杂时,则对应的权函数算子基本解不一定能找到.因此,边界元法的应用受到很大限制.

§1-3 有限体积法的基本思想和特点

一、通用变量方程

尽管式(1-1)~式(1-3)、式(1-5)和式(1-6)是关于不同变量的方程,但它们有非常相似的形式.如果我们引入一个通用变量(或特征变量)φ,则式(1-1)~式(1-3)、式(1-5)和式(1-6)可以写成统一的形式:

$$\frac{\partial(\rho\varphi)}{\partial t}+\operatorname{div}(\rho\boldsymbol{u}\varphi)=\operatorname{div}(\Gamma\cdot\operatorname{grad}\varphi)+S_{\varphi} \tag{1-19}$$

将 φ 取为不同的变量,并取扩散系数 Γ 和源项为适当的表达式,可得到连续性方程、动量方程、能量方程、紊动能方程和紊动耗散率方程,如表1-1所示.

表 1-1 通用变量方程中各参量取值

方程	φ	Γ_φ	S_φ
连续性方程	1	0	0
x 方向动量	u	$\mu+\mu_t$	$-\frac{\partial p}{\partial x}+S_{Mx}$
y 方向动量	v	$\mu+\mu_t$	$-\frac{\partial p}{\partial y}+S_{My}$
z 方向动量	w	$\mu+\mu_t$	$-\frac{\partial p}{\partial z}+S_{Mz}$
能量方程	i	λ	$-p\cdot\mathrm{div}(\boldsymbol{u})+\Phi+S_T$
k 方程	k	$\mu+\frac{\mu_t}{\sigma_k}$	$-\rho\varepsilon+\mu_t P_G$
ε 方程	ε	$\mu+\frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon}$	$-\rho C_2\frac{\varepsilon^2}{k}+\mu_t C_1\frac{\varepsilon}{k}P_G$

因此，式(1-19)称为通用变量方程或通用输运方程，统一表示各变量在流体输运过程中的守恒关系. 这是微分意义下的守恒，即在充分小流体微团内 φ 的守恒关系为

$$\varphi_{\text{随时间的变化率}}+\varphi_{\text{由于对流的流出率}}=\varphi_{\text{由于扩散引起的增加率}}+\varphi_{\text{由于源项引起的增加率}}$$

本书后面章节介绍有限体积法时就以式(1-19)来推导过程的出发点. 式(1-19)表示了各类模型方程，如

瞬态扩散方程：

$$\frac{\partial(\rho\varphi)}{\partial t}=\mathrm{div}(\Gamma\cdot\mathrm{grad}\varphi)+S_\varphi \tag{1-20}$$

稳态扩散方程：

$$\mathrm{div}(\Gamma\cdot\mathrm{grad}\varphi)+S_\varphi=0 \tag{1-21}$$

瞬态对流扩散方程：

$$\frac{\partial(\rho\varphi)}{\partial t}+\mathrm{div}(\rho\boldsymbol{u}\varphi)=\mathrm{div}(\Gamma\cdot\mathrm{grad}\varphi)+S_\varphi \tag{1-22}$$

稳态对流扩散方程：

$$\mathrm{div}(\rho\boldsymbol{u}\varphi)=\mathrm{div}(\Gamma\cdot\mathrm{grad}\varphi)+S_\varphi \tag{1-23}$$

将源项中压力梯度项分离出来还可以表示压力—速度耦合方程等.

压力—速度耦合方程：

$$\frac{\partial(\rho\boldsymbol{u})}{\partial t}+\mathrm{div}(\rho\boldsymbol{u}\,\boldsymbol{u})=\mathrm{div}(\Gamma\cdot\mathrm{grad}\,\boldsymbol{u})-\frac{\partial p}{\partial\boldsymbol{n}}+S_\varphi \tag{1-24}$$

二、有限体积法的基本思想

有限体积法与有限元法和有限差分法一样，也要对求解域进行离散，将其分割成有限大

小的离散网格.在有限体积法中每一网格节点按一定的方式形成一个包围该节点的控制容积 V(图 1-1).

