



高中数学竞赛专题讲座丛书

代数分册

高中数学竞赛解题策略

GAOZHONG SHUXUE JINGSAI
JIETI CELUE

沈文选 杨清桃 编著

 ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

高中数学竞赛解题策略

代 数 分 册

沈文选 杨清桃 编著



ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS

浙江大学出版社

图书在版编目 (CIP) 数据

高中数学竞赛解题策略. 代数分册 / 沈文选, 杨清桃编著. — 杭州: 浙江大学出版社, 2012. 5 (2012. 10 重印)
ISBN 978-7-308-09868-7

I. ①高… II. ①沈…②杨… III. ①代数课—高中—教学参考资料 IV. ①G634. 603

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2012) 第 068270 号

高中数学竞赛解题策略——代数分册

沈文选 杨清桃 编著

责任编辑 杨晓鸣 吴慧(特邀)
封面设计 刘依群
出版发行 浙江大学出版社
(杭州市天目山路 148 号 邮政编码 310007)
(网址: <http://www.zjupress.com>)
排 版 杭州大漠照排印刷有限公司
印 刷 德清县第二印刷厂
开 本 787mm×1092mm 1/16
印 张 30.75
字 数 748 千
版 次 2012 年 5 月第 1 版 2012 年 10 月第 2 次印刷
书 号 ISBN 978-7-308-09868-7
定 价 58.00 元

版权所有 翻印必究 印装差错 负责调换

浙江大学出版社发行部邮购电话 (0571)88925591

前言

如果说“熟悉基本手法,看透数式实质”是求解代数难题的重要前提,“融通基本手法,认识数式形式”是求解代数竞赛题的重要保证,那么“点击基本手法,触摸特色数式”就是求解代数竞赛题的重要策略.一个人解决代数问题体现出来的能力,其实质是根据问题情景运用各种手法重组已知的代数模式(简称为“数式”),能正确、迅速地检索、选择和提取相关数式的知识,并及时转化为适当的操作程序.对于一个数式,从不同的侧面(角度)运用不同的手法和已知的各类概念考察它时,它显示出丰富多彩的形式.执行某种操作程序,就是运用某种方法求解数式问题,就是将数式问题变换成某种模式及展现变换成模式的全过程.因而,我们有理由说,对数式问题形式的认识是其解题方法的实质.因此,为了在各级各类数学竞赛中取得好的成绩,对代数问题的处理,应着眼于数式形式的变化和对变换形式手法的认识,并熟悉它、融通它.有些数式暂时处理不了,往往可能是对这个数式还没有较深入的认识,或者这个数式变形还不到位.

对数式形式的认识及变形手法的认识,有四重境界:

第一重境界,看山不见山,看水不见水.对形式无识,水中无鱼.对这个数式的认识及数式的处理方式除书本或老师介绍之外,不知怎么处理,只有一点肤浅的认识.

第二重境界,看山是山,看水是水.对形式有些认识,知道可按照已学过的某类模式处理,或套用已学某公式、定理处理.

第三重境界,看山不是山,看水不是水.见形式思其特性,授之以渔.这个数式可变形处理,可将其他知识迁移过来处理.

第四重境界,看山还是山,看水还是水.见形式识其特性,悟其渔识.这个数式有多种灵活处理手法,有时还有某种巧妙的处理方案,并且对其背景有一定的了解.

我们以不等式:设 $a, b, c \in \mathbf{R}_+$, 则 $a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc$ 的证明为例说明之.

首先,可知人教版教材选修 4-5 中有如下证法:

证法 1

因为 $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$

$$\begin{aligned} &= (a+b)^3 - 3a^2b - 3ab^2 + c^3 - 3abc \\ &= (a+b)^3 + c^3 - 3a^2b - 3ab^2 - 3abc \\ &= (a+b+c)[(a+b)^2 - (a+b)c + c^2] - 3ab(a+b+c) \\ &= (a+b+c)[a^2 + 2ab + b^2 - ac - bc + c^2 - 3ab] \\ &= \frac{1}{2}(a+b+c)[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2] \geq 0, \end{aligned}$$

所以, $a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc$.

还有其他证法吗?能运用已学过的 $a^2 + b^2 \geq 2ab$ 来证吗?



