



“十二五”职业教育
国家规划教材
经全国职业教育教材
审定委员会审定

经济应用数学

(第二版)

主编 冯翠莲

高等教育出版社



“十二五”职业教育国家规划教材
经全国职业教育教材审定委员会审定

722
369

JINGJI YINGYONG SHUXUE

经济应用数学

(第二版)

主编 冯翠莲

高等教育出版社·北京

内容提要

本书是“十二五”职业教育国家规划教材。

为适应高职高专教育人才培养目标的要求，汲取近年高职高专教育改革研究的成果，编者对第一版进行了修订。本书内容包括：函数与极限、导数与微分、导数的应用、积分及其应用、多元函数微分学、矩阵与线性方程组、概率的基本知识及其应用、数据处理、数学实验等。每节后配有习题，每章后配有总习题，习题分为基础题和拓展题，书后附有习题参考答案与解法提示。

本书重能力培养、重知识应用、重素质教育，以培养应用型人才为目标，适于高职高专院校经济类、管理类学生使用。

图书在版编目(C I P)数据

经济应用数学 / 冯翠莲主编. --2 版. --北京：高等教育出版社,2014. 8
ISBN 978 - 7 - 04 - 032571 - 3

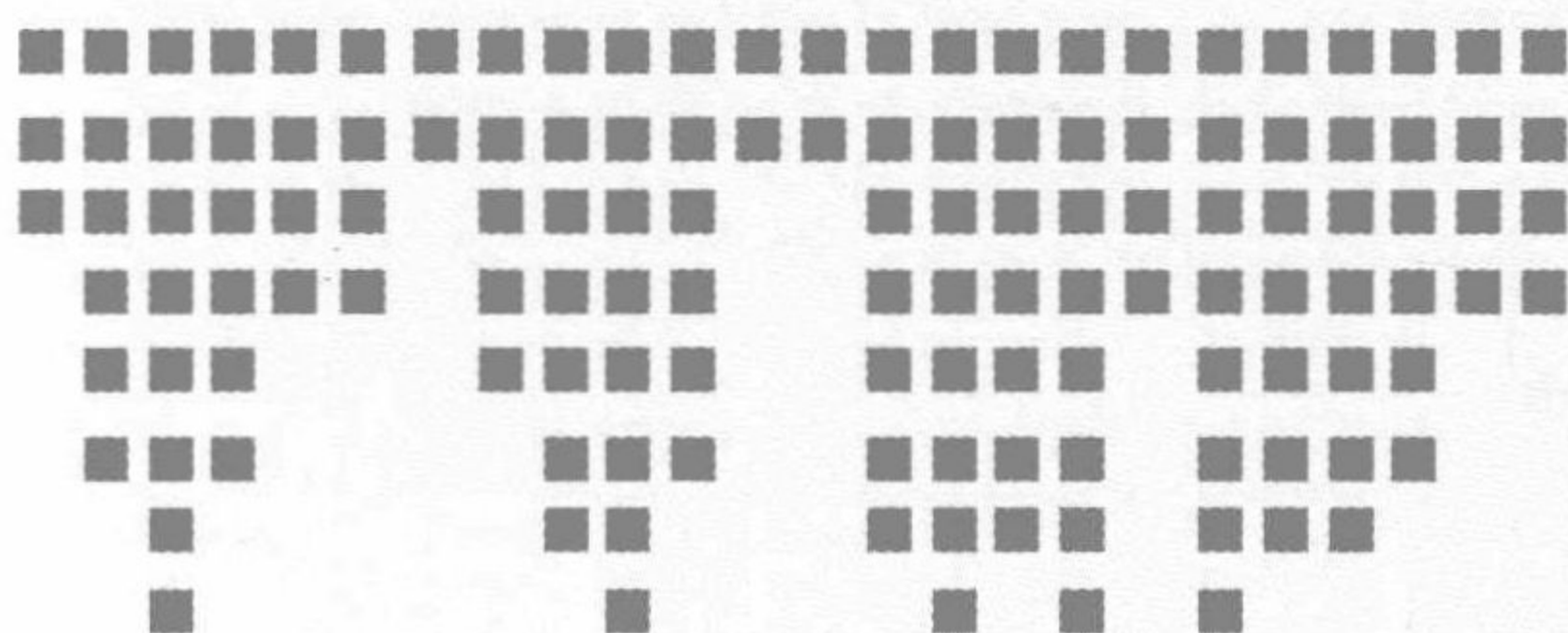
I. ①经… II. ①冯… III. ①经济数学-高等职业教育-教材 IV. ①F224. 0

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 021013 号

策划编辑	崔梅萍	责任编辑	崔梅萍	封面设计	杨立新	版式设计	余 杨
插图绘制	尹 莉	责任校对	刘春萍	责任印制	尤 静		

出版发行	高等教育出版社	网 址	http://www.hep.edu.cn
社 址	北京市西城区德外大街 4 号		http://www.hep.com.cn
邮政编码	100120	网上订购	http://www.landracom.com
印 刷	化学工业出版社印刷厂		http://www.landracom.com.cn
开 本	787mm × 1092mm 1/16	版 次	2008 年 7 月第 1 版
印 张	18.25		2014 年 8 月第 2 版
字 数	470 千字	印 次	2014 年 8 月第 1 次印刷
购书热线	010 - 58581118	定 价	31.80 元
咨询电话	400 - 810 - 0598		

