浙大优学

高中数学竞赛专题讲座丛书

代数分册

高中数学竞赛解题策略

GAOZHONG SHUXUE JINGSAI
JIETI CELUE

沈文选　杨清桃　编著

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

高中数学竞赛解题策略

代 数 分 册

沈文选　杨清桃　编著

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

高中数学竞赛解题策略. 代数分册 / 沈文选，杨清桃编著. —杭州：浙江大学出版社，2012.5(2012.10 重印)
ISBN 978-7-308-09868-7

Ⅰ.①高… Ⅱ.①沈…②杨… Ⅲ.①代数课－高中－教学参考资料 Ⅳ.①G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2012）第 068270 号

高中数学竞赛解题策略——代数分册
沈文选　杨清桃　编著

责任编辑　杨晓鸣　吴慧(特邀)
封面设计　刘依群
出版发行　浙江大学出版社
(杭州市天目山路 148 号　邮政编码 310007)
(网址：http://www.zjupress.com)
排　　版　杭州大漠照排印刷有限公司
印　　刷　德清县第二印刷厂
开　　本　787mm×1092mm　1/16
印　　张　30.75
字　　数　748 千
版 印 次　2012 年 5 月第 1 版　2012 年 10 月第 2 次印刷
书　　号　ISBN 978-7-308-09868-7
定　　价　58.00 元

浙江大学出版社发行部邮购电话　(0571)88925591

前　言

如果说“熟悉基本手法，看透数式实质”是求解代数难题的重要前提，“融通基本手法，认识数式形式”是求解代数竞赛题的重要保证，那么“点击基本手法，触摸特色数式”就是求解代数竞赛题的重要策略．一个人解决代数问题体现出来的能力，其实质是根据问题情景运用各种手法重组已知的代数模式（简称为“数式”），能正确、迅速地检索、选择和提取相关数式的知识，并及时转化为适当的操作程序．对于一个数式，从不同的侧面（角度）运用不同的手法和已知的各类概念考察它时，它显示出丰富多彩的形式．执行某种操作程序，就是运用某种方法求解数式问题，就是将数式问题变换成某种模式及展现变换成模式的全过程．因而，我们有理由说，对数式问题形式的认识是其解题方法的实质．因此，为了在各级各类数学竞赛中取得好的成绩，对代数问题的处理，应着眼于数式形式的变化和对变换形式手法的认识，并熟悉它、融通它．有些数式暂时处理不了，往往可能是对这个数式还没有较深入的认识，或者这个数式变形还不到位．

对数式形式的认识及变形手法的认识，有四重境界：

第一重境界，看山不见山，看水不见水．对形式无识，水中无鱼．对这个数式的认识及数式的处理方式除书本或老师介绍之外，不知怎么处理，只有一点肤浅的认识．

第二重境界，看山是山，看水是水．对形式有些认识，知道可按照已学过的某类模式处理，或套用已学某公式、定理处理．

第三重境界，看山不是山，看水不是水．见形式思其特性，授之以渔．这个数式可变形处理，可将其他知识迁移过来处理．

第四重境界，看山还是山，看水还是水．见形式识其特性，悟其渔识．这个数式有多种灵活处理手法，有时还有某种巧妙的处理方案，并且对其背景有一定的了解．

我们以不等式：设 a、b、$c\in\mathbf{R}_+$，则 $a^3+b^3+c^3\geqslant 3abc$ 的证明为例说明之．

首先，可知人教版教材选修 4－5 中有如下证法：

证法 1

因为

$$
\begin{aligned}
&a^3+b^3+c^3-3abc\\
&=(a+b)^3-3a^2b-3ab^2+c^3-3abc\\
&=(a+b)^3+c^3-3a^2b-3ab^2-3abc\\
&=(a+b+c)[(a+b)^2-(a+b)c+c^2]-3ab(a+b+c)\\
&=(a+b+c)[a^2+2ab+b^2-ac-bc+c^2-3ab]\\
&=\frac{1}{2}(a+b+c)[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]\geqslant 0,
\end{aligned}
$$