有限体积法的关键步骤是将控制微分方程式(1-19)在控制容积内进行积分,即

$$\int_V \frac{\partial(\rho\varphi)}{\partial t}\mathrm{d}V+\int_V \mathrm{div}(\rho\boldsymbol{u}\varphi)\mathrm{d}V=\int_V \mathrm{div}(\Gamma\cdot\mathrm{grad}\varphi)\mathrm{d}V+\int_V S_\varphi\mathrm{d}V \tag{1-25}$$

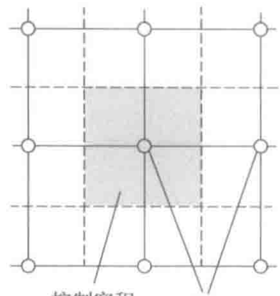

图 1-1 网格布置图

利用高斯散度定理,将式(1-25)中等号左端第二项(对流项)和等号右端第一项(扩散项)的体积分转换为关于控制容积 V 表面 A 上的面积分.

高斯散度定理表述为:对某矢量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的散度的体积分可写成如下形式:

$$\int_V \mathrm{div}(\boldsymbol{\alpha})\mathrm{d}V=\int_A \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\alpha}\mathrm{d}A \tag{1-26}$$

式中,$\boldsymbol{n}$ 为控制容积表面外法线方向的单位矢量.

奥斯特洛格拉德斯基公式表述为

$$\int_V\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}V=\int_A P\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{1-27}$$

等式左端体积分的被积函数正是矢量 $\boldsymbol{\alpha}=P\boldsymbol{i}+Q\boldsymbol{j}+R\boldsymbol{k}$ 的散度表达式.

利用式(1-26),可将式(1-25)改写为

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\int_V \rho\varphi\mathrm{d}V\right)+\int_A \boldsymbol{n}\cdot(\rho\boldsymbol{u}\varphi)\mathrm{d}A=\int_A \boldsymbol{n}\cdot(\Gamma\cdot\mathrm{grad}\varphi)\mathrm{d}A+\int_V S_\varphi\mathrm{d}V \tag{1-28}$$

这里我们将等号左端第一项中积分和微分的顺序变换了一下,以方便说明其物理意义.这一项表明特征变量 φ 的总量在控制容积 V 内随时间的变化量.而左端第二项中 $\boldsymbol{n}\cdot(\rho\boldsymbol{u}\varphi)$ 意味着特征变量 φ 由于对流流动沿控制容积表面外法线方向 $\boldsymbol{n}$ 的流动率(净流出).因此方程左端第二项表示在控制容积中由于边界对流引起的 φ 的净减少量.等式右端第一项是扩散项的积分.扩散流的正方向应为 φ 的负梯度方向.例如,热量是沿着负的温度梯度方向传导的.而 $\boldsymbol{n}$ 为控制容积表面外法线方向,因此 $\boldsymbol{n}\cdot(-\Gamma\cdot\mathrm{grad}\varphi)$ 是 φ 向控制容积外的扩散率.所以 $\boldsymbol{n}\cdot(\Gamma\cdot\mathrm{grad}\varphi)$ 就表示 φ 向控制容积内的扩散率.从而等式右端第一项的物理意义为控制容积内特征变量 φ 由于边界扩散流动引起的净增加量.

用文字表述式(1-28)表示的特征变量 φ 在控制容积内的守恒关系为

$$\varphi_{\text{随时间的变化量}}+\varphi_{\text{由于边界对流引起的净减少量}}=\varphi_{\text{由于边界扩散引起的净增加量}}+\varphi_{\text{由于内源引起的净产生量}}$$

或

$$\varphi_{\text{随时间的变化量}}=\varphi_{\text{由于边界对流进入控制容积的量}}+\varphi_{\text{由于边界扩散进入控制容积的量}}+\varphi_{\text{由内源产生的量}}$$

对于稳态问题,由于时间相关项等于零,式(1-28)成为

$$\int_A \boldsymbol{n}\cdot(\rho\boldsymbol{u}\varphi)\mathrm{d}A=\int_A \boldsymbol{n}\cdot(\Gamma\cdot\mathrm{grad}\varphi)\mathrm{d}A+\int_V S_\varphi\mathrm{d}V \tag{1-29}$$

对于瞬态问题,还需要在时间间隔 Δt 内对式(1-28)积分,以表明从时刻 t 到时刻 $(t+\Delta t)$ 的时间段内 φ 仍保持其守恒性.