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换
版权所有 侵权必究
物 料 号 32571 - 00



出版说明

教材是教学过程的重要载体,加强教材建设是深化职业教育教学改革的有效途径,推进人才培养模式改革的重要条件,也是推动中高职协调发展的基础性工程,对促进现代职业教育体系建设,切实提高职业教育人才培养质量具有十分重要的作用。

为了认真贯彻《教育部关于“十二五”职业教育教材建设的若干意见》(教职成〔2012〕9号),2012年12月,教育部职业教育与成人教育司启动了“十二五”职业教育国家规划教材(高等职业教育部分)的选题立项工作。作为全国最大的职业教育教材出版基地,我社按照“统筹规划,优化结构,锤炼精品,鼓励创新”的原则,完成了立项选题的论证遴选与申报工作。在教育部职业教育与成人教育司随后组织的选题评审中,由我社申报的1338种选题被确定为“十二五”职业教育国家规划教材立项选题。现在,这批选题相继完成了编写工作,并由全国职业教育教材审定委员会审定通过后,陆续出版。

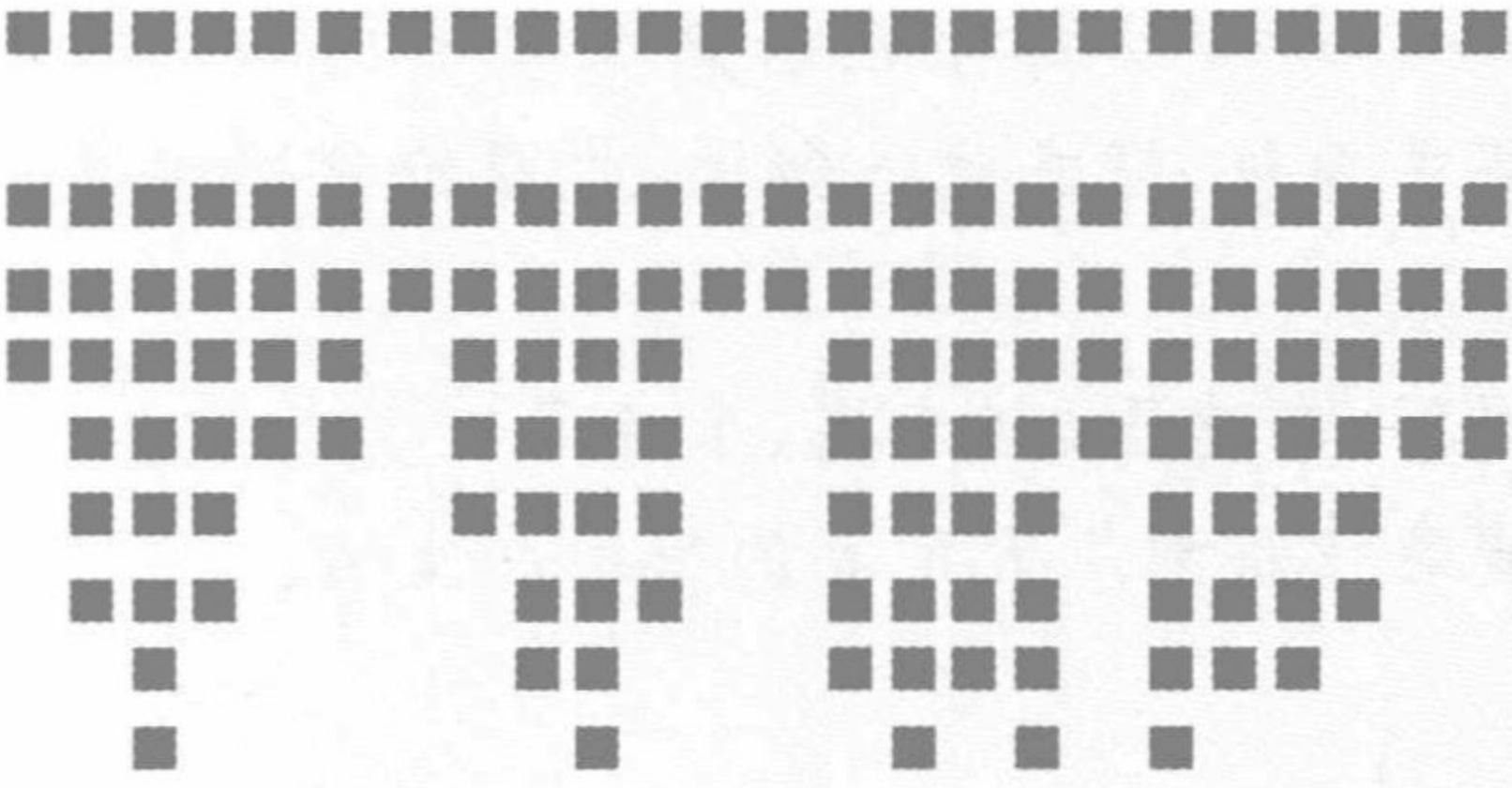
这批规划教材中,部分为修订版,其前身多为普通高等教育“十一五”国家级规划教材(高职高专)或普通高等教育“十五”国家级规划教材(高职高专),在高等职业教育教学改革进程中不断吐故纳新,在长期的教学实践中接受检验并修改完善,是“锤炼精品”的基础与传承创新的硕果;部分为新编教材,反映了近年来高职院校教学内容与课程体系改革的成果,并对接新的职业标准和新的产业需求,反映新知识、新技术、新工艺和新方法,具有鲜明的时代特色和职教特色。无论是修订版,还是新编版,我社都将发挥自身在数字化教学资源建设方面的优势,为规划教材开发配备数字化教学资源,实现教材的一体化服务。