所以，$a^3+b^3+c^3\geqslant 3abc$．

还有其他证法吗？能运用已学过的 $a^2+b^2\geqslant 2ab$ 来证吗？

事实上,我们可运用凑配、分拆组合及代换,应用 $a^2+b^2\geqslant 2ab$,则有

证法 2

由

$$\begin{aligned}a^3+b^3+c^3+abc-abc&\geqslant 2\sqrt{a^3b^3}+2\sqrt{abc^4}-abc\\&\geqslant 2\sqrt{2\sqrt{a^3b^3}\cdot 2\sqrt{abc^4}}-abc\\&=4abc-abc=3abc,\text{即证.}\end{aligned}$$

证法 3

由

$$\begin{aligned}A=\frac{a^3+b^3+c^3}{3}&\xlongequal{\text{等比}}\frac{a^3+b^3+c^3+A}{4}\\&\geqslant\frac{1}{2}(\sqrt{a^3b^3}+\sqrt{c^3A})\geqslant\sqrt[4]{a^3b^3c^3A},\end{aligned}$$

有 $A^4\geqslant a^3b^3c^3A$,故$\dfrac{a^3+b^3+c^3}{3}=A\geqslant abc$.

证法 4

$$\text{令 } abc=B,\text{则}$$

$$\begin{aligned}\frac{a^3}{B}+\frac{b^3}{B}+\frac{c^3}{B}+1&\geqslant 2\sqrt{\frac{a^3b^3}{B^2}}+2\sqrt{\frac{c^3}{B}\cdot 1}\\&\geqslant 2\sqrt{2\sqrt{\frac{a^3b^3}{B^2}}\cdot 2\sqrt{\frac{c^3}{B}}}=4,\end{aligned}$$

故

$$\frac{a^3+b^3+c^3}{B}\geqslant 3,\text{即 } a^3+b^3+c^3\geqslant 3B=3abc.$$

证法 5

注意应用 2 个正数的均值不等式,对正数 $x,\ y,\ z$,有

$$(x+y+z)^2\geqslant 3(xy+yz+zx)\qquad(*)$$

于是

$$\begin{aligned}(a^3+b^3+c^3)^3&=(a^3+b^3+c^3)^2\cdot(a^3+b^3+c^3)\\&\geqslant 3(a^3b^3+b^3c^3+c^3a^3)(a^3+b^3+c^3)\\&=3\left[\sum a^3(b^6+c^6)+3a^3b^3c^3\right]\text{(其中}\sum\text{ 表循环和)}\\&\geqslant 3\left(\sum 2a^3b^3c^3+3a^3b^3c^3\right)=27a^3b^3c^3.\end{aligned}$$

故 $a^3+b^3+c^3\geqslant 3abc$.

学习了柯西不等式、排序不等式之后,又可得如下证法:

证法 6

利用柯西不等式及$(a+b+c)^2\geqslant 3(ab+bc+ca)$有

$$\begin{aligned}a^3+b^3+c^3&=abc\left(\frac{a^2}{bc}+\frac{b^2}{ca}+\frac{c^2}{ab}\right)\\&\geqslant abc\cdot\frac{(a+b+c)^2}{bc+ca+ab}\geqslant 3abc.\end{aligned}$$

证法 7

由排序不等式,有

$$a^3+b^3 \geqslant a^2b+ab^2,\ b^3+c^3 \geqslant b^2c+bc^2,\ c^3+a^3 \geqslant c^2a+ca^2.$$

上述三个不等式相加,有

$$\begin{aligned}2(a^3+b^3+c^3) &\geqslant a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+c^2a+ca^2\\ &= a(b^2+c^2)+b(c^2+a^2)+c(a^2+b^2)\\ &\geqslant 2abc+2abc+2abc,\end{aligned}$$

故 $$a^3+b^3+c^3 \geqslant 3abc.$$

累次运用(*)式,又可得到如下证法:

证法 8

由

$$\begin{aligned}(a^3+b^3+c^3)^4 &\geqslant [3(b^3c^3+c^3a^3+a^3b^3)]^2\\ &\geqslant 9\cdot 3(c^3a^3\cdot a^3b^3+a^3b^3\cdot b^3c^3+b^3c^3\cdot c^3a^3)\\ &= 27a^3b^3c^3(a^3+b^3+c^3),\end{aligned}$$