$$\int_{\Delta t}\frac{\partial}{\partial t}\left(\int_V \rho\varphi \mathrm{d}V\right)\mathrm{d}t+\int_{\Delta t}\int_A \boldsymbol{n}\cdot(\rho\boldsymbol{u}\varphi)\mathrm{d}A\mathrm{d}t=\int_{\Delta t}\int_A \boldsymbol{n}\cdot(\Gamma\cdot\mathrm{grad}\varphi)\mathrm{d}A\mathrm{d}t+\int_{\Delta t}\int_V S_\varphi \mathrm{d}V\mathrm{d}t \tag{1-30}$$

三、有限体积法的特点

(1) 有限体积法的出发点是积分形式的控制方程，这一点不同于有限差分法；同时积分方程表示了特征变量 φ 在控制容积内的守恒特性，这又与有限元法不一样.

(2) 积分方程中每一项都有明确的物理意义，从而使得方程离散时，对各离散项可以给出一定的物理解释. 这一点上，其他对于流动和传热问题的数值计算方法还不能做到.

(3) 区域离散的节点网格与进行积分的控制容积分立. 一般来讲，各节点有互不重叠的控制容积. 从而整个求解域中场变量的守恒可以由各个控制容积中特征变量的守恒来保证.

正是由于有限体积法的这些特点，才使其成为当前求解流动和传热问题的数值计算中最成功的方法，现已被绝大多数工程流体和传热计算软件所采用.

小结

(1) 当前求解流体流动和传热方程的数值计算方法有：有限差分法、有限元法、有限体积法、边界元法、特征线法、谱方法、有限分析法、格子类方法等. 每种数值计算方法各有其特点和适用范围，其中通用性比较好、应用比较广泛的是前 4 种.

(2) 有限体积法对求解域进行离散，将其分割成有限大小的离散网格。在有限体积法中每一网格节点按一定的方式形成一个包围该节点的控制容积.

(3) 有限体积法的关键是将控制微分方程式在控制容积内进行积分，从而将控制微分方程转化为代数方程.

(4) 有限体积法保证了特征变量在控制容积内的守恒特性。方程离散时，各离散项可以给出一定的物理解释.

(5) 有限体积法成为当前求解流动和传热问题的数值计算中最成功的方法，已经被绝大多数工程流体和传热计算软件所采用.

第 2 章

扩散问题的有限体积法

§2-1　一维稳态扩散问题的有限体积法计算格式

一维稳态扩散问题的控制微分方程为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\Gamma\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}\right)+S=0 \tag{2-1}$$

式中，φ 可以表示任意场变量，如温度、速度、焓等；Γ 为扩散系数；S 为源项. 我们分三步来求解这一问题.

第一步：生成离散网格.

有限体积法首先将求解域划分成离散的控制容积，如图 2-1 所示，将 A—B 求解域划分成 5 个控制容积. 区域边界即为边界控制容积的外边界. 每一控制容积的中心布置一个节点.

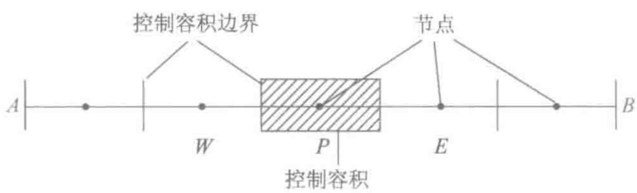

图 2-1　求解域划分

我们给出任意一个中间节点 P 代表的控制容积尺寸定义(图 2-2). P 点西侧相邻节点为 W，东侧相邻节点为 E，W 点到 P 点的距离定义为 δx_{WP}，P 点到 E 点的距离定义为 δx_{PE}；P 点所在的控制容积西侧边界为 w，东侧边界为 e，控制容积长度为 $\Delta x=\delta x_{we}$.

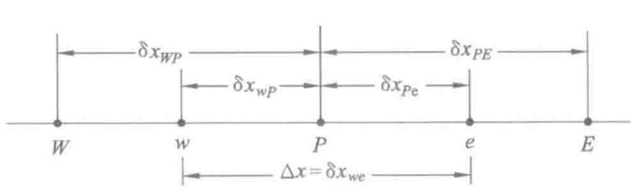

图 2-2　网格尺寸定义

第二步：方程的离散.