这批规划教材立项之时,也是国家职业教育专业教学资源库建设项目及国家精品资源共享课建设项目深入开展之际,而专业、课程、教材之间的紧密联系,无疑为融通教改项目、整合优质资源、打造精品力作奠定了基础。我社作为国家专业教学资源库平台建设和资源运营机构及国家精品开放课程项目实施单位,将建设成果以系列教材的形式成功申报立项,并在审定通过后陆续推出。这两个系列的规划教材,具有作者队伍强大、教改基础深厚、示范效应显著、配套资源丰富、纸质教材与在线资源一体化设计的鲜明特点,将是职业教育信息化条件下,扩展教学手段和范围,推动教学方式方法变革的重要媒介与典型代表。

教学改革无止境,精品教材永追求。我社将在今后一到两年内,集中优势力量,全力以赴,出版好、推广好这批规划教材,力促优质教材进校园、精品资源进课堂,从而更好地服务于高等职业教育教学改革,更好地服务于现代职教体系建设,更好地服务于青年成才。

高等教育出版社

2014年7月



第二版前言

为了使本教材的内容更加符合职业教育规律和高端技能型专门人才的培养规律,更加适应生源变化的实际,更加突出高职教育实用性、科学性和易学性等特点,从而提高高职学生的数学应用能力、学习兴趣和学习效率,我们从打好基础、培养能力、兼顾后续课程需要出发,以全面提高学生综合素质为宗旨,以培养学生的创新精神和实践能力为重点,以促进學生转变学习方式——变被动接受式学习为主动研究式学习,为高职学生的终身学习、生活和发展奠定良好的科学基础为落脚点,我们以先进的教育理念为指导,密切结合经济工作的需要,吸收国内外教材的优点,并根据第一版教材的使用情况及高职数学课程的开设现状,将第一版教材更名为《经济应用数学》,并对其做了如下修改:

1. 更加适应生源实际。为了适应、促进中高职衔接,在教材内容的选取和编写时,降低起点,对基本概念、基本理论、基本方法的论述更加深入浅出,直观通俗,清楚明白;对内容的编排更加体现由易到难、由浅入深、循序渐进并注重教材的连贯性、衔接性,根据数学的认知规律和教学规律,把高职教学的特点和思想,融会到教材中去。

2. 更加明确教学目标和学习目标。认真分析每一章节所应达到的目标体系,在各章伊始,提出各章的知识目标 and 能力目标,使教师和学生做到目标明确。

3. 内容把握适度,删减不必要内容。由于经济问题中,基本不涉及反三角函数,删掉有关反三角函数的相关内容,真正体现够用为度。

4. 更加体现数学与专业技能培养相结合的效能。教材进一步以“问题情境—展现知识—实现应用”的思路呈现教学内容。数学概念的引入力求从实际问题出发,突出问题的实际背景,以案例方式呈现。补充、增加与后续经济类、管理类各专业课程相结合的内容及具有实际意义的经济案例,如在定积分的应用中,增加了消费者剩余和生产者剩余的内容;在偏导数中,增加了需求的交叉弹性的内容等。