事实上,我们可运用凑配、分拆组合及代换,应用 $a^2 + b^2 \geq 2ab$,则有

证法 2

由

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 + c^3 + abc - abc &\geq 2\sqrt{a^3b^3} + 2\sqrt{abc^4} - abc \\ &\geq 2\sqrt{2\sqrt{a^3b^3} \cdot 2\sqrt{abc^4}} - abc \\ &= 4abc - abc = 3abc, \text{即证.} \end{aligned}$$

证法 3

由

$$\begin{aligned} A &= \frac{a^3 + b^3 + c^3}{3} \stackrel{\text{等比}}{\geq} \frac{a^3 + b^3 + c^3 + A}{4} \\ &\geq \frac{1}{2}(\sqrt{a^3b^3} + \sqrt{c^3A}) \geq \sqrt[4]{a^3b^3c^3A}, \end{aligned}$$

有 $A^4 \geq a^3b^3c^3A$, 故 $\frac{a^3 + b^3 + c^3}{3} = A \geq abc$.

证法 4

令 $abc = B$, 则

$$\begin{aligned} \frac{a^3}{B} + \frac{b^3}{B} + \frac{c^3}{B} + 1 &\geq 2\sqrt{\frac{a^3b^3}{B^2}} + 2\sqrt{\frac{c^3}{B} \cdot 1} \\ &\geq 2\sqrt{2\sqrt{\frac{a^3b^3}{B^2}} \cdot 2\sqrt{\frac{c^3}{B}}} = 4, \end{aligned}$$

故

$$\frac{a^3 + b^3 + c^3}{B} \geq 3, \text{即 } a^3 + b^3 + c^3 \geq 3B = 3abc.$$

证法 5

注意应用 2 个正数的均值不等式, 对正数 x, y, z , 有

$$(x + y + z)^2 \geq 3(xy + yz + zx) \quad (*)$$

$$\begin{aligned} \text{于是} \quad (a^3 + b^3 + c^3)^3 &= (a^3 + b^3 + c^3)^2 \cdot (a^3 + b^3 + c^3) \\ &\geq 3(a^3b^3 + b^3c^3 + c^3a^3)(a^3 + b^3 + c^3) \\ &= 3\left[\sum a^3(b^6 + c^6) + 3a^3b^3c^3\right] \text{(其中 } \sum \text{ 表循环和)} \\ &\geq 3\left(\sum 2a^3b^3c^3 + 3a^3b^3c^3\right) = 27a^3b^3c^3. \end{aligned}$$

故 $a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc$.

学习了柯西不等式、排序不等式之后, 又可得如下证法:

证法 6

利用柯西不等式及 $(a + b + c)^2 \geq 3(ab + bc + ca)$ 有

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 + c^3 &= abc \left(\frac{a^2}{bc} + \frac{b^2}{ca} + \frac{c^2}{ab} \right) \\ &\geq abc \cdot \frac{(a + b + c)^2}{bc + ca + ab} \geq 3abc. \end{aligned}$$

**证法 7**

由排序不等式,有

$$a^3 + b^3 \geq a^2b + ab^2, b^3 + c^3 \geq b^2c + bc^2, c^3 + a^3 \geq c^2a + ca^2.$$

上述三个不等式相加,有

$$\begin{aligned} 2(a^3 + b^3 + c^3) &\geq a^2b + ab^2 + b^2c + bc^2 + c^2a + ca^2 \\ &= a(b^2 + c^2) + b(c^2 + a^2) + c(a^2 + b^2) \\ &\geq 2abc + 2abc + 2abc, \end{aligned}$$

故

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc.$$

累次运用(*)式,又可得到如下证法:

证法 8

由

$$\begin{aligned} (a^3 + b^3 + c^3)^4 &\geq [3(b^3c^3 + c^3a^3 + a^3b^3)]^2 \\ &\geq 9 \cdot 3(c^3a^3 \cdot a^3b^3 + a^3b^3 \cdot b^3c^3 + b^3c^3 \cdot c^3a^3) \\ &= 27a^3b^3c^3(a^3 + b^3 + c^3), \end{aligned}$$

即有

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc.$$

如果进行灵活变形,并运用配方、放缩、分拆项等手法又可得如下证法:

证法 9

由

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 + c^3 - 3abc &= \frac{1}{2}[(b^3 + c^3) + (c^3 + a^3) + (a^3 + c^3) - 6abc] \\ &\geq \frac{1}{2}[(b^2c + bc^2) + (c^2a + ca^2) + (a^2b + ab^2) - 6abc] \\ &= \frac{1}{2}[a(b^2 + c^2) + b(c^2 + a^2) + c(a^2 + b^2) - 6abc] \\ &= \frac{1}{2}[a(b-c)^2 + b(c-a)^2 + c(a-b)^2] \geq 0, \end{aligned}$$

知

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc.$$

证法 10

由

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 + c^3 &= (\sqrt{a^3} - \sqrt{b^3})^2 + (\sqrt{c^3} - \sqrt{abc})^2 \\ &\quad + 2\sqrt{a^3b^3} + 2\sqrt{abc^4} - abc = (\sqrt{a^3} - \sqrt{b^3})^2 \\ &\quad + (\sqrt{c^3} - \sqrt{abc})^2 + 2(\sqrt[4]{a^3b^3} - \sqrt[4]{abc^4})^2 + 3abc \geq 3abc, \text{ 即证.} \end{aligned}$$

证法 11

由对称性,不妨设 $a \geq b \geq c$, 于是可设 $a = c + \alpha + \beta$, $b = c + \alpha$, $\alpha, \beta \in \bar{R}_-$, 则

$$\begin{aligned} &a^3 + b^3 + c^3 - 3abc \\ &= (c + \alpha + \beta)^3 + (c + \alpha)^3 + c^3 - 3(c + \alpha + \beta)(c + \alpha)c \\ &= 3c(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2) + (\alpha + \beta)^3 + \alpha^3 \geq 0, \end{aligned}$$

故

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc.$$

**证法 12**

注意到 $x^3 - 3x + 2 = (x-1)^2(x+2) \geq 0$, 有 $x^3 \geq 3x - 2$.

由

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 + c^3 &= a^3 + b^3 + \sqrt{a^3 b^3} \cdot \left(\frac{c}{\sqrt{ab}}\right)^3 \\ &\geq 2\sqrt{a^3 b^3} + \sqrt{a^3 b^3} \left[3\frac{c}{\sqrt{ab}} - 2\right] = 3abc, \text{ 即证.} \end{aligned}$$

证法 13

注意到 $x^3 + 2y^3 - 3xy^2 = (x-y)^2(x+2y) \geq 0$, 有 $x^3 + 2y^3 \geq 3xy^2$.

从而有 $a^3 + 2b^3 \geq 3ab^2$, $a^3 + 2c^3 \geq 3ac^2$.

上述两式相加, 并注意 $b^2 + c^2 \geq 2bc$, 有

$$2a^3 + 2b^3 + 2c^3 \geq 3a(b^2 + c^2) \geq 6abc.$$

故 $a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc$.

证法 14

由对称性, 不妨设 $a \geq b \geq c$, 则 $a^3 \geq b^3 \geq c^3$.

若令 $A = \frac{a^3 + b^3 + c^3}{3}$, 则 $a^3 \geq A, c^3 \leq A$ 且 $a^3 + c^3 - A > 0$, 从而

$(a^3 - A)(A - c^3) \geq 0$, 即 $a^3 c^3 \leq A(a^3 + c^3 - A)$.

于是, $a^3 b^3 c^3 \leq A \cdot b^3(a^3 + c^3 - A) \leq A \cdot \left[\frac{b^3 + (a^3 + c^3 - A)}{2}\right]^2 = A^3$.

故 $\frac{a^3 + b^3 + c^3}{3} \geq abc$.

如果再发散联想, 我们可以更深刻地认识这个不等式的背景及在这些背景下的呈现形式.

运用函数的观点来处理, 则有

证法 15

欲证 $a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc$, 即证 $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc \geq 0$.

考虑函数 $f(x) = x^3 - 3bcx + b^3 + c^3$, 则 $f'(x) = 3x^2 - 3bc$, 即知 $x = \sqrt{bc}$ 时, $f(x)$ 取极(最)小值, 此时,

$$f(\sqrt{bc}) = (\sqrt{bc})^3 - 3\sqrt{bc} \cdot bc + b^3 + c^3 = (b^{\frac{3}{2}} - c^{\frac{3}{2}})^2 \geq 0,$$

故 $f(x) \geq 0$, 即 $a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc$.