即有 $$a^3+b^3+c^3 \geqslant 3abc.$$

如果进行灵活变形,并运用配方、放缩、分拆项等手法又可得如下证法:

证法 9

由

$$\begin{aligned}a^3+b^3+c^3-3abc &= \frac{1}{2}[(b^3+c^3)+(c^3+a^3)+(a^3+c^3)-6abc]\\ &\geqslant \frac{1}{2}[(b^2c+bc^2)+(c^2a+ca^2)+(a^2b+ab^2)-6abc]\\ &= \frac{1}{2}[a(b^2+c^2)+b(c^2+a^2)+c(a^2+b^2)-6abc]\\ &= \frac{1}{2}[a(b-c)^2+b(c-a)^2+c(a-b)^2] \geqslant 0,\end{aligned}$$

知 $$a^3+b^3+c^3 \geqslant 3abc.$$

证法 10

由

$$\begin{aligned}a^3+b^3+c^3 &= (\sqrt{a^3}-\sqrt{b^3})^2+(\sqrt{c^3}-\sqrt{abc})^2\\ &\quad +2\sqrt{a^3b^3}+2\sqrt{abc^4}-abc = (\sqrt{a^3}-\sqrt{b^3})^2\\ &\quad +(\sqrt{c^3}-\sqrt{abc})^2+2(\sqrt[4]{a^3b^3}-\sqrt[4]{abc^4})^2+3abc \geqslant 3abc,\end{aligned}$$

即证.

证法 11

由对称性,不妨设 $a \geqslant b \geqslant c$,于是可设 $a=c+\alpha+\beta,\ b=c+\alpha,\ \alpha,\beta \in \overline{R}_{-}$,则

$$\begin{aligned}&a^3+b^3+c^3-3abc\\ &= (c+\alpha+\beta)^3+(c+\alpha)^3+c^3-3(c+\alpha+\beta)(c+\alpha)c\\ &= 3c(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)+(\alpha+\beta)^3+\alpha^3 \geqslant 0,\end{aligned}$$

故 $$a^3+b^3+c^3 \geqslant 3abc.$$

证法 12

注意到 $x^3-3x+2=(x-1)^2(x+2)\geqslant 0$，有 $x^3\geqslant 3x-2$.

由

$$a^3+b^3+c^3=a^3+b^3+\sqrt{a^3b^3}\cdot\left(\frac{c}{\sqrt{ab}}\right)^3$$

$$\geqslant 2\sqrt{a^3b^3}+\sqrt{a^3b^3}\left(3\frac{c}{\sqrt{ab}}-2\right)=3abc\text{，即证.}$$

证法 13

注意到 $x^3+2y^3-3xy^2=(x-y)^2(x+2y)\geqslant 0$，有 $x^3+2y^3\geqslant 3xy^2$.

从而有 $a^3+2b^3\geqslant 3ab^2$，$a^3+2c^3\geqslant 3ac^2$.

上述两式相加，并注意 $b^2+c^2\geqslant 2bc$，有

$$2a^3+2b^3+2c^3\geqslant 3a(b^2+c^2)\geqslant 6abc.$$

故 $a^3+b^3+c^3\geqslant 3abc$.

证法 14

由对称性，不妨设 $a\geqslant b\geqslant c$，则 $a^3\geqslant b^3\geqslant c^3$.

若令 $A=\dfrac{a^3+b^3+c^3}{3}$，则 $a^3\geqslant A$，$c^3\leqslant A$ 且 $a^3+c^3-A>0$，从而

$(a^3-A)(A-c^3)\geqslant 0$，即 $a^3c^3\leqslant A(a^3+c^3-A)$.

于是，$a^3b^3c^3\leqslant A\cdot b^3(a^3+c^3-A)\leqslant A\cdot\left[\dfrac{b^3+(a^3+c^3-A)}{2}\right]^2=A^3$.

故 $\quad\dfrac{a^3+b^3+c^3}{3}\geqslant abc$.