5. 发挥数学教学的素质教育功效。增加了“数学史、数学思想和数学方法”等有关数学素质教育的内容,以培养学生的数学素养,扩大学生的知识面。

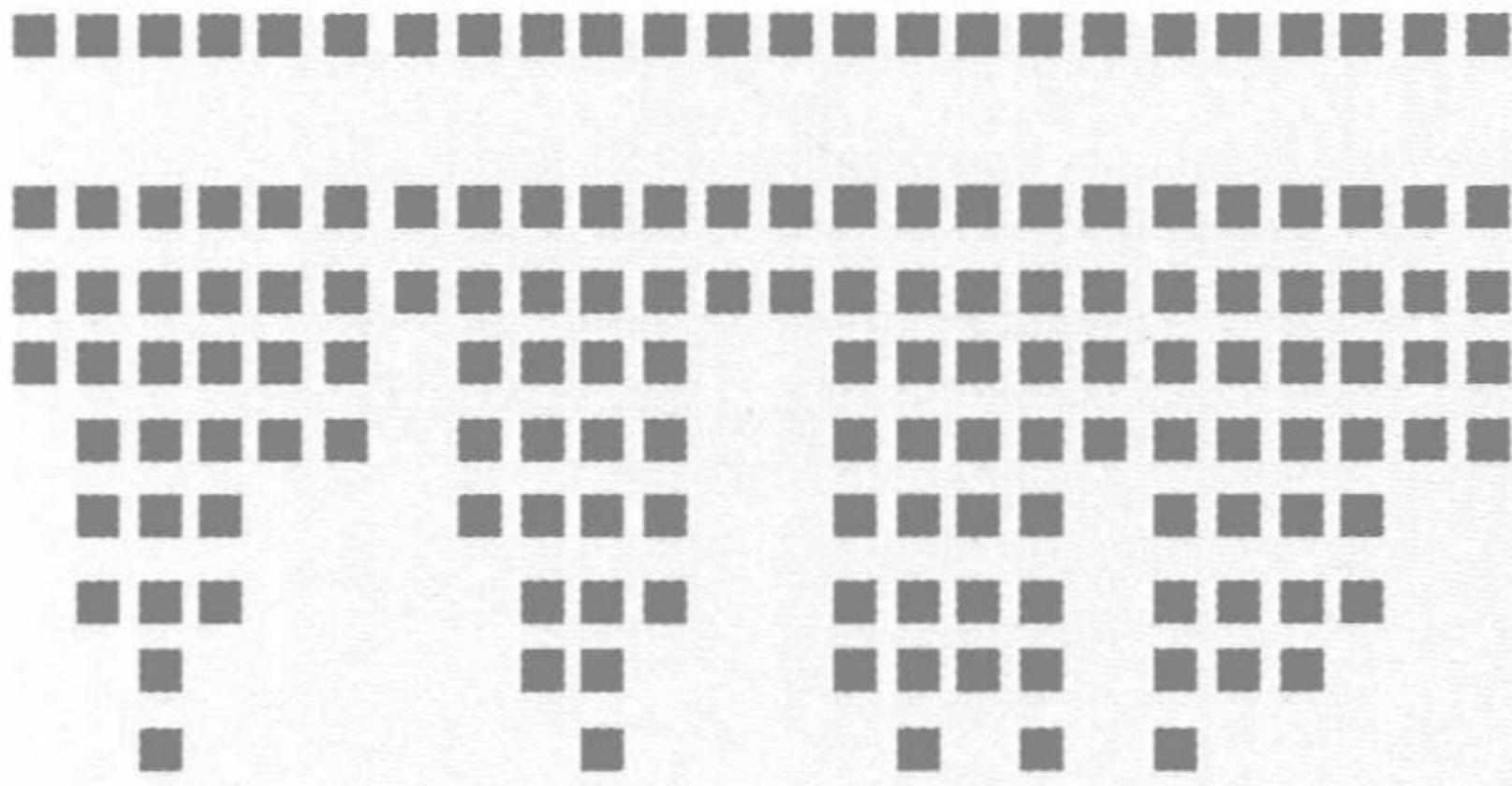
6. 介绍数学软件,更加注重数学应用能力的培养。增加了数学实验这一章,介绍了数学软件 MATLAB 的基本知识,介绍了 MATLAB 在微积分、概率统计及线性代数中的应用,介绍了利用 MATLAB 绘图。注重培养学生使用现代化工具解决实际问题的能力,体现高职教学实践性的特点。

7. 设置了基础题和拓展题。其中拓展题有的是与经济和生活密切相关的问题,如利息、个人所得税等;有的是将知识予以拓展,如恩格尔需求函数、需求收入弹性、收益价格弹性等;有的是提高题;有的是训练综合运用知识解决问题的能力。

参加第二版教材编写和修订工作的有冯翠莲、杨丽丽、李建军、赵连盛、朱晓霞。

感谢读者对第一版教材的厚爱,希望第二版教材能继续得到广大读者的帮助和支持。

编者
2014 年 1 月



第一版前言

根据高职高专数学教学的特点、需求及高职高专教育培养目标,我们本着重能力培养、重知识应用、重素质教育、求创新的总体思路,编写了这本数学教材,供高职高专院校经济类、管理类学生使用。本教材在许多方面都具有明显的高职特色,具体反映在:

1. 尊重学科,但不恪守学科。打破传统数学教材的结构,以“加强基础,强化应用,整体优化,注重效果”为原则,将微积分、线性代数及概率统计基本知识有机地结合在一起,根据学生的认知水平、数学的认知规律和教学规律,设计、组织和编排全书内容,力求实现基础性、实用性和发展性三方面需求的和谐与统一。真正体现以学生为主体,以教师为主导的辩证统一。

2. 以案例驱动的方式,用现实和经济方面的实例引出概念,并用通俗简洁而又富有哲理性的语言阐明概念的内涵和实质。着重讲解基本概念、基本理论和基本方法,对基本理论和结论一般不做论证,尽量用几何图形、数表、案例说明其实际背景和应用价值。由此加深对基本理论和概念的理解,立足于实践与应用,使传授数学知识和培养学生的数学素养得到很好的结合。

