运筹学基础

林惠玲 编著

中国建材工业出版社

运筹学基础

林惠玲　编著

中国建材工业出版社

图书在版编目(CIP)数据

运筹学基础/林惠玲编著. —北京 ：中国建材工业出版社，2016.7
ISBN 978-7-5160-1581-0

Ⅰ. ①运… Ⅱ. ①林… Ⅲ. ①运筹学-高等学校-教材 Ⅳ. ①O22

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 167498 号

内 容 简 介

本书以线性规划与单纯形法为主线，系统地阐述了线性规划对偶理论和灵敏度分析、图与网络优化、运输问题和博弈论基础，同时介绍了非线性规划基础。全书共 6 章，每章结尾都配有一定数量的习题。此外，本书以 MATLAB 实验的方式给出动态规划、线性目标规划和网络计划的相关内容，具体介绍求解相应实际问题的 MATLAB 程序。本书注重阐明运筹学基本理论和经典算法的数学思想，借助几何直观通俗易懂，兼顾理论、算法和应用，是一本运筹学的入门教材。

本教材主要针对数学与应用数学专业、信息与计算科学专业本科生编写，同时也可作为经济、管理、金融、工程等相关专业本科生的参考教材。

运筹学基础
林惠玲 编著

出版发行：中国建材工业出版社
地 址：北京市海淀区三里河路 1 号
邮 编：100044
经 销：全国各地新华书店
印 刷：北京雁林吉兆印刷有限公司
开 本：787mm×1092mm 1/16
印 张：11.5
字 数：280 千字
版 次：2016 年 7 月第 1 版
印 次：2016 年 7 月第 1 次
定 价：38.00 元

本社网址：www.jccbs.com.cn 微信公众号：zgjcgycbs
本书如出现印装质量问题，由我社市场营销部负责调换。联系电话：(010) 88386906

前　　言

运筹学（Operations Research，OR）是一门定性分析（如建立数学模型）与定量方法（如求解数学模型）相结合的综合应用学科，广泛运用现有的科学技术和数学方法，解决实际问题，为决策者选择最优或较优方案提供定量依据。运筹学作为一门新兴的学科，是在第二次世界大战期间出现的。此后，美国数学家 George B. Dantzig 于 20 世纪 40 年代末 50 年代初提出了求解线性规划问题的单纯形法，这成为运筹学发展史上最重大的进展之一，使得二战后的运筹学在方法论上得到了很大的发展，形成了许多分支，而计算机的发展和广泛应用，使得运筹学的方法论能成功及时地解决大量经济管理中的决策问题。目前，运筹学在管理科学、系统科学、工业工程等领域有着广泛的应用。运筹学的教学有利于增强学生的实际工作能力，特别是科学决策的能力。因此，运筹学目前已成为所有高等院校经济管理类专业的专业必修课程。同时，考虑到大学生就业的需要，或是经济社会发展的需要，以及计算机的普及、运筹学软件的开发和学生知识的储备，运筹学也成为很多高校非经济管理类专业的选修课。

本书作者在多年从事运筹学和相关科研工作成果的基础上，参考了国内外相关专著、教材和期刊文献编写了本书。全书包含 6 章和 4 个 MATLAB 实验，全书的内容可用 51～68 学时授完，以下简要介绍这本书的内容。第 1 章线性规划和单纯形法，从二维线性规划的图解法出发，介绍单纯形法的几何表现形式，直观地阐明单纯形法的设计思想。本章分别详细地阐述了表格单纯形法和修正单纯形法，其中后者是前者在计算机上的实现，此外还证明了单纯形法的收敛性并讨论退化情况的处理方式。第 2 章对偶理论和灵敏度分析，利用线性不等式组引出标准不等式形式线性规划问题的对偶问题，并讨论其对偶理论，再把相关结论推广到一般形式的线性规划问题，并讨论对偶理论与线性不等式组的关系；接着探讨对偶单纯形法，最后利用对偶理论进行灵敏度分析的讨论。第 3 章图与网络优化，网络优化是特殊的一类线性规划问题，其中的一类重要问题——最小费用流问题（包括最短路问题和最大流问题）是本章考虑的对象，本章细致地阐述了网络单纯形法基本原理和求解过程。第 4 章运输问题，该问题是特殊的最小费用流问题，利用问题的特殊结构，本章详细讨论了运输单纯形法求解产销平衡的运输问题，对于产销不平衡的问题将在本章的习题中介绍。此外，本章利用摄动法解决退化情