如果再发散联想，我们可以更深刻地认识这个不等式的背景及在这些背景下的呈现形式.

运用函数的观点来处理，则有

证法 15

欲证 $a^3+b^3+c^3\geqslant 3abc$，即证 $a^3+b^3+c^3-3abc\geqslant 0$.

考虑函数 $f(x)=x^3-3bcx+b^3+c^3$，则 $f'(x)=3x^2-3bc$，即知 $x=\sqrt{bc}$ 时，$f(x)$ 取极（最）小值，此时，

$f(\sqrt{bc})=(\sqrt{bc})^3-3\sqrt{bc}\cdot bc+b^3+c^3=(b^{\frac{3}{2}}-c^{\frac{3}{2}})^2\geqslant 0$.

故 $\quad f(x)\geqslant 0$，即 $a^3+b^3+c^3\geqslant 3abc$.

运用数形结合的手法来处理，则有：

证法 16

如右图，先以 $a^2+b^2+c^2$ 为长，$a+b+c$ 为宽作矩形 $ABCD$，再以 $ab+bc+ca$ 为长，$a+b+c$ 为宽作矩形 $CDEF$.

注意到 $ab+bc+ca\leqslant a^2+b^2+c^2$，

则 $\quad(ab+bc+ca)(a+b+c)$

$\qquad\leqslant(a^2+b^2+c^2)(a+b+c)$，

即 $\quad S_{\text{矩形}CDEF}\leqslant S_{\text{矩形}ABCD}$.

	a^3	b^2	c^2 D	ab	bc	abc
A a	a^3	S_1	S_2	S_3	abc	S_2 E
b	S_3	b^3	S_4	S_1	S_3	abc
B c	S_5	S_6	C^3	abc C	S_4	S_2 F

又　$\sum_{i=1}^{6} S_i + a^3 + b^3 + c^3 = S_{矩形ABCD}$，$\sum_{i=1}^{6} S_i + 3abc = S_{矩形CDEF}$.

从而　$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = S_{矩形ABCD} - S_{矩形CDEF} \geqslant 0$.

故　$a^3 + b^3 + c^3 \geqslant 3abc$.

又注意到运用抽屉原理制作出模式，则可有下述证法：

证法 17

设 $x, y, z \in \mathbf{R}_+$ 且 $xyz = 1$ 时，则知 x、y、z 中必有一个不小于 1，另一个不大于 1. 不妨设为 $x \geqslant 1$, $y \leqslant 1$. 于是

$(1-x)(1-y) \leqslant 0$，即有 $x + y \geqslant 1 + xy$.

从而有 $x + y + z \geqslant 1 + xy + z \geqslant 1 + 2\sqrt{xyz} = 3$，

即有　$x + y + z \geqslant 3$.

若令　$x = \dfrac{a^2}{bc}$, $y = \dfrac{b^2}{ca}$, $z = \dfrac{c^2}{ab}$. 此时有 $xyz = 1$，且 $x, y, z \in \mathbf{R}_+$.

则由

$$\frac{a^2}{bc} + \frac{b^2}{ca} + \frac{c^2}{ab} \geqslant 3，有\ a^3 + b^3 + c^3 \geqslant 3abc.$$

证法 18

设 $x, y, z \in \mathbf{R}_+$，有 $x + y + z = 1$ 时，则知 x、y、z 中必有一个不小于$\dfrac{1}{3}$，另一个不大于$\dfrac{1}{3}$. 不妨设 $x \geqslant \dfrac{1}{3}$, $y \leqslant \dfrac{1}{3}$. 于是

$\left(x - \dfrac{1}{3}\right)\left(y - \dfrac{1}{3}\right) \leqslant 0$，即有 $x + y \geqslant \dfrac{1}{3} + 3xy$.

从而有

$$x + y + z \geqslant \frac{1}{3} + 3xy + z \geqslant \frac{1}{3} + 2\sqrt{3xyz},$$

亦即有 $1 \geqslant \dfrac{1}{3} + 2\sqrt{3xyz}$，即$\dfrac{1}{27} \geqslant xyz$.