3. 注重加强数学的实际应用。以培养学生能用定性与定量相结合的方法解决实际问题的能力为宗旨,配备案例、练习和习题。注重与实际应用联系较多的基础知识、基本方法和基本技能的训练,强化应用数学知识解决实际问题的能力训练,培养学生举一反三、融会贯通的能力,创新能力和职业能力,以适应新时代对经济、管理人才的培养要求。

4. 本教材精简实用,条理清楚,叙述通俗易懂,深入浅出,便于自学。

5. 本教材每章后有内容精要,每节后配有习题,每章后配有总习题。习题按循序渐进的原则配置,其中有一般能力检测的基本题和应用能力检测的综合题,书后附有习题参考答案与解法提示。

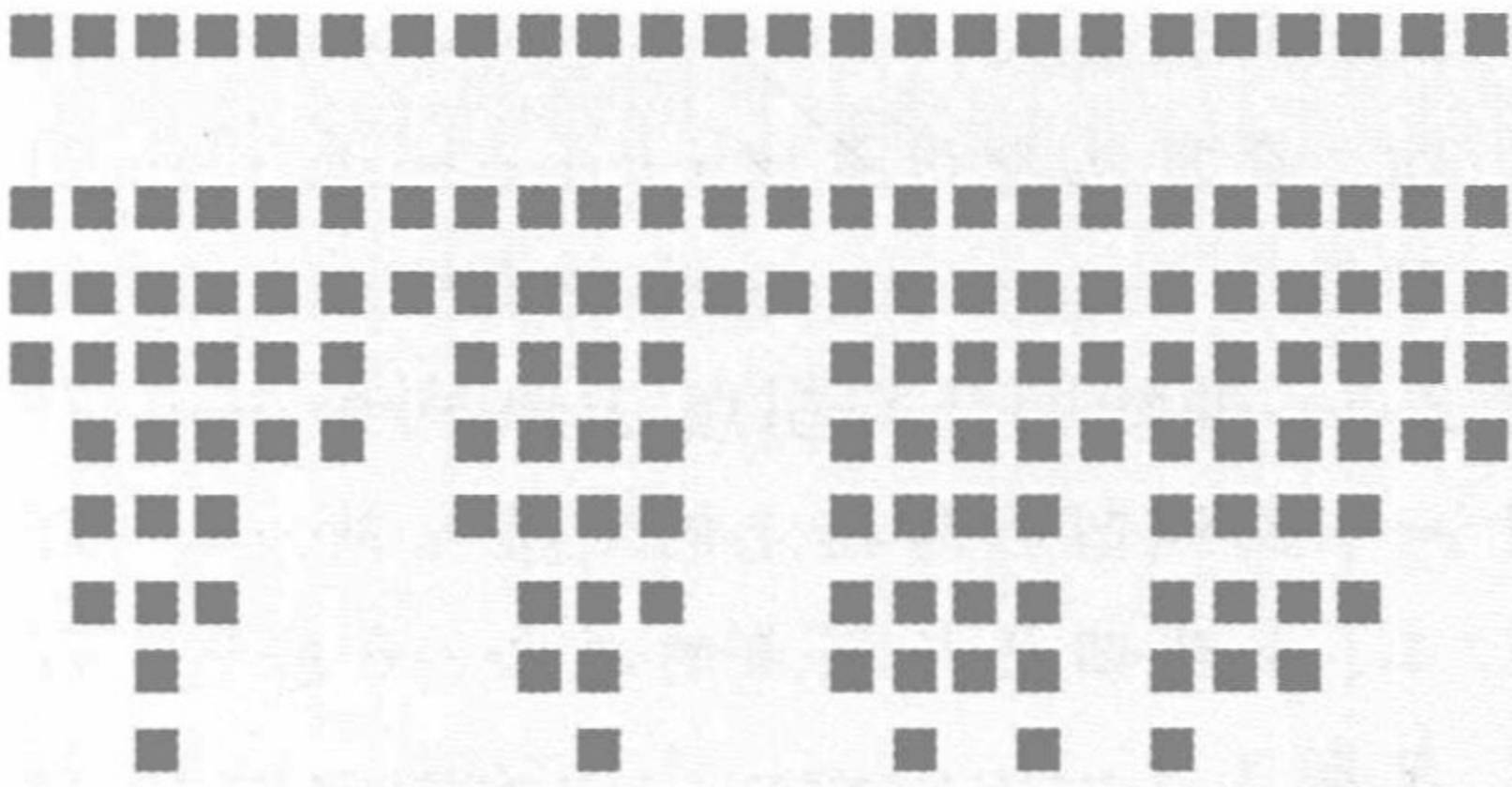
本教材的主编为冯翠莲教授、赵益坤教授。第一章至第五章由冯翠莲执笔,第六章由王莉莉执笔,第七章、第八章由赵益坤执笔,全书由冯翠莲统稿。参加编写工作的还有王磊、赵连盛。