形的运输问题。第 5 章博弈论基础，主要阐述二人零和博弈，也称矩阵博弈，利用线性规划的对偶理论证明了矩阵博弈的基本定理，即最小最大值定理，并介绍了求解矩阵博弈的线性方程组方法和线性规划方法，此外本章的习题还给出双矩阵博弈与线性互补问题的关系。第 6 章非线性规划基础，以学生的先修课程数学分析或高等数学中的费尔马定理为基础，探讨无约束优化问题的最优性条件和约束优化问题的最优性条件及拉格朗日对偶理论，其中对偶理论是利用博弈论的思想来阐述。第 1 章到第 6 章的结尾都给出一定数量的习题，这些习题有些是对章节知识点的巩固，有些是对知识点的提升和补充。实验一到实验四分别介绍了用 MATLAB 软件解决动态规划、线性目标规划、网络计划和博弈论中的相关实际问题。

由此可见，本书的特色在于：第一，以线性规划和单纯形法为主线，各章节的内容联系紧密，衔接完好。第二，对于大部分的同类书籍中，关于对偶问题均是直接给出，并未道出其所以然，本书利用了初等代数工具——线性不等式组的线性运算，自然地引出对偶问题，于是便有了利用对偶理论解决线性不等式组的方法。第三，运用博弈论理论解释非线性规划的拉格朗日对偶理论，显得通俗易懂。第四，本书运用 MATLAB 实验的方式介绍运筹学的其他分支，即动态规划、线性目标规划和网络计划问题，同时列举了用 MATLAB 程序解决应用问题的实例，加强了学生的数学建模和用计算机解决实际问题的能力。

本书在编写过程中得到国家自然科学基金委数学天元基金（11526053），教育部留学回国人员科研启动基金“非精确 PB 算法研究及其在大规模凸锥规划中应用和凸锥规划的误差分析”，福建省教育厅科技项目（JA15106）的部分支持，在此深表感谢。

本书在编写过程中还参考了新加坡南洋理工大学数理学院副教授 Chua Chek Beng 主讲课程“Basic Optimization”的讲义，在此表示衷心感谢。

尽管本书作者多年来一直从事运筹与优化的研究和教学，但限于水平和时间，书中难免有不妥和错误之处，欢迎读者批评指正。

作者

2016 年 4 月

目　　录

第 1 章　线性规划和单纯形法

线性规划是运筹学中研究较早的一个重要分支，它的理论较为完善，方法较成熟，广泛应用于军事作战、经济分析、经营管理和工程技术等方面。

线性规划的历史可追溯到 19 世纪 20 年代。法国数学家 J. B. J. Fourier（以 Fourier 级数而闻名）和比利时数学家 V. Poussin 分别于 1823 年和 1911 年独立撰写了一篇关于线性规划的文章，但并未被大众注意。1939 年，前苏联科学院院士 L. V. Kantorovich 出版了一本关于线性规划模型及其解的书——《生产管理和计划的数学方法（Mathematical Method of Production Management and Planning)》，却未受到重视，而且学术界也不知晓。同样的，1941 年美国数学家和物理学家 F. L. Hitchcock 关于运输问题的文章也未被公众了解。到 20 世纪 40 年代末 50 年代初，受到经济和军事计划问题的驱动，美国数学家 George B. Dantzig 提出单纯形法（Simplex Method)，他因此被誉为“线性规划之父”。

单纯形法是线性规划的所有算法中，甚至所有的数值算法中应用最广泛的一种。在单纯形法产生的同时代，出现了线性规划的其他算法，但它们都因比不过单纯形法的有效性而被淘汰。1984 年，印度数学家 N. Karmarkar 发表了求解线性规划的内点算法，它不仅具有多项式时间的复杂性（这样的算法被认为是好算法），而且在实际操作中也很简便快速，至此单纯形法才遇到它在线性规划王国中的劲敌。单纯形法用于解决确定型马尔可夫决策过程，也具有多项式时间的复杂度[1]，然而它在一般情况下具有指数函数的时间复杂度。在科研工作者的努力下，单纯形法不断被改进，取得了令人欣慰的数值结果，与内点算法并驾齐驱。虽然需要解决的问题规模越来越大，但是计算机的功能也越来越强，而且单纯形法较易于实施，目前人们仍青睐于用它求解线性规划[2]。此外，由于单纯形法是源于经济中的应用，因而单纯形法中的一些术语带有经济学的味道，比如我们通常所说的降低价格和影子价格，它们在很多应用中具有指导性意义。

