中国科学院规划教材

大学数学系列教材

# 线性代数学习指导与习题解答

主编　孙丹娜　李福乐

科学出版社

中国科学院规划教材
大学数学系列教材

# 线性代数学习指导与习题解答

主　编　孙丹娜　李福乐
副主编　黄凯美　刘振斌

科学出版社
北京

## 内 容 简 介

本书为科学出版社出版的《线性代数》(李福乐主编)的配套辅导,是编者多年教学经验的总结.本书每章内容包括主要内容、基本要求、典型方法举例、课后习题详解、考研真题选解.其中,主要内容列出了各章的基本概念和常用的重要结论;基本要求指出了各章中每一部分内容应该掌握到什么程度,便于读者在复习时能合理分配力量;典型方法举例列举了各种解题方法的典型例题;课后习题详解对《线性代数》每一章的习题进行了全面详细的解答;考研真题选解为准备考研的学生准备了往年的研究生考试线性代数试题,并进行解答,便于学生了解考研题型和难度.

本书不仅适用于高等农业院校的学生使用,也可作为林、水、医等院校的学生学习《线性代数》的指导书,也可作为报考农、林、水、医院校的研究生考生的复习参考书.

**图书在版编目(CIP)数据**

线性代数学习指导与习题解答/孙丹娜,李福乐主编.—北京:科学出版社,2016.12

中国科学院规划教材.大学数学系列教材

ISBN 978-7-03-050661-0

Ⅰ.①线… Ⅱ.①孙… ②李… Ⅲ.①线性代数-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 274251 号

责任编辑:王 静 / 责任校对:张凤琴

责任印制:白 洋 / 封面设计:迷底书装

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码:100717

http://www.sciencep.com

保定市中画美凯印刷有限公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2017 年 1 月第 一 版 开本:720×1000 1/16

2017 年 1 月第一次印刷 印张:11 3/4

字数:237 000

**定价:28.00 元**

(如有印装质量问题,我社负责调换)

## 《线性代数学习指导与习题解答》编委会


主　编　孙丹娜　李福乐

副主编　黄凯美　刘振斌

编　委　(以姓名笔画为序):

邢海龙　刘　倩　许　洋　杨　雪

吴　慧　辛永训　赵　静　徐　英

# 前　　言

本书是《线性代数》(李福乐主编)的配套教材,是编者多年教学经验的总结.本书不仅适用于高等农业院校,也可作为林、水、医等院校的学生学习《线性代数》的指导书,也可作为报考农、林、水、医院校的研究生考生的复习参考书.

本书主要包括:一、基本内容,列出了各章的基本概念和常用的重要结论;二、基本要求,指出各章中每一部分内容应该掌握到什么程度,便于读者在复习时能合理分配力量;三、典型方法举例,列举各种解题方法的典型例题;四、课后习题详解,对《线性代数》每一章的习题进行了全面详细的解答;五、考研真题选解,为准备考研的学生准备了往年研究生考试线性代数试题,并做了解答,便于学生了解考研题型和难度.总之,本书内容丰富,解答明确,启发性强,只要认真学习,既能巩固所学的理论知识,又能有效地提高运算能力和技巧,还可提高读者分析问题和解决问题的能力.

本书第一章由孙丹娜、许洋编写,第二章由孙丹娜、刘倩编写,第三章由李福乐、辛永训编写,第四章由杨雪、黄凯美编写,第五章由吴慧、刘振斌编写,第六章由徐英、邢海龙编写.

本书在编写过程中,得到很多同行专家的关心和支持,在此表示衷心感谢.由于水平所限,书中难免存在不妥之处,敬请读者批评指正.

编　者

2016 年 12 月

# 目　　录

# 第一章　行　列　式

## 一、主 要 内 容

**1. 基本概念**

(1) $n$ 阶行列式.

设 $P$ 是一个数域，$a_{ij}\in P, i,j=1,2,\cdots,n$.

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

叫做一个 $n$ 阶行列式，其值定义为

$$D=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}.$$

(2) $n$ 阶行列式的其他定义形式：

① $D=\sum\limits_{i_1i_2\cdots i_n}(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)}a_{i_11}a_{i_22}\cdots a_{i_nn}$.

② $D=\sum(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)+\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}$.

(3) 余子式和代数余子式.