本教材在编写过程中,得到高等教育出版社相关领导的指导和大力支持。同行专家提出了许多宝贵意见,在此一并表示感谢。

限于水平,加之数学教学改革中的一些问题还有待探索,不足之处恳请批评指正。

编者

2008年5月



目 录

第一章 函数与极限	1
§ 1.1 函数	1
一、函数的概念	1
二、初等函数	6
习题 1.1	9
§ 1.2 极限的概念	11
一、数列的极限	11
二、函数的极限	13
三、无穷小与无穷大	17
习题 1.2	18
§ 1.3 极限的四则运算法则与函数的连续性	19
一、极限的四则运算法则	19
二、函数连续的定义	20
习题 1.3	22
§ 1.4 复利与贴现	24
一、复利公式	24
二、贴现公式	25
习题 1.4	26
本章内容精要	27
小资料 极限思想的产生与发展	28
总习题一	29
第二章 导数与微分	31
§ 2.1 导数的概念	31
一、导数的定义	31
二、导数的几何意义	34
习题 2.1	35
§ 2.2 导数运算	36
一、基本初等函数的导数公式	36
二、导数的四则运算法则	36
三、复合函数的导数法则	38
四、高阶导数	39
习题 2.2	41
§ 2.3 微分	42
一、微分的定义	42
二、基本初等函数的微分公式	44
习题 2.3	44
本章内容精要	45
小资料 e 的由来	46
总习题二	47
第三章 导数的应用	49
§ 3.1 函数的单调性与极值	49
一、函数的单调性	49
二、函数的极值	50
习题 3.1	53

§ 3.2 极值的几何应用	54	三、利润最大	70
习题 3.2	56	四、存货总费用最少	71
§ 3.3 边际与弹性	56	习题 3.4	74
一、经济学中常用的几个函数	57	§ 3.5 曲线凹凸与拐点	75
二、边际	61	一、曲线凹凸与拐点的定义	75
三、弹性	62	二、曲线凹凸与拐点的求法	76
习题 3.3	67	习题 3.5	78
§ 3.4 极值的经济应用	68	本章内容精要	78
一、收益最大	68	总习题三	80
二、平均成本最低	69		

第四章 积分及其应用

82

§ 4.1 定积分的概念与性质	82	习题 4.4	103
一、定积分的定义	82	§ 4.5 分部积分法	105
二、定积分的几何意义	85	习题 4.5	108
三、定积分的性质	86	§ 4.6 无限区间上的反常积分	108
习题 4.1	89	习题 4.6	110
§ 4.2 不定积分的概念与性质	90	§ 4.7 积分学的应用	110
一、不定积分的概念	90	一、平面图形的面积	110
二、不定积分的性质	93	二、已知边际函数求总函数	113
习题 4.2	93	三、消费者剩余和生产者剩余	116
§ 4.3 积分的基本公式	95	习题 4.7	117
一、不定积分的基本积分公式	95	本章内容精要	118
二、微积分基本公式	97	小资料 微积分的创立	122
习题 4.3	98	总习题四	123
§ 4.4 换元积分法	99		

第五章 多元函数微分学

125

§ 5.1 偏导数	125	三、最小二乘法	133
一、二元函数的概念	125	习题 5.2	135
二、偏导数	126	§ 5.3 条件极值	136
三、需求的交叉价格弹性	127	一、条件极值的意义	136
四、二阶偏导数	128	二、条件极值的求法	137
习题 5.1	129	习题 5.3	141
§ 5.2 二元函数的极值	130	本章内容精要	141
一、二元函数的极值	130	总习题五	143
二、最大值与最小值的应用问题	132		

第六章 矩阵与线性方程组 145

§ 6.1 矩阵的概念	145	二、矩阵的秩	162
一、矩阵的定义	145	三、逆矩阵	163
二、阶梯形矩阵	147	习题 6.3	166
习题 6.1	148	§ 6.4 线性方程组的消元解法	167
§ 6.2 矩阵运算	149	一、非齐次线性方程组的	
一、矩阵的加法	149	消元解法	167
二、数乘矩阵	151	二、线性方程组解的判定	171
三、矩阵的乘法	153	习题 6.4	175
习题 6.2	158	本章内容精要	176
§ 6.3 矩阵的初等行变换与矩阵		小资料 矩阵理论的发展	
的秩	160	线性方程组理论的发展	178
一、矩阵的初等行变换	160	总习题六	179