本章主要讨论线性规划解的性质和单纯形法的基本形式。首先简要介绍优化模型的相关术语和线性规划的实例，接着从二维线性规划问题的图解法出发，阐述单纯形法的直观几何含义，从而得到它的几何形式，在此基础上讨论线性规划解的性质，结合几何形式得到单纯形法的代数形式，并探讨用表格形式的单纯形求解具体问题，包括标准不等式形式的表格单纯形法和标准等式形式的大 M 法及两阶段法，最后介绍修正单纯形法，它是表格单纯形法在计算机上的实现。

§1.1 优化模型概述

1.1.1 一般优化模型

优化模型（Optimization Model）是描述优化问题（Optimization Problem）的数学模型（Mathematical Model）。数学模型是指用数学语言来描述一个系统。例如，我们可以用微分方程来描述人口模型。每个模型都含有若干个参数用于描述模型所表述问题的特定部分，比如，人口的指数增长模型中的人口增长率和初始时刻的人口数量。一个优化问题要求从所有的可行方案中选择最好（最大或最小，下文分别用 max 和 min 表示）的方案。一个可行方案是指满足特定约束条件的任一决策的实施。在比较两个可行方案中，该优化问题要么给每个方案确定一个特定的量，要么按照一定的原则在所有的方案中给出一个特定的序。

本书中，我们做如下假设：

（1）每个决策都可以用一个实数来量化；

（2）所做的决策是有限个；

（3）所有的参数都是实数；

（4）所有的约束都能用实值函数方程或不等式表示；

（5）一个可行方案都赋予一个实数，它是决策在可行方案中取值的函数，两个可行方案的比较是比较它们所赋的值。

在优化模型中，我们将用到如下相关术语：

决策变量（Decision Variable）代表需要做的决策，为实变量。把有限个（n 个）决策变量放在一起称为**决策向量（Decision Vector）**，记做 $x=(x_1,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$。赋了值的决策向量即为**解（Solution）**，是一个 n 维向量。决策变量的函数称为**目标函数（Objective Function）**。对应一个解，都有一个实数赋给一个可行方案，赋予该可行方案的实数称为**目标值（Objective Value）**。

称所有决策变量的取值范围为**集约束（Set Constraint）**。若每个决策变量的取值都是一个非负区间，则这个集合也称为非负约束集。**函数约束（Functional Constraint）**是指用实值函数方程或不等式表示的约束。**约束函数（Constraint Functions）**是指函数约束中的函数，它们是决策变量的实值函数。**可行解（Feasible Solution）**是满足所有约束条件的解。**可行域（Feasible Region）**指所有可行解的集合。当可行域为空集时，我们称该优化问题是**不可行的（Infeasible）**，即**无可行解**。

例如，考虑数学模型

$$
\begin{aligned}
\min\quad & f(x)=(x_1-1)^2+(x_2-1)^2\\
s.t.\quad & h(x)=x_1+x_2-1=0\\
& g(x)=-x_1^2+x_2\geqslant 0\\
& x\in\mathcal{S}=\{(x_1,x_2)^{\mathrm{T}}:x_1^2+x_2^2\leqslant 1,x_1\geqslant 0\}
\end{aligned}
$$

其中，$f(x)$ 是目标函数，函数约束是 $h(x)=0,g(x)\geqslant 0$，集约束是 $x\in\mathcal{S}$，可行域是 $\{x$

$\in \mathcal{S}: h(x)=0, g(x) \geqslant 0\}$。集约束 $\{x_1: x_1 \geqslant 0\}$ 为非负约束。