在 $n$ 阶行列式 $D=|a_{ij}|$ 中，去掉元素 $a_{ij}$ 所在的第 $i$ 行和第 $j$ 列，剩下的 $(n-1)^2$ 个元素按照原来的相对位置构成的 $n-1$ 阶行列式叫做元素 $a_{ij}$ 的余子式，记作 $M_{ij}$；$M_{ij}$ 再加上符号 $(-1)^{i+j}$ 叫做 $a_{ij}$ 的代数余子式，记作 $A_{ij}$，即

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}.$$

(4) $k$ 阶子式及其余子式和代数余子式.

在一个 $n$ 阶行列式 $D=|a_{ij}|_n$ 中，任意选定 $k$ 行 $k$ 列 $(1\leqslant k\leqslant n)$，位于这 $k$ 行 $k$ 列交叉位置上的 $k^2$ 个元素，按照原来的相对位置所构成的 $k$ 阶行列式 $N$ 叫做 $D$ 的 $k$ 阶子式；在 $D$ 中去掉 $N$ 所在的行和列剩下的元素按照原来的相对位置所构成的 $n-k$ 阶行列式 $M$ 叫做 $N$ 的余子式.

若 $N$ 位于 $D$ 的第 $i_1,i_2,\cdots,i_k$ 行和 $j_1,j_2,\cdots,j_k$ 列，则把 $N$ 的余子式 $M$ 前边再加上符号 $(-1)^{(i_1+i_2+\cdots+i_k)+(j_1+j_2+\cdots+j_k)}$ 后叫做 $N$ 的代数余子式.

(5) 行列式的转置

设

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

是一个 $n$ 阶行列式,则称 $n$ 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

为 $D$ 的转置行列式,记作 $D^{\mathrm{T}}$ 或 $D'$.

**2. 主要结论**

(1) $D^{\mathrm{T}}=D$.

(2) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$.

若 $D$ 的某行元素全为 0,则 $D=0$.

(3) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1}+c_{i1} & b_{i2}+c_{i2} & \cdots & b_{in}+c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$.

(4) 对换行列式两行(列)的位置,行列式改变符号.

① 若 $D$ 的两行(列)元素相同,则 $D=0$.

② 若 $D$ 的两行(列)元素对应成比例,则 $D=0$.

(5) 把行列式的某一行(列)的 $k$ 倍加到另一行(列)的对应元素上去,行列式的值不变.

(6) 设 $D=|a_{ij}|_n$,则有

$$\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{jk}=\begin{cases}D, & i=j,\\ 0, & i\neq j,\end{cases}\quad \text{或}\quad \sum_{k=1}^{n}a_{ki}A_{kj}=\begin{cases}D, & i=j,\\ 0, & i\neq j.\end{cases}$$

(7) 拉普拉斯定理:行列式 $D$ 中任意 $k$ 行(列)元素所包含的所有 $k$ 阶子式和它们的代数余子式的乘积之和等于 $D$.

(8) 上(下)三角形行列式其值等于主对角线元素之积. 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & * & \cdots & * \\ 0 & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ * & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ * & \cdots & * & a_{nn} \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

(9)

$$\begin{vmatrix} * & \cdots & * & a_1 \\ \vdots & \iddots & a_2 & 0 \\ * & \iddots & \iddots & \vdots \\ a_n & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ \vdots & \iddots & a_2 & * \\ 0 & \iddots & \iddots & \vdots \\ a_n & * & \cdots & * \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{i=1}^{n} a_i.$$

(10) 范德蒙德(Vandermonde)行列式:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (a_j - a_i).$$

## 二、基本要求

(1) 理解行列式的概念,掌握行列式的展开式中项的构成和符号.

(2) 会应用行列式的性质和行列式按行(列)展开定理计算具体的数字行列式和简单的 $n$ 阶抽象行列式.

(3) 了解克拉默法则及其应用.

## 三、典型方法举例

### 1. 定义法

**例 1** 计算行列式 $D_n = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 2 \\ 0 & 0 & \cdots & 3 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & n & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$.

**解** 行列式的元素位于不同行不同列上,所以此行列式的非零项只有一项,即式中非零元素的乘积项,所以只需确定该项的符号即可,即可得结果.

$$D_n=(-1)^{\tau(1,n,n-1,\cdots,2)}n!\ =(-1)^{0+0+1+2+\cdots+n-2}n!\ =(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}n!.$$