若令 $x = \dfrac{a^3}{a^3 + b^3 + c^3}$, $y = \dfrac{b^3}{a^3 + b^3 + c^3}$, $z = \dfrac{c^3}{a^3 + b^3 + c^3}$，此时有

$x + y + z = 1$，且 $x, y, z \in \mathbf{R}_+$.

则由

$$\frac{a^3}{a^3 + b^3 + c^3} \cdot \frac{b^3}{a^3 + b^3 + c^3} \cdot \frac{c^3}{a^3 + b^3 + c^3} \leqslant \frac{1}{27},$$

有 $a^3 + b^3 + c^3 \geqslant 3abc$.

再注意到多项式知识处理，则有下述证法：

证法 19

用 $a = -b - c$ 代入式子 $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$ 得

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (-b-c)^3 + b^3 + c^3 - 3(-b-c) \cdot bc = 0.$$

注意到带余除法，由

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 - 3bcx + b^3 + c^3 \\ &= (x-a)(x^2 + ax + a^2 - 3bc) + a^3 + b^3 + c^3 - 3abc \end{aligned}$$

知 $f(a) = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 0$.

于是，即知 $x = a = -b - c$ 是多项式 $f(x) = x^3 - 3bcx + b^3 + c^3$ 的根，因而 $f(x)$ 有因式 $x - a$，即 $a + b + c$.

从而$a^3+b^3+c^3-3abc=a^3-3bca+b^3+c^3$

$$=(a+b+c)[(-b-c)^2+a(-b-c)+a^2-3bc]+a^3+b^3+c^3-3abc$$

$$=\frac{1}{2}[(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2]\geqslant 0$$

故 $a^3+b^3+c^3\geqslant 3abc$.

由上述证法也看到了证法 1 的实质.

最后,从加强这个不等式的角度考虑,则有:

证法 20

显然,不等式

$$a^3+b^3+c^3\geqslant 3abc+a(b-c)^2+b(c-a)^2+c(a-b) \qquad (**)$$

是不等式 $a^3+b^3+c^3\geqslant 3abc$ 的加强式,证得了这个加强式,即证得了原不等式.

事实上,由(* *)式的对称性,不妨设 $a\geqslant b\geqslant c>0$,

则有$(a-b)^2(a+b-c)\geqslant 0$ 及 $c(a-c)(b-c)\geqslant 0$,

即有 $a^3+b^3+2abc\geqslant ab(a+b)+b^2c+a^2c$

及 $c^3+abc\geqslant bc^2+ac^2$.

上面的两个不等式相加并进行整理,即证得(* *)式成立.

继续探索,还可能获得一些新的证法.这也从一个侧面说明了本书中为什么一道竞赛题在各处出现.

这本著作的撰写,是作者近些年(特别是近三年)在全国各地培训讲稿的基础上整理而成,在整理中作者参阅了《中等数学》等杂志上的大量资料,在此由衷感谢有关资料的提供者.当然也溶进了作者对奥林匹克数学研究的一些成果.这本书也区别于作者已出版的其他代数著作,以期对奥林匹克数学研究作出自己的努力,还望得到广大读者的指正!

沈文选

2012 年 4 月

目 录

CONTENTS

第二编　触摸特色数式

第一编　点击基本手法

第1章　变换化归

在解数学题时，把陌生的问题或新问题通过等价变更（变换），化归为熟悉问题，来达到化生为熟、化难为易的目的，我们称这样的手法为“变换化归”.

变换化归时，如下的几种等价变换形式值得关注：

（Ⅰ）$\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}b_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_ib_j=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(a_ib_j+a_jb_i).$　　(1-1)

（Ⅱ）$\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)^2=\sum_{i=1}^{n}a_i^2+2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}a_ia_j.$　　(1-2)

（Ⅲ）$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(a_i-a_j)^2=n\sum_{i=1}^{n}a_i^2-\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)^2.$　　(1-3)

（Ⅳ）$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}a_ib_j=\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}a_ib_j\right)=\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{j}a_ib_j\right).$　　(1-4)

（Ⅴ）$\sum_{i=1}^{n}a_ib_j=b_n\sum_{i=1}^{n}a_i+\sum_{k=1}^{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)(b_k-b_{k+1}).$　　(1-5)

注　(1-5)式称为阿贝尔变换.