有限体积法是利用控制容积积分来实现方程的离散，在控制容积内对方程式(2-1)积分，并利用高斯散度定理，有

$$\int_{\Delta V}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\Gamma\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}\right)\mathrm{d}V+\int_{\Delta V}S\mathrm{d}V=\oint_{A}\boldsymbol{n}\cdot\left(\Gamma\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}\right)\mathrm{d}A+\int_{\Delta V}S\mathrm{d}V$$
$$=\left(\Gamma\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}\right)_{e}-\left(\Gamma\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}\right)_{w}+\bar{S}\Delta V=0 \tag{2-2}$$

式中，A 为控制容积表面(积分方向)的面积，ΔV 为控制容积的体积，$\bar{S}$ 为源项在控制容积中的平均值. 方程式(2-2)有十分明确的物理意义，场变量 φ 流出东侧界面的扩散流量减去进入西侧界面的扩散流量等于 φ 的生成量(由源项产生). 也就是说，场变量 φ 在控制容积内是平衡的.

要得到式(2-2)的具体形式，我们必须知道扩散系数 Γ 和场变量 φ 的梯度$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}$在控制容积东($e$)和西($w$)边界上的值. 这些值可以利用节点上的相应值由插值运算求出. 最简单的计算是线性插值. 例如，对均匀网格系统，有

$$\Gamma_{w}=\frac{\Gamma_{W}+\Gamma_{P}}{2},\ \Gamma_{e}=\frac{\Gamma_{P}+\Gamma_{E}}{2} \tag{2-3a}$$

同理

$$\left.\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}\right|_{e}\approx\frac{\varphi_{E}-\varphi_{P}}{\delta x_{PE}},\ \left.\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}\right|_{w}\approx\frac{\varphi_{P}-\varphi_{W}}{\delta x_{WP}} \tag{2-3b}$$

从而通过界面的扩散流量可为

$$\left(\Gamma A\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}\right)_{e}=\Gamma_{e}A_{e}\left(\frac{\varphi_{E}-\varphi_{P}}{\delta x_{PE}}\right),\ \left(\Gamma A\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}\right)_{w}=\Gamma_{w}A_{w}\left(\frac{\varphi_{P}-\varphi_{W}}{\delta x_{WP}}\right) \tag{2-4}$$

源项可能是常数，也可能是场变量的函数，有限体积法通常将源项线性化处理，即设

$$\bar{S}\Delta V=S_{u}+S_{P}\varphi_{P} \tag{2-5}$$

将式(2-3)、式(2-4)、式(2-5)代入式(2-2)，有

$$\Gamma_{e}A_{e}\left(\frac{\varphi_{E}-\varphi_{P}}{\delta x_{PE}}\right)-\Gamma_{w}A_{w}\left(\frac{\varphi_{P}-\varphi_{W}}{\delta x_{WP}}\right)+(S_{u}+S_{P}\varphi_{P})=0 \tag{2-6}$$

按场变量节点值整理方程式(2-6)，得

$$\left(\frac{\Gamma_{e}}{\delta x_{PE}}A_{e}+\frac{\Gamma_{w}}{\delta x_{WP}}A_{w}-S_{P}\right)\varphi_{P}=\left(\frac{\Gamma_{w}}{\delta x_{WP}}A_{w}\right)\varphi_{W}+\left(\frac{\Gamma_{e}}{\delta x_{PE}}A_{e}\right)\varphi_{E}+S_{u} \tag{2-7}$$

将方程式中各节点场变量系数归一化处理，写成 a_P、a_W、a_E，方程式(2-7)成为

$$a_{P}\varphi_{P}=a_{W}\varphi_{W}+a_{E}\varphi_{E}+S_{u} \tag{2-8}$$

式中

$$a_{W}=\frac{\Gamma_{w}}{\delta x_{WP}}A_{w},\ a_{E}=\frac{\Gamma_{e}}{\delta x_{PE}}A_{e},\ a_{P}=a_{W}+a_{E}-S_{P}$$

方程式(2-8)即为一维稳态扩散方程式(2-1)的离散方程. 对所有节点均可以列出对应的离散方程. 最后我们将会得到一组代数方程. 对于求解域边界处的控制容积积分方程要按边界条件修正各系数.

第三步：解方程组.

式(2-8)表示的方程组中每一个方程式相当于三元一次方程，因此我们得到的是一组三对角代数方程，用解线性代数方程组的任何方法都可以求解. 最后得到各节点处的场变量值