具有“最好”的目标值的可行解称为**最优解（Optimal Solution）**，最优解的目标值即为**最优值（Optimal Value）**。一般地，一个优化问题可能没有最优解（即便它有可行解），也可能有多个最优解。在有多个最优解的情况下，最优值是唯一的。给定一个值，如果总存在一个比这个值更好的目标值的可行解，我们称该优化模型是**无界的（Unbounded）**，或是有**无界解**。

建立优化模型需要考虑如下三个步骤：

（1）理清所要做的决策，并赋予每个决策一个值，这就是确定决策变量及集约束；

（2）用一个确切的决策变量的函数表示目标的要求，实现最大或最小，即目标函数的确定；

（3）找出所有的约束，每个约束用一个决策变量的函数方程或是不等式来表示，即函数约束的确定。

1.1.2　线性规划模型

线性规划模型存在于国民经济的很多重要领域，如产品的生产计划安排、原料的合理配制、肿瘤的放射治疗设计及空气污染的有效控制等。

例 1.1　某家具直销生产公司生产高质量的家具产品，经过市场调查后，决定将生产能力转移到有较大销售潜力的两个新产品。

产品 1：实木框架钢化玻璃台面餐桌

产品 2：实木框架大理石台面餐桌

该公司拥有 3 个工厂，钢化玻璃可在工厂 1 制造，大理石可在工厂 2 加工，生产实木框架和餐桌的组装在工厂 3 完成。每生产一批的产品 1 和 2 分别可以获利 4 万元和 3 万元。生产一批的产品 1，在工厂 1 和 3 所需的单位生产时间分别是 4 小时和 3 小时，生产一批的产品 2，在工厂 2 和 3 所需的单位生产时间分别是 2 小时和 2 小时。同时，工厂 1，2 和 3 在一个生产周期内可用的单位生产时间分别是 12 小时，10 小时和 13 小时。应如何安排生产计划使该公司的获利最多？

解　这是个产品的生产计划安排问题，其数学模型表述如下：

（1）决策变量与集约束的确定

x_1, x_2 分别表示在生产周期内生产产品 1 和 2 的批数，而且 $x_1, x_2 \geqslant 0$。

（2）目标函数的建立

两个产品的总利润是 $z=4x_1+3x_2$。

（3）函数约束的构造

这部分的约束来源于生产时间数的限制，工厂 1 的限制是不等式约束 $4x_1 \leqslant 12$，工厂 2 的限制为不等式约束 $2x_2 \leqslant 10$，工厂 3 的限制为不等式约束 $3x_1+2x_2 \leqslant 13$。

该工厂的目标是使其利润最大化，因此该问题的优化模型是

$$
\begin{aligned}
\max \quad & z=4x_1+3x_2 \\
s.t. \quad & 3x_1+2x_2 \leqslant 13 \\
& 4x_1 \leqslant 12 \\
& 2x_2 \leqslant 10 \\
& x_1, x_2 \geqslant 0
\end{aligned}
\tag{1.1}
$$

例 1.2 某公司生产需要原料 A 不少于 125 吨，A，B 两种原料不少于 350 吨。加工每吨 A 和 B 分别需要 2 小时和 1 小时，但总的加工时间不超过 600 小时。同时每吨原料 A 和 B 的价格分别是 2 万元和 3 万元。问在满足生产需要的前提下，在公司加工能力范围内，如何购买 A，B 两种原料，使得购进成本最低？

解 设购买 A，B 两种原料分别为 x_1 吨，x_2 吨，那么这个配料问题的优化模型是

$$
\begin{aligned}
\min \quad & z = 2x_1 + 3x_2 \\
s.t. \quad & x_1 \geqslant 125 \\
& x_1 + x_2 \geqslant 350 \\
& 2x_1 + x_2 \leqslant 600 \\
& x_1, x_2 \geqslant 0
\end{aligned}
$$

目标函数是决策变量的线性函数，并要求实现最大化或是最小化，可行域是由有限个线性等式或是线性不等式来描述的一个优化模型，称为**线性规划**（**Linear Programming**）。

对于一个优化模型，它的求解通常是指找到一个最优解。当一个模型无可行解或是有无界解时，得出相对应的结论也是对该模型的求解。然而，有些优化模型有可能既无最优解，又不是不可行或无界的。幸运的是，线性规划不会出现这种情况。因此，对于一个线性规划问题，它的求解是指下面的三种情形之一：