变换化归有如下一些类型：

1. 双箭头“⇔”表示

例1　（2010年斯洛文尼亚国家队选拔考试题）(1) 求最大的实数 c，使得对于所有的实数 x、y 满足 $x^2+y^2+1\geqslant c(x+y)$；

(2) 求最大的实数 c，使得对于所有的实数 x、y 满足 $x^2+y^2+xy+1\geqslant c(x+y)$.

解　(1) 注意到一个式子中有多个字母，原不等式等价于

$$\begin{aligned}&x^2-cx+y^2-cy+1\geqslant 0\\ \Leftrightarrow&\left(x-\frac{c}{2}\right)^2-\frac{c^2}{4}+\left(y-\frac{c}{2}\right)^2-\frac{c^2}{4}+1\geqslant 0\\ \Leftrightarrow&\left(x-\frac{c}{2}\right)^2+\left(y-\frac{c}{2}\right)^2+1\geqslant\frac{c^2}{2}.\end{aligned}$$

若 $x=y=\frac{c}{2}$，则 $1\geqslant\frac{c^2}{2}$.

故 $c\leqslant\sqrt{2}$.

当 $c=\sqrt{2}$ 时，对于所有的实数 x、y 有

$$\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(y-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\geqslant 0$$

恒成立.

因此,实数 c 的最大值为$\sqrt{2}$.

(2) 由于原不等式中有多个字母,它可等价变形为

$$\left(x+\frac{y}{2}-\frac{c}{2}\right)^2-\frac{c^2}{4}+\frac{4}{3}\left(y-\frac{c}{3}\right)^2-\frac{c^2}{12}+1\geqslant 0.$$

若 $y=\frac{c}{3}$, $x=\frac{c}{2}-\frac{y}{2}=\frac{c}{3}$,则不等式可化为

$$-\frac{c^2}{4}-\frac{c^2}{12}+1\geqslant 0.$$

故 $c\leqslant\sqrt{3}$.

当 $c=\sqrt{3}$ 时,对于所有的实数 x、y 有

$$\left(x+\frac{y}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\left(y-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2\geqslant 0.$$

恒成立.

因此,实数 c 的最大值为$\sqrt{3}$.

例 2 (《数学通报》2011(10)数学问题 2024 号)设 a、b、c 为三角形的三边长,证明:

$$a^3+b^3+c^3\leqslant 3abc+2[a(b-c)^2+b(c-a)^2+c(a-b)^2].$$

证明

注意到恒等式

$$\begin{aligned}a^3+b^3+c^3-3abc&=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)\\&=\frac{1}{2}(a+b+c)[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]\end{aligned}$$

知所证不等式等价于

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}(a+b+c)[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a^2)]\\&\leqslant 2[a(b-c)^2+b(c-a)^2+c(a-b)^2]\\&\Leftrightarrow(a+b+c)[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]\\&\leqslant 4[a(b-c)^2+b(c-a)^2+c(a-b)^2]\\&\Leftrightarrow(a+b-3c)(a-b)^2+(b+c-3a)(b-c)^2\\&+(c+a-3b)(c-a)^2\leqslant 0.\end{aligned}$$

令 $a=y+z$, $b=z+x$, $c=x+y$,则 x, y, $z>0$,用"$\sum$"表循环和,上式等价于

$$\begin{aligned}&\sum(x+y-z)(x-y)^2\leqslant 0\\&\Leftrightarrow\sum(x+y)(x-y)^2\geqslant\sum z\cdot(x-y)^2\\&\Leftrightarrow\sum(x^3+y^3-x^2y-xy^2)\geqslant\sum(x^2z+y^2z-2xyz)\\&\Leftrightarrow 2\sum x^3+6xyz\geqslant\sum xy(x+y)+\sum(x^2+y^2)z\\&\Leftrightarrow 2\sum x^3+6xyz\geqslant 2\sum xy(x+y)\\&\Leftrightarrow\sum x^3+3xyz\geqslant\sum xy(x+y).\qquad①\end{aligned}$$