运用数形结合的手法来处理, 则有:

证法 16

如右图, 先以 $a^2 + b^2 + c^2$ 为长, $a + b + c$ 为宽作矩形 $ABCD$,

再以 $ab + bc + ca$ 为长, $a + b + c$ 为宽作矩形 $CDEF$.

注意到 $ab + bc + ca \leq a^2 + b^2 + c^2$,

$$\begin{aligned} \text{则 } (ab + bc + ca)(a + b + c) \\ \leq (a^2 + b^2 + c^2)(a + b + c), \end{aligned}$$

即 $S_{\text{矩形}CDEF} \leq S_{\text{矩形}ABCD}$.

	a^3	b^2	c^2	D	ab	bc	abc	E
A	a^3	S_1	S_2	S_3	abc	S_2		
a								
b	S_3	b^3	S_4	S_1	S_3	abc		
c	S_5	S_6	C^2	abc	S_4	S_2		
B				C				F



$$\text{又 } \sum_{i=1}^6 S_i + a^3 + b^3 + c^3 = S_{\text{矩形}ABCD}, \quad \sum_{i=1}^6 S_i + 3abc = S_{\text{矩形}CDEF}.$$

$$\text{从而 } a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = S_{\text{矩形}ABCD} - S_{\text{矩形}CDEF} \geq 0.$$

$$\text{故 } a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc.$$

又注意到运用抽屉原理制作出模式,则可有下述证法:

证法 17

设 $x, y, z \in \mathbf{R}_+$ 且 $xyz = 1$ 时,则知 x, y, z 中必有一个不小于 1,另一个不大于 1.不妨设为 $x \geq 1, y \leq 1$. 于是

$$(1-x)(1-y) \leq 0, \text{ 即有 } x+y \geq 1+xy.$$

$$\text{从而有 } x+y+z \geq 1+xy+z \geq 1+2\sqrt{xyz} = 3,$$

$$\text{即有 } x+y+z \geq 3.$$

$$\text{若令 } x = \frac{a^2}{bc}, y = \frac{b^2}{ca}, z = \frac{c^2}{ab}. \text{ 此时有 } xyz = 1, \text{ 且 } x, y, z \in \mathbf{R}_+.$$

则由

$$\frac{a^2}{bc} + \frac{b^2}{ca} + \frac{c^2}{ab} \geq 3, \text{ 有 } a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc.$$

证法 18

设 $x, y, z \in \mathbf{R}_+$, 有 $x+y+z = 1$ 时,则知 x, y, z 中必有一个不小于 $\frac{1}{3}$,另一个不大于 $\frac{1}{3}$.不妨设 $x \geq \frac{1}{3}, y \leq \frac{1}{3}$. 于是

$$\left(x - \frac{1}{3}\right)\left(y - \frac{1}{3}\right) \leq 0, \text{ 即有 } x+y \geq \frac{1}{3} + 3xy.$$

从而有

$$x+y+z \geq \frac{1}{3} + 3xy + z \geq \frac{1}{3} + 2\sqrt{3xyz},$$

$$\text{亦即有 } 1 \geq \frac{1}{3} + 2\sqrt{3xyz}, \text{ 即 } \frac{1}{27} \geq xyz.$$

$$\text{若令 } x = \frac{a^3}{a^3+b^3+c^3}, y = \frac{b^3}{a^3+b^3+c^3}, z = \frac{c^3}{a^3+b^3+c^3}, \text{ 此时有}$$

$$x+y+z = 1, \text{ 且 } x, y, z \in \mathbf{R}_+.$$

则由

$$\frac{a^3}{a^3+b^3+c^3} \cdot \frac{b^3}{a^3+b^3+c^3} \cdot \frac{c^3}{a^3+b^3+c^3} \leq \frac{1}{27},$$

$$\text{有 } a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc.$$

再注意到多项式知识处理,则有下述证法:

证法 19

用 $a = -b - c$ 代入式子 $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$ 得

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (-b-c)^3 + b^3 + c^3 - 3(-b-c) \cdot bc = 0.$$