（1）判定该模型是不可行的；

（2）判定该模型是无界的；

（3）找到该模型的一个最优解。

§1.2 线性规划的图解法

对于决策变量不多于两个的线性规划问题，例如上述的产品生产计划的优化模型，我们可以采取图解法求解。图解法形象直观，有助于理解求解线性规划问题的基本原理。单个变量的线性规划问题的求解是显而易见的。我们首先考虑只含有两个变量的线性规划问题。若要判别一个线性规划模型可行与否，需要检查它的可行域是否为空集，因而需要把它的可行域在二维平面上画出。图 1.1 中阴影区域包括边界的五边形 $OP_1P_2P_3P_4$ 是例 1.1 的可行域。为了分析目标函数在可行域上的取值情况，画出对应于目标函数的一组平行线，也就是方程 $x_2 = -\frac{4}{3}x_1 + \frac{z}{3}$ 在 z 取不同值时对应的一组直线，如图 1.2 中的虚线，这些虚线称为**等值线**。等值线上的箭头方向表示目标函数值增加的方向，即当 z 的取值从小变大时，相应的直线 $x_2 = -\frac{4}{3}x_1 + \frac{z}{3}$ 沿其法线方向向右上方移动。当等值线移动到边界点 $P_3(1,5)$ 时，z 取得最大值。

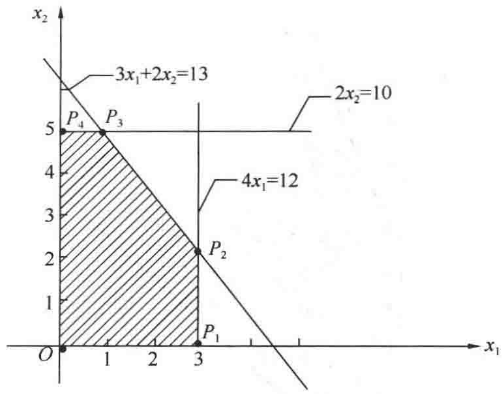

图 1.1　例 1.1 的可行域

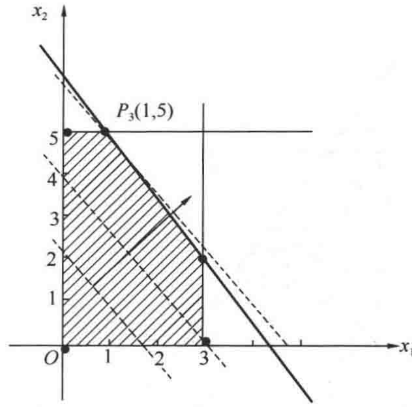

图 1.2　例 1.1 的可行域和等值线

一般地，线性规划问题的求解结果会出现如下四种情况，在这里以两个变量的线性规划的图解法加以说明，在 § 1.5 和 § 1.6 中，我们利用单纯形法再次验证下述结论。

1. 唯一解

从上述的图解法求解例 1.1 的过程中，得到它的最优解为边界点 $P_3(1,5)$，此时最优解是唯一的。

2. 无穷多最优解

若目标函数的等值线和可行域的边界线平行，则该线性规划问题有无穷多个最优解。例如线性规划问题：

$$
\begin{aligned}
\max \quad & z = 4x_1 + 3x_2 \\
s.t. \quad & 4x_1 + 3x_2 \leqslant 13 \\
& 4x_1 \leqslant 12 \\
& 2x_2 \leqslant 10 \\
& x_1, x_2 \geqslant 0
\end{aligned}
$$

其图解法求解结果如图 1.3 所示，线段 P_2P_3 上的所有点都是最优解。

3. 无界解

考虑线性规划问题：

$$
\begin{aligned}
\max \quad & z = 6x_1 - x_2 \\
s.t. \quad & -2x_1 + x_2 \leqslant 4 \\
& x_1 - x_2 \leqslant 2 \\
& x_1, x_2 \geqslant 0
\end{aligned}
$$

它的图解法求解结果如图 1.4 所示，其中可行域是无界的。当目标函数的等值线向右边移动时，等值线对应的目标值增大。同时，等值线可以向右边无限移动都不会离开可行域，因此目标函数可以增大到无穷大，从而该问题有无界解。