**2. 化三角形法**

**例 2**　求行列式$\begin{vmatrix}1&-2&-1&4\\-1&2&-1&0\\1&-1&0&2\\2&1&1&0\end{vmatrix}$的值.

**解**

$$\begin{vmatrix}1&-2&-1&4\\-1&2&-1&0\\1&-1&0&2\\2&1&1&0\end{vmatrix}\xlongequal[r_4-2r_1]{\substack{r_2+r_1\\r_3-r_1}}\begin{vmatrix}1&-2&-1&4\\0&0&-2&4\\0&1&1&-2\\0&5&3&-8\end{vmatrix}\xlongequal{r_2\leftrightarrow r_3}-\begin{vmatrix}1&-2&-1&4\\0&1&1&-2\\0&0&-2&4\\0&5&3&-8\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_4-5r_2}-\begin{vmatrix}1&-2&-1&4\\0&1&1&-2\\0&0&-2&4\\0&0&-2&2\end{vmatrix}\xlongequal{r_4-r_3}-\begin{vmatrix}1&-2&-1&4\\0&1&1&-2\\0&0&-2&4\\0&0&0&-2\end{vmatrix}=-4.$$

**例 3**　计算行列式 $D_n=\begin{vmatrix}1&2&3&\cdots&n-1&n\\1&-1&0&\cdots&0&0\\0&2&-2&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&2-n&0\\0&0&0&\cdots&n-1&1-n\end{vmatrix}$.

**解**　$D_n=\begin{vmatrix}1&2&3&\cdots&n-1&n\\1&-1&0&\cdots&0&0\\0&2&-2&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&2-n&0\\0&0&0&\cdots&n-1&1-n\end{vmatrix}\xlongequal[(i=2,\cdots,n)]{c_1+c_i}\begin{vmatrix}\frac{n(n+1)}{2}&2&3&\cdots&n-1&n\\0&-1&0&\cdots&0&0\\0&2&-2&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&2-n&0\\0&0&0&\cdots&n-1&1-n\end{vmatrix}$

$$=\frac{n(n+1)}{2}\begin{vmatrix}-1&0&\cdots&0\\2&-2&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&n-1&1-n\end{vmatrix}_{n-1}=\frac{n(n+1)}{2}(-1)^{n-1}(n-1)!$$

$$=\frac{(-1)^{n-1}(n+1)!}{2}.$$

**3. 递推法**

**例 4** 计算行列式 $D_n=\begin{vmatrix} 4 & 3 & & & & \\ 1 & 4 & 3 & & & \\ & 1 & 4 & 3 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & 4 & 3 \\ & & & & 1 & 4 \end{vmatrix}$.

**解** 按第一行展开，

$D_n=4D_{n-1}-3D_{n-2}=(1+3)D_{n-1}-(1\times 3)D_{n-2}$，

$D_n-D_{n-1}=3(D_{n-1}-D_{n-2})=3^2(D_{n-2}-D_{n-3})=\cdots=3^{n-2}(D_2-D_1)=3^n$，

得递推公式：

$$D_n-D_{n-1}=3^n, \tag{1}$$

$D_n-3D_{n-1}=D_{n-1}-3D_{n-2}=D_{n-2}-3D_{n-3}=\cdots=D_2-3D_1=1$，

得递推公式：

$$D_n-3D_{n-1}=1. \tag{2}$$

由(1),(2)可得

$$D_n=\frac{1}{2}(3^{n+1}-1).$$

推广结论：

$$D_n=\begin{vmatrix} \alpha+\beta & \alpha\beta & & & & \\ 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & & & \\ & 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta \\ & & & & 1 & \alpha+\beta \end{vmatrix}=\frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta}.$$

**4. 数学归纳法**

**例 5** 证明 $n$ 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & x+a_1 \end{vmatrix}=x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}x+a_n.$$

**证明** 用数学归纳法证明.

当 $n=2$ 时，$D_2=\begin{vmatrix} x & -1 \\ a_2 & x+a_1 \end{vmatrix}=x^2+a_1x+a_2$，假设对于 $(n-1)$ 阶行列式命题成立，即

$$D_{n-1}=x^{n-1}+a_1x^{n-2}+\cdots+a_{n-2}x+a_{n-1},$$

则 $D_n$ 按第一列展开：

$$D_n=xD_{n-1}+a_n\,(-1)^{n+1}\begin{vmatrix}-1&0&\cdots&0&0\\x&-1&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&x&-1\end{vmatrix}_{n-1}=xD_{n-1}+a_n=\text{右边},$$

所以，对于 $n$ 阶行列式，命题成立.