注意到带余除法,由

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 - 3bcx + b^3 + c^3 \\ &= (x-a)(x^2 + ax + a^2 - 3bc) + a^3 + b^3 + c^3 - 3abc \end{aligned}$$

$$\text{知 } f(a) = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 0.$$

于是,即知 $x = a = -b - c$ 是多项式 $f(x) = x^3 - 3bcx + b^3 + c^3$ 的根,因而 $f(x)$ 有因式 $x - a$,即 $a + b + c$.



$$\begin{aligned}
 & \text{从而 } a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = a^3 - 3bca + b^3 + c^3 \\
 & = (a+b+c)[(-b-c)^2 + a(-b-c) + a^2 - 3bc] + a^3 + b^3 + c^3 - 3abc \\
 & = \frac{1}{2}[(b-c)^2 + (c-a)^2 + (a-b)^2] \geq 0
 \end{aligned}$$

故 $a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc$.

由上述证法也看到了证法 1 的实质.

最后,从加强这个不等式的角度考虑,则有:

证法 20

显然,不等式

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc + a(b-c)^2 + b(c-a)^2 + c(a-b)^2 \quad (**)$$

是不等式 $a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc$ 的加强式,证得了这个加强式,即证得了原不等式.

事实上,由(**)式的对称性,不妨设 $a \geq b \geq c > 0$,

则有 $(a-b)^2(a+b-c) \geq 0$ 及 $c(a-c)(b-c) \geq 0$,

即有 $a^3 + b^3 + 2abc \geq ab(a+b) + b^2c + a^2c$

及 $c^3 + abc \geq bc^2 + ac^2$.

上面的两个不等式相加并进行整理,即证得(**)式成立.

继续探索,还可能获得一些新的证法.这也从一个侧面说明了本书中为什么一道竞赛题在各处出现.

这本著作的撰写,是作者近些年(特别是近三年)在全国各地培训讲稿的基础上整理而成,在整理中作者参阅了《中等数学》等杂志上的大量资料,在此由衷感谢有关资料的提供者.当然也溶进了作者对奥林匹克数学研究的一些成果.这本书也区别于作者已出版的其他代数著作,以期对奥林匹克数学研究作出自己的努力,还望得到广大读者的指正!

沈文选

2012年4月

目 录

CONTENTS



前 言	1
-----------	---

第一编 点击基本手法

第 1 章 变换化归	1
------------------	---

1. 双箭头“ \Leftrightarrow ”表示	1
2. 和式变换	6
3. 阿贝尔变换	10
4. 模式变换	13

第 2 章 设想待定	16
------------------	----

1. 目标认可设想	16
2. 对象特性设想	18
3. 参数待定设想	21

第 3 章 变量替换	27
------------------	----

1. 变元替换	27
2. 整体替换	29
3. 三角替换	33
4. 分式替换	37
5. 增量替换	38
6. 常数替换	39
7. 多种替换	41



第4章 赋值探性	46
1. 赋予确定的特殊值	46
2. 多次赋予不同的特殊值	47
第5章 分拆组合	56
1. 对称局部式分拆	56
2. 裂项分拆	59
3. 和差项分拆	64
第6章 限定逼近	69
1. 抽屉限定	69
2. 排序限定	71
3. 特性限定	74
第7章 逆反转换	77
1. 反证	77
2. 另面求解	81
3. 加强命题	81
4. 逆用公式	83
第8章 退中求进	86
1. 退到简单的情形	86
2. 退到熟悉的情形	89
第9章 切换视角	92
1. 算两次	92
2. 转换角色	94
第10章 分步推进	100
1. 分成几个步骤	100
2. 分成几个层次	102
3. 分成几种情形	106
4. 运用引理	107