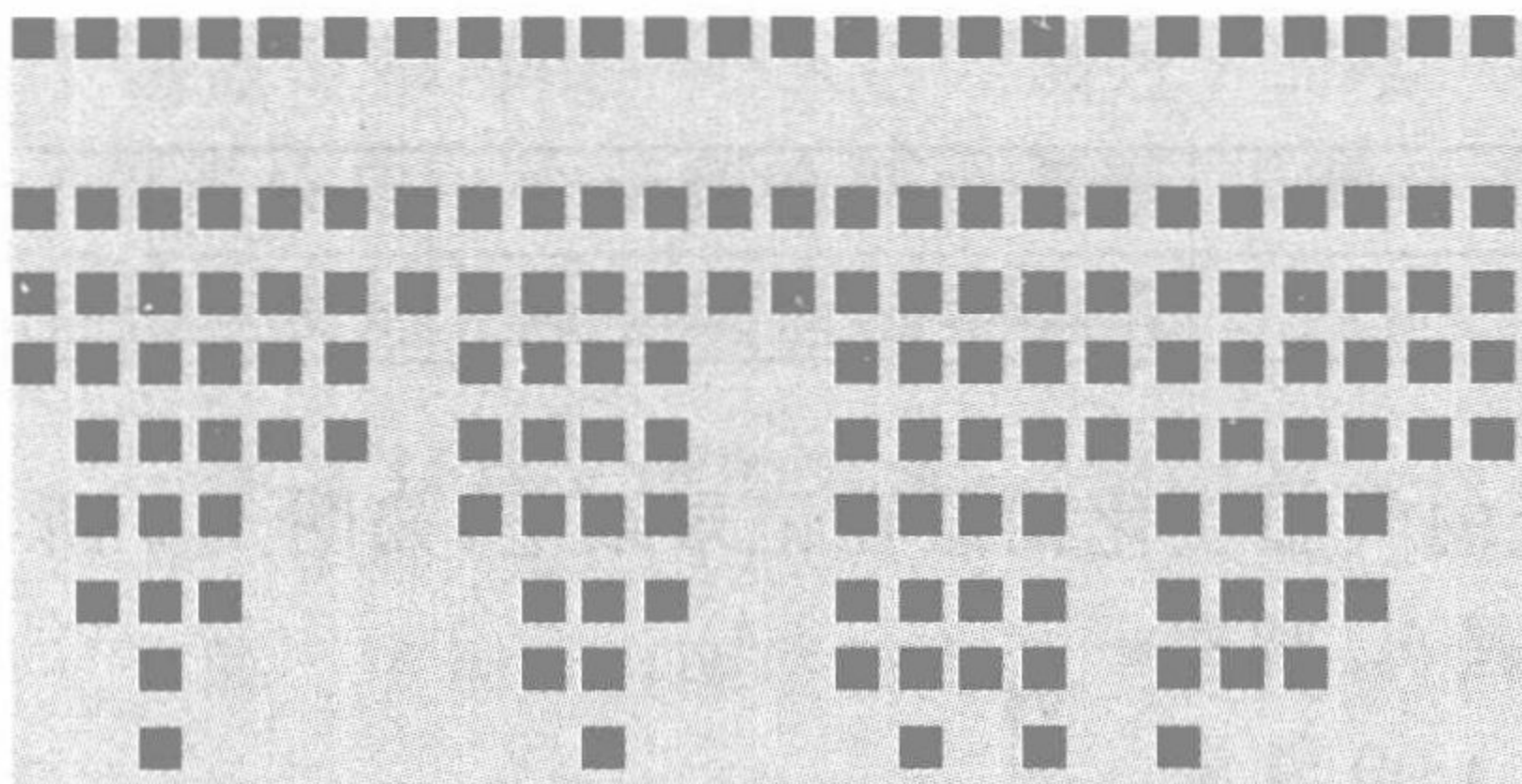
第七章 概率的基本知识及其应用 182

§ 7.1 随机事件	182	一、随机变量的概念	194
一、随机现象与随机事件	182	二、离散型随机变量的分布律	195
二、事件间的关系与运算	183	三、常见的离散型分布	196
习题 7.1	185	习题 7.4	198
§ 7.2 事件的概率及概率的		§ 7.5 连续型随机变量	199
加法公式	186	一、连续型随机变量的概率	
一、概率的统计定义	186	密度	199
二、古典概型	187	二、常见的连续型分布	200
三、概率的加法公式	188	习题 7.5	203
习题 7.2	189	§ 7.6 随机变量的数字特征	204
§ 7.3 概率的乘法公式与事件的		一、数学期望(均值)	204
独立性	190	二、方差	206
一、概率的乘法公式	190	三、常见分布的期望和方差	208
二、事件的独立性	192	习题 7.6	209
习题 7.3	193	本章内容精要	210
§ 7.4 随机变量与离散型		小资料 概率论的产生与发展	212
随机变量	194	总习题七	213

第八章 数据处理 215

§ 8.1 点估计与直方图	215	习题 8.1	219
一、点估计	215	§ 8.2 一元线性回归分析	220
二、频率直方图	217	一、相关关系与相关系数	220

二、一元线性回归方程	223	小资料 “回归”一词的由来	226
习题 8.2	224	总习题八	227
本章内容精要	225		
第九章 数学实验		229	
§ 9.1 常用数学软件简介及 MATLAB 基础知识	229	应用	238
一、常用数学软件简介	229	一、矩阵的输入与建立	239
二、MATLAB 基础知识	230	二、矩阵的运算	239
习题 9.1	232	三、矩阵的初等变换	239
§ 9.2 MATLAB 在微积分中的 应用	233	四、解线性方程组	240
一、建立符号变量	233	习题 9.3	242
二、求符号函数在某一点的 函数值	234	§ 9.4 MATLAB 在概率统计中的 应用	243
三、求符号函数的极限值	234	一、概率的计算	243
四、求符号函数的各阶导数 (偏导数)	235	二、随机变量的数字特征	244
五、求符号函数的积分	236	三、数据处理	245
六、求代数方程(组)的符号 解析解	237	四、建立一元线性回归方程	245
七、求符号函数的极值(最值)	237	习题 9.4	246
习题 9.2	238	§ 9.5 利用 MATLAB 绘图	247
§ 9.3 MATLAB 在线性代数中的 应用	238	一、数值函数绘图命令简介	247
		二、符号函数绘图命令简介	248
		习题 9.5	249
		本章内容精要	249
		总习题九	251
附表 标准正态分布数值表		252	
习题参考答案与解法提示		254	
名词术语索引		275	
参考文献		278	