**例 6**　用归纳法证明

$$D_n=\begin{vmatrix}x&a&a&\cdots&a&a\\-a&x&a&\cdots&a&a\\-a&-a&x&\cdots&a&a\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\-a&-a&-a&\cdots&-a&x\end{vmatrix}_n$$

$$=\frac{1}{2}[(x+a)^n+(x-a)^n].$$

**证明**　当 $n=2$ 时，$D_2=x^2+a^2=\frac{1}{2}[(x+a)^2+(x-a)^2]$，故 $n=2$ 时，等式成立；假设当 $n\leqslant k-1$ 时，等式成立，那么，当 $n=k$ 时，

$$D_k=\begin{vmatrix}x&a&a&\cdots&a&a\\-a&x&a&\cdots&a&a\\-a&-a&x&\cdots&a&a\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\-a&-a&-a&\cdots&-a&x\end{vmatrix}_k\xlongequal{c_1+c_k}\begin{vmatrix}x+a&a&a&\cdots&a&a\\0&x&a&\cdots&a&a\\0&-a&x&\cdots&a&a\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\x-a&-a&-a&\cdots&-a&x\end{vmatrix}_k$$

$$\xlongequal{\text{按 }c_1\text{ 展开}}(x+a)D_{k-1}+(-1)^{k+1}(x-a)\begin{vmatrix}a&a&\cdots&a&a\\x&a&\cdots&a&a\\-a&x&\cdots&a&a\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\-a&-a&\cdots&a&a\\-a&-a&\cdots&x&a\end{vmatrix}_{k-1}.$$

从第一行开始，每一行与后一行换行，将第一行调到最后一行，

$$\text{原式}=(x+a)D_{k-1}+(-1)^{k+1}(x-a)(-1)^{k-2}\begin{vmatrix}x&a&\cdots&a&a\\-a&x&\cdots&a&a\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\-a&-a&\cdots&a&a\\-a&-a&\cdots&x&a\\a&a&\cdots&a&a\end{vmatrix}_{k-1}$$

$$=(x+a)D_{k-1}+(-1)^{2k-1}(-1)(x-a)\begin{vmatrix} x & a & \cdots & a & a \\ -a & x & \cdots & a & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ -a & -a & \cdots & a & a \\ -a & -a & \cdots & x & a \\ -a & -a & \cdots & -a & -a \end{vmatrix}_{k-1}$$

$$=(x+a)D_{k-1}+(x-a)\begin{vmatrix} x & a & \cdots & a & 0+a \\ -a & x & \cdots & a & 0+a \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ -a & -a & \cdots & a & 0+a \\ -a & -a & \cdots & x & 0+a \\ -a & -a & \cdots & -a & -a-x+x \end{vmatrix}_{k-1}$$

$$=(x+a)D_{k-1}+(x-a)[(-1)(x+a)D_{k-2}+D_{k-1}]$$

$$=(x+a)\cdot\frac{1}{2}[(x+a)^{k-1}+(x-a)^{k-1}]$$

$$+(x-a)\left\{(-1)(x+a)\cdot\frac{1}{2}[(x+a)^{k-2}+(x-a)^{k-2}]\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}[(x+a)^{k-1}+(x-a)^{k-1}]\right\}=\frac{1}{2}[(x+a)^{k}+(x-a)^{k}].$$

所以，当 $n=k$ 时，等式也成立.

故由数学归纳法知，对于 $n$ 阶行列式，命题成立.

**5. 拆行(列)法**

**例 7** 计算行列式 $D_n=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & 2 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & -1 & 2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & 2 \end{vmatrix}$.

**解**

$$D_n=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & 2 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & -1 & 2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & 2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1+1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0+(-1) & 2 & 1 & \cdots & 1 \\ 0+(-1) & -1 & 2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0+(-1) & -1 & -1 & \cdots & 2 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & 2 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & -1 & 2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & 2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 2 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & -1 & 2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & -1 & -1 & \cdots & 2 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 3 & 2 & \cdots & 2 \\ 0 & 0 & 3 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 3 \end{vmatrix}+D_{n-1}$$

$$=3^{n-1}+D_{n-1}=3^{n-1}+3^{n-2}+D_{n-2}$$

$$=\cdots=3^{n-1}+3^{n-2}+\cdots+3+D_1=\frac{3^n+1}{2}.$$

**6. 利用范德蒙德行列式展开式法**

**例 8**　计算行列式 $D_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \\ x_1^n & x_2^n & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}$.