第 11 章 借助媒介	110
1. 参变元	110
2. 桥梯式	112
3. 分式型待定指数界限不等式	114
4. 切线函数界限不等式	115
5. 单调函数界限不等式	119
6. 待定代数式界限不等式	121
第 12 章 先猜后证	124
1. 类比性猜想	124
2. 归纳性猜想	125
3. 探索性猜想	126
4. 仿造性猜想	127
5. 审美性猜想	128
第 13 章 数形结合	131
1. 关注函数图象背景	131
2. 关注平面几何图形背景	132
3. 关注解析几何图形背景	135
4. 关注其他几何图形背景	137
第 14 章 构造推证	139
1. 构造二次函数模式	139
2. 构造各类函数模式	141
3. 构造数列模式	144
4. 构造不等式模式	145
5. 构造多项式模式	147
6. 构造概率模式	147
7. 构造分布列模式	148
8. 构造向量模式	149
9. 构造结论	150



第 15 章 凑配整合	154
1. 配项化整	154
2. 凑配套模	155
3. 配对推演	156
4. 配方变形	158
5. 凑出齐次	159
6. 凑成常数	160
第 16 章 逐步调整	163

第二编 触摸特色数式

第 17 章 集合的子集	172
1. 子集的元素个数问题	172
2. 子集的元素特性问题	179
3. 子集间的相互关系问题	181
第 18 章 二次函数、三次函数	186
1. 在一定条件下的与二次函数系数有关的问题	186
2. 与二次函数有关的参变量问题	191
3. 以二次函数为背景的其他问题	194
4. 构造二次函数处理问题	196
5. 三次函数问题	198
第 19 章 单调函数、单调数列	207
1. 求解单调性函数问题	207
2. 发掘单调函数求解问题	213
3. 利用单调函数制作不等式求解问题	218
4. 构造单调函数处理问题	220
5. 单调数列问题	221
第 20 章 周期函数、周期数列	228
1. 周期函数问题	231



2. 周期数列问题	233
第 21 章 凸函数、凸数列	236
1. 凸函数问题	241
2. 凸数列问题	244
第 22 章 等差数列、等比数列	249
1. 等差数列问题	249
2. 等比数列问题	252
第 23 章 递推数列	256
1. 转化为等差或等比数列求解	256
2. 利用特征方程求解	259
3. 抓住递推、归纳、代换	262
第 24 章 无理函数	267
1. 关注无理不等式处理问题	269
2. 关注两点间距离公式	270
3. 通过代换转化为圆锥曲线问题处理	271
4. 通过代换转化为三角问题处理	272
第 25 章 函数图象的对称性	273
第 26 章 函数不动点	281
1. 运用不动点处理函数问题	285
2. 运用不动点处理数列问题	288
第 27 章 复合最值	292
1. 复合函数的最值问题	292
2. 双层最值问题	295
第 28 章 方程组	302
1. 整合转化求解	302



2. 代换变形求解	304
3. 构造辅助函数求解	308
4. 注意数形结合	309
第 29 章 平均值不等式、柯西不等式	312
1. 平均值不等式的运用	313
2. 柯西不等式的运用	318
3. 两个不等式的综合运用	324
第 30 章 权方和不等式、贝努利不等式	330
1. 权方和不等式及推广的运用	333
2. 贝努利不等式及推论的运用	336
第 31 章 排序不等式、契比雪夫不等式	341
1. 排序不等式的运用	342
2. 契比雪夫不等式的运用	345
第 32 章 舒尔不等式、母不等式	351
1. 舒尔不等式的运用	353
2. 母不等式的运用	357
第一编 参考答案	363
第二编 参考答案	428

第 1 章 变换化归

在解数学题时,把陌生的问题或新问题通过等价变更(变换),化归为熟悉问题,来达到化生为熟、化难为易的目的,我们称这样的手法为“变换化归”.

变换化归时,如下的几种等价变换形式值得关注:

$$(I) \left(\sum_{i=1}^n a_i\right) \left(\sum_{i=1}^n b_i\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i b_j = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (a_i b_j + a_j b_i). \quad (1-1)$$

$$(II) \left(\sum_{i=1}^n a_i\right)^2 = \sum_{i=1}^n a_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j. \quad (1-2)$$

$$(III) \sum_{1 \leq i < j \leq n} (a_i - a_j)^2 = n \sum_{i=1}^n a_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n a_i\right)^2. \quad (1-3)$$

$$(IV) \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i b_j = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_i b_j\right) = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^j a_i b_j\right). \quad (1-4)$$

$$(V) \sum_{i=1}^n a_i b_j = b_n \sum_{i=1}^n a_i + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\sum_{i=1}^n a_i\right) (b_k - b_{k+1}). \quad (1-5)$$

注 (1-5)式称为阿贝尔变换.