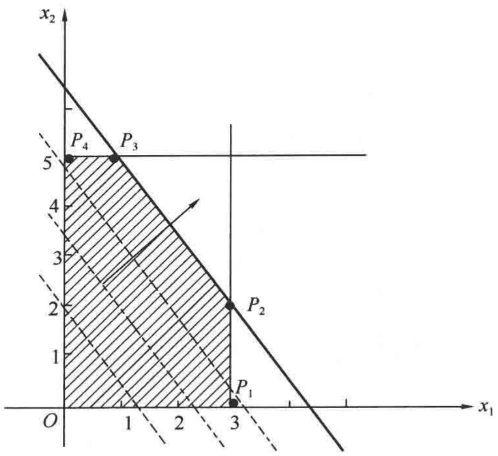

图 1.3　无穷多最优解的情况

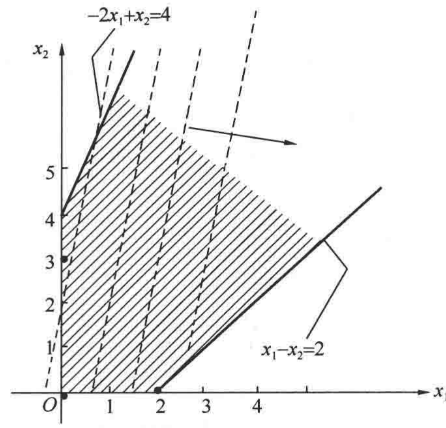

图 1.4　无界解的情况

需要注意的是，可行域无界并不意味着有无界解，例如与该线性规划相近的问题：

$$
\begin{aligned}
\min \quad & z = 6x_1 - x_2 \\
s.t. \quad & -2x_1 + x_2 \leqslant 4 \\
& x_1 - x_2 \leqslant 2 \\
& x_1, x_2 \geqslant 0
\end{aligned}
$$

有唯一解 $(x_1, x_2) = (0,4)$。

4. 无可行解

考虑线性规划问题：

$$
\begin{aligned}
\max \quad & z = 4x_1 + 3x_2 \\
s.t. \quad & x_1 + x_2 \leqslant -1 \\
& x_1, x_2 \geqslant 0
\end{aligned}
$$

该模型的可行域是空集，故无可行解，因此无最优解。

§1.3　单纯形法的几何意义

图解法是求解只有两个变量的线性规划的一个有力工具。然而，它的局限性在于只有当问题的可行域能被画出来的前提下才能使用。因此，一般有 $n(\geqslant 3)$ 个变量的线性规划问题，除非能够形象化其可行域，无法用图解法求解。然而，若从代数的角度去理解图解法，并用合适的代数形式来描述它，我们就能把图解法的思想推广到 n 个变量的情况。

从之前的图解法求解结果中，我们发现：

(1) 图解法得到一个位于可行域的顶点的最优解；

(2) 有可能有多个最优解，但是至少有一个解在顶点得到；

(3) 若在两个顶点同时得到最优解，那么它们连线上的任一点都是最优解。

利用顶点的代数表示形式，我们可以证明上述的结论总是正确的（本章 1.6.2 节定

理 1.7)。因而，我们在寻找最优解时只要关注可行域的顶点即可。

1.3.1 单纯形法的几何描述

为了阐述单纯形法的几何特征，这里首先介绍几个基本概念。

1. 凸集

设 $K \subseteq \mathbb{R}^n$，若对任意两点 $X^{(1)}, X^{(2)} \in K$ 及 $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$，有 $\alpha X^{(1)} + (1+\alpha) X^{(2)} \in K$，则称 K 为凸集。

由定义可知，空集是凸集。对于平面上的点集 K，直观上，如果连接 K 中任意两点的线段必定包含于 K，则 K 为平面上的凸集。例如平面上的圆面 $\{(x_1, x_2)^{\mathrm{T}}: x_1^2 + x_2^2 \leqslant 1\}$ 和例 1.1 的可行域都是凸集，而圆周 $\{(x_1, x_2)^{\mathrm{T}}: x_1^2 + x_2^2 = 1\}$ 不是凸集。此外，任何两个凸集的交集是凸集，如点集

$$\{(x_1, x_2)^{\mathrm{T}}: (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 \leqslant 1, (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 1)^2 \leqslant 4\}$$