**解**　首先要注意到 $D_n$ 不是范德蒙德行列式，因为最后一行不是 $n-1$ 次幂. 现作一个辅助的范德蒙德行列式

$$D_{n+1}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n & y \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 & y^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} & y^{n-2} \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} & y^{n-1} \\ x_1^n & x_2^n & \cdots & x_n^n & y^n \end{vmatrix}.$$

由范德蒙德行列式的展开式知

$$\begin{aligned} D_{n+1} &= \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j-x_i)\prod_{k=1}^{n}(y-x_k) \\ &= \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j-x_i)[y^n-(x_1+x_2+\cdots+x_n)y^{n-1}+\cdots+(-1)^n x_1x_2\cdots x_n]. \end{aligned}$$

另一方面，如果把 $D_{n+1}$ 按最后一列展开，又有 $D_{n+1}=A_{n+1,n+1}y^n+A_{n,n+1}y^{n-1}+\cdots+A_{1,n+1}$（其中 $A_{i,n+1}$ 为 $D_{n+1}$ 中最后一列各元素的代数余子式），注

意 $y^{n-1}$ 的代数余子式恰为所求行列式 $D_n$ 的负值,比较 $D_{n+1}$ 的两个表达式中 $y^{n-1}$ 项的系数得

$$D_n = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n}(x_j - x_i)\sum_{k=1}^{n} x_k.$$

# 四、课后习题详解

## 习 题 1

1. 求下列排列的逆序数,并说明奇偶性:

(1) 312645;(2) 2341657;(3) $n(n-1)\cdots 321$.

**解** (1) $\tau(312645)=0+1+1+0+1+1=4$,偶排列;

(2) $\tau(2341657)=0+0+0+3+0+1+0=4$,偶排列;

(3) $\tau(nn-1\cdots 321)=0+1+2+\cdots+n-1=\dfrac{n(n-1)}{2}$.

当 $n=4k,4k+1$ 时,偶排列;当 $n=4k+2,4k+3$ 时,奇排列($k=0,1,2,\cdots$).

2. 选择 $i,j$ 与 $k$,使下列九元排列为奇排列.

(1) $1274i5jk9$;(2) $718i3j26k$.

**解** (1) 因为排列 $1274i5jk9$ 中缺少 3,6,8,所以 $i,j,k$ 可取 3,6 或 8,保证排列的逆序数为奇数即可.

当 $i=3,j=6,k=8$ 时,$\tau(127435689)=0+0+0+1+2+1+1+0+0=5$ 奇排列.

同理可得 $i=6,j=8,k=3$ 或 $i=8,j=3,k=6$ 时也为奇排列.

(2) 九元排列 $718i3j26k$ 中缺少 4,5,9,所以 $i,j,k$ 可取 4,5 或 9,保证排列的逆序数为奇数即可.

当 $i=4,j=5,k=9$ 时,$\tau(718435269)=0+1+0+2+3+2+5+2+0=15$ 奇排列.

同理可得 $i=5,j=9,k=4$ 或 $i=9,j=4,k=5$ 时也为奇排列.

3. 用定义求下列行列式:

(1) $\begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & -7 \\ 4 & 6 & 10 \end{vmatrix}$;(2) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & d \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$;(3) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$;

(4) $\begin{vmatrix} & & & a_1 \\ & & a_2 & \\ & \iddots & & \\ a_n & & & \end{vmatrix}$.

**解**　(1) $\begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & -7 \\ 4 & 6 & 10 \end{vmatrix} = (-2)\times(-3)\times10+1\times(-7)\times4+4\times6\times0$

$-4\times(-3)\times0-1\times4\times10-6\times(-7)\times(-2)$

$=-92$;

(2) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & d \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{4\times(4-1)}{2}} abcd = abcd$;

(3) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} = acb+bac+bac-ccc-bbb-aaa=3abc-a^3-b^3-c^3$;

(4) $\begin{vmatrix} & & & a_1 \\ & & a_2 & \\ & \iddots & & \\ a_n & & & \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_1 a_2 \cdots a_n$.

4. 写出四阶行列式中，所有含因子 $a_{21}a_{32}$ 的项.

**解**　$(-1)^{\tau(3124)} a_{13}a_{21}a_{32}a_{44} = a_{13}a_{21}a_{32}a_{44}$，

$(-1)^{\tau(4123)} a_{14}a_{21}a_{32}a_{43} = -a_{14}a_{21}a_{32}a_{43}$.

5. 求下列行列式：

(1) $\begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix}$；　(2) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & 9 \\ -1 & 2 & 5 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 3 \end{vmatrix}$；

(3) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & a+b+c \\ a^2 & b^2 & c^2 & (a+b+c)^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & (a+b+c)^3 \end{vmatrix}$；　(4) $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 3 & \cdots & 3 \\ 3 & 4 & 3 & \cdots & 3 \\ 3 & 3 & 4 & \cdots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 3 & 3 & 3 & \cdots & 4 \end{vmatrix}$.