变换化归有如下一些类型:

1. 双箭头“ \Leftrightarrow ”表示

例 1 (2010 年斯洛文尼亚国家队选拔考试题)(1) 求最大的实数 c , 使得对于所有的实数 x, y 满足 $x^2 + y^2 + 1 \geq c(x + y)$;

(2) 求最大的实数 c , 使得对于所有的实数 x, y 满足 $x^2 + y^2 + xy + 1 \geq c(x + y)$.

解 (1) 注意到一个式子中有多个字母,原不等式等价于

$$\begin{aligned} x^2 - cx + y^2 - cy + 1 &\geq 0 \\ \Leftrightarrow \left(x - \frac{c}{2}\right)^2 - \frac{c^2}{4} + \left(y - \frac{c}{2}\right)^2 - \frac{c^2}{4} + 1 &\geq 0 \\ \Leftrightarrow \left(x - \frac{c}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{c}{2}\right)^2 + 1 &\geq \frac{c^2}{2}. \end{aligned}$$

若 $x = y = \frac{c}{2}$, 则 $1 \geq \frac{c^2}{2}$.

故 $c \leq \sqrt{2}$.

当 $c = \sqrt{2}$ 时, 对于所有的实数 x, y 有

$$\left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \geq 0$$



恒成立.

因此,实数 c 的最大值为 $\sqrt{2}$.

(2) 由于原不等式中有多个字母,它可等价变形为

$$\left(x + \frac{y}{2} - \frac{c}{2}\right)^2 - \frac{c^2}{4} + \frac{4}{3}\left(y - \frac{c}{3}\right)^2 - \frac{c^2}{12} + 1 \geq 0.$$

若 $y = \frac{c}{3}$, $x = \frac{c}{2} - \frac{y}{2} = \frac{c}{3}$, 则不等式可化为

$$-\frac{c^2}{4} - \frac{c^2}{12} + 1 \geq 0.$$

故 $c \leq \sqrt{3}$.

当 $c = \sqrt{3}$ 时,对于所有的实数 x, y 有

$$\left(x + \frac{y}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\left(y - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 \geq 0.$$

恒成立.

因此,实数 c 的最大值为 $\sqrt{3}$.

例 2 (《数学通报》2011(10) 数学问题 2024 号) 设 a, b, c 为三角形的三边长,证明:

$$a^3 + b^3 + c^3 \leq 3abc + 2[a(b-c)^2 + b(c-a)^2 + c(a-b)^2].$$

证明

注意到恒等式

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 + c^3 - 3abc &= (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) \\ &= \frac{1}{2}(a+b+c)[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2] \end{aligned}$$

知所证不等式等价于

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}(a+b+c)[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2] \\ &\leq 2[a(b-c)^2 + b(c-a)^2 + c(a-b)^2] \\ &\Leftrightarrow (a+b+c)[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2] \\ &\leq 4[a(b-c)^2 + b(c-a)^2 + c(a-b)^2] \\ &\Leftrightarrow (a+b-3c)(a-b)^2 + (b+c-3a)(b-c)^2 \\ &\quad + (c+a-3b)(c-a)^2 \leq 0. \end{aligned}$$

令 $a = y+z$, $b = z+x$, $c = x+y$, 则 $x, y, z > 0$, 用“ \sum ”表循环和, 上式等价于

$$\begin{aligned} &\sum (x+y-z)(x-y)^2 \leq 0 \\ &\Leftrightarrow \sum (x+y)(x-y)^2 \geq \sum z \cdot (x-y)^2 \\ &\Leftrightarrow \sum (x^3 + y^3 - x^2y - xy^2) \geq \sum (x^2z + y^2z - 2xyz) \\ &\Leftrightarrow 2\sum x^3 + 6xyz \geq \sum xy(x+y) + \sum (x^2 + y^2)z \\ &\Leftrightarrow 2\sum x^3 + 6xyz \geq 2\sum xy(x+y) \\ &\Leftrightarrow \sum x^3 + 3xyz \geq \sum xy(x+y). \end{aligned} \quad \textcircled{1}$$