2. 凸组合

设 $X^{(1)}, X^{(2)}, \cdots, X^{(k)} \in \mathbb{R}^n$，若存在 $\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_k \in [0,1]$，且 $\sum_{i=1}^{k} \mu_i = 1$，使得

$$X = \mu_1 X^{(1)} + \mu_2 X^{(2)} + \cdots + \mu_k X^{(k)}$$

则称 X 为 $X^{(1)}, X^{(2)}, \cdots, X^{(k)}$ 的凸组合（若 $\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_k \in (0,1)$，则称为严格凸组合）。

例如，平面上的三角形 $X^{(1)} X^{(2)} X^{(3)}$，如图 1.5 所示，其中点的坐标 $X = (7,9)$，$X^{(1)} = (2,10)$，$X^{(2)} = (10,16)$，$X^{(3)} = (18,3)$，那么

$$X = \frac{5}{8} X^{(1)} + \frac{1}{8} X^{(2)} + \frac{1}{4} X^{(3)}$$

3. 顶点

设 K 是凸集，$X \in K$，若 X 不能表示为 K 中不同两点 $X^{(1)}, X^{(2)}$ 的严格凸组合，则称 X 是 K 的一个顶点（或极点）。

例如，图 1.5 中的 $X^{(1)}, X^{(2)}, X^{(3)}$ 都是顶点。

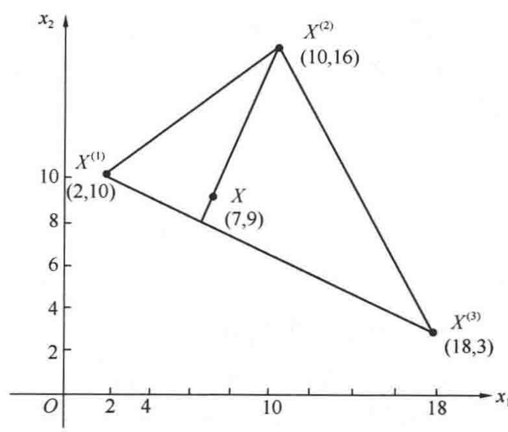

图 1.5　三角形 $X^{(1)} X^{(2)} X^{(3)}$

4. 边

设点集 K 和线段 $l \subseteq K$，若对于任意和 l 相交而不在 l 中的线段的两个顶点，至少有一个顶点在 K 外，则称 l 为边。

例如，图 1.1 中的线段 $P_1 P_2$ 是边。

单纯形是几何中常见的图形，如零维的点，一维的线段，二维平面上的三角形，三维的四面体，n 维空间中的 $n+1$ 个顶点的多面体等。假设线性规划有一个最优解位于可行域的一个顶点，单纯形法是从所有的顶点中寻找线性规划的最优解的系统过程。几何上，它可以非正式地描述如下：

步 1　从可行域的一个顶点（初始单纯形）开始移动。

步 2　如果该顶点的目标值等于或是好于（依目标而定）其相邻的所有顶点的目标值，那么该顶点就是最优解。

步 3 否则，移向更好（依目标而定）的相邻顶点，即确定新的单纯形（连接相邻两个顶点的线段），并转到步 2。

我们进一步把上述步骤具体化：

步 1 初始点的选取。

如果原点 $(x_1,\cdots,x_n)=(0,\cdots,0)$ 是顶点，那么可以简单方便地把它选为初始点。

步 2 最优性检测。

为了比较与当前顶点相邻顶点的目标值，我们只需判断当目标函数的等值线沿着连接当前顶点和与它相邻顶点的边移动时，目标值是增加、减少还是不变。首先需要确定以当前顶点为起点的所有的边和沿着这些边移动目标函数值增加的方向。如果沿着某条边在可行域内移动时，能够使目标函数值增加，那么这条边的另一个点就是更好的点。如果沿着以当前顶点为出发点的所有的边在可行域内移动，都不能使目标函数值增加，那么当前顶点就是最优解。

步 3 移到下一顶点。

步 2 已经得到一条边以及沿着它移动使目标函数值增加的方向，目标函数的等值线可以按该方向沿着这条边尽可能地移动直到其刚脱离可行域。这意味着我们需要寻找等值线沿着该方向移动时碰到的第一个边界（来自函数约束或非负约束），该边界与这条边的交点就是下一个顶点。

图 1.1 是产品生产计划安排问题例 1.1 的可行域，其中有五个顶点，每个顶点都恰由 $n=2$ 个约束边界确定。**约束边界**是指由线性不等式约束或非负约束所确定的半空间的边界。称这相应的约束函数或是非负约束为**积极的**。确定顶点的线性方程组称为顶点的**定义方程组**。

例 1.3 图 1.1 中的顶点 P_1 的坐标为 $(3,0)$，它是由函数约束 $4x_1\leqslant 12$ 和非负约束 $x_2\geqslant 0$ 确定的；函数约束 $4x_1\leqslant 12$ 和非负约束 $x_2\geqslant 0$ 是积极的。顶点 $(3,0)$ 的定义方程组是

$$\begin{cases}4x_1=12\\x_2=0\end{cases}$$

1.3.2 基本可行解

1. 线性规划问题的标准形式

从之前的产品计划和配料问题等例子，我们知道线性规划问题有各种不同的形式。我们将会看到这些多种形式的数学模型通过一定的变换都能化为如下标准形式（SF)，而且单纯形法的代数形式要求作用在该标准形式上。

$$\begin{aligned}\max\quad & z=c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n\\ s.t.\quad & a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1\\ & a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2\\ & \qquad\vdots\\ & a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m\\ & x_1,x_2,\cdots,x_n\geqslant 0\end{aligned}\tag{SF}$$

或是

$$
\begin{aligned}
\max \quad & z=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\
s.t. \quad & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, i=1,\cdots,m \\
& x_1,x_2,\cdots,x_n \geqslant 0
\end{aligned} \tag{1.2}
$$

在上述标准形式中，本章规定 $b_i \geqslant 0$，否则等式两端同乘以 -1。

上述模型的向量形式为：

$$
\begin{aligned}
\max \quad & z=c^{\mathrm{T}}x \\
s.t. \quad & \sum_{j=1}^{n} p_j x_j = b \\
& x_1,x_2,\cdots,x_n \geqslant 0
\end{aligned}
$$

其中，$c=(c_1,\cdots,c_n)^{\mathrm{T}}$

$$
x=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, p_j=\begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}, b=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}
$$

其矩阵形式为：

$$
\begin{aligned}
\max \quad & z=c^{\mathrm{T}}x \\
s.t. \quad & Ax=b \\
& x \geqslant \mathbf{0}
\end{aligned}
$$

其中，

$$
A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}=[p_1,p_2,\cdots,p_n], \mathbf{0}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}
$$

A 称为约束条件的系数矩阵，b 称为资源向量，c 称为价格向量。

在后续的章节中，我们将会经常遇到如下的线性规划问题：

$$
\begin{aligned}
\max \quad & z=c_1 x_1+c_2 x_2+\cdots+c_n x_n \\
s.t. \quad & a_{11} x_1+a_{12} x_2+\cdots+a_{1n} x_n \leqslant b_1 \\
& a_{21} x_1+a_{22} x_2+\cdots+a_{2n} x_n \leqslant b_2 \\
& \qquad \vdots \\
& a_{m1} x_1+a_{m2} x_2+\cdots+a_{mn} x_n \leqslant b_m \\
& x_1,x_2,\cdots,x_n \geqslant 0
\end{aligned} \tag{SIF}
$$

我们称之为线性规划的标准不等式形式（SIF），相应的向量形式和矩阵形式分别是：

向量形式：

$$
\begin{aligned}
\max \quad & z=c^{\mathrm{T}}x \\
s.t. \quad & \sum_{j=1}^{n} p_j x_j \leqslant b \\
& x_1,x_2,\cdots,x_n \geqslant 0
\end{aligned}
$$

矩阵形式：

$$
\begin{aligned}
\max \quad & z=c^{\mathrm{T}}x \\
s.t. \quad & Ax \leqslant b \\
& x \geqslant \mathbf{0}
\end{aligned}
$$

注意到式（SIF）中的函数约束