第一章

函数与极限



【知识目标】

理解函数概念,了解函数的几何特性,知道极限与连续概念,掌握极限的四则运算法则.

【能力目标】

会求函数的定义域及函数值,能将初等函数按基本初等函数的四则运算和复合形式分解,能利用恒等变形及极限的四则运算法则求极限,能解决有关复利和贴现的计算问题.



函数、极限和连续是微积分学的基本概念.本章讲述这三个基本概念及其相关问题.

§ 1.1 函数

万事万物都在不停地变化.例如,每天的气温都会随时间的变化而变化;产品的生产成本会随产量的增加而增加.作为研究和描述客观世界的工具,微积分就是研究变量变化过程的数学,它的主要研究对象是相依变量之间的函数关系.本节将讲述函数概念和初等函数.

一、函数的概念

在研究各种实际问题的过程时,常常会遇到两种不同类型的量:一种是变的,即在所研究问题的过程中可取不同的数值;另一种在所研究问题的过程中保持不变,只取一个固定值,前者为变量,后者为常量.而参与实际问题的诸变量之间往往是相互联系、相互制约的.这种相互关系通常表现为变量取值的对应关系.

1. 函数的定义

案例 1 我们去银行存钱,假设一年定期整存整取的年利率为 3.25%,则存款金额 x 与一年到期时的利息 y 之间的对应关系如表 1.1.

表 1.1

存款金额 x /元	500	1 000	2 000	5 000	10 000	20 000
一年到期时利息 y /元	16.25	32.50	65.00	162.50	325.00	650.00

案例 2 在气象观测站,气温自动记录仪把某一天的气温变化描绘在记录纸上,如图 1.1 所示的曲线. 曲线上某一点 P_0(t_0, \theta_0) 表示时刻 t_0 的气温是 \theta_0. 观察这条曲线,可以知道在这一天内,时间 t 从 0:00 到 24:00 气温 \theta (单位: \text{^\circ C}) 的变化情形. 时间 t 和气温 \theta 都是变量,这两个变量之间的对应关系是由一条曲线确定的.

案例 3 圆的面积 A 由圆的半径 r 决定. 只要 r 取定一个数值,面积 A 就有唯一确定的一个值与之对应,且 A 与 r 之间有如下关系式:

A = \pi r^2 (r > 0).

案例 4 某市出租车收费标准为:乘车不超过 3 km,收费 10 元;超过 3 km 而不超过 15 km,超过的里程每千米(不足 1 km 按 1 km 计)加收 2 元;超过 15 km,超过的里程每千米(不足 1 km 按 1 km 计)加收 3 元.

【案例 4 分析】 由于乘车里程不超过 3 km、超过 3 km 而不超过 15 km 及超过 15 km 的收费标准不同,乘客乘车的费用 P(元)与乘车的里程 x(km)之间的数量关系应用三个数学式来表示,即

P = \begin{cases} 10, & 0 < x \leq 3, \\ 10 + 2(x - 3), & 3 < x \leq 15, \\ 10 + 2(15 - 3) + 3(x - 15), & x > 15. \end{cases}

该案例中,乘车里程 x 与乘车费用 P 都是变量, x 在其取值范围内每取定一个值,按上式, P 就有唯一确定的一个值与之对应.

以上列举的案例,虽是来自不同的领域,而且具有不同的表示形式,有表格、图形、公式,但它们的共性是:都反映了在同一过程中有两个相互依赖的变量,当其中一个量在某数集内取值时,按一定的规则,另一个量有唯一确定的值与之对应. 变量之间的这种数量关系就是函数关系.

定义 1.1(函数) 设 x 和 y 是两个变量, D 是一个给定的非空数集. 若对于每一个数 x \in D, 按照某一确定的对应法则 f, 变量 y 总有唯一确定的数值与之对应, 则称 y 是 x 的函数, 记作

y = f(x), x \in D,

其中 x 称为自变量, y 称为因变量, 数集 D 称为该函数的定义域.

定义域 D 是自变量 x 的取值范围, 也就是使函数 y = f(x) 有意义的数集. 由此, 若 x 取数值 x_0 \in D 时, 则称该函数在 x_0 有定义, 与 x_0 对应的 y 的数值称为函数在点 x_0 的函数值, 记作

f(x_0) 或 y|_{x=x_0}.

当 x 遍取数集 D 中的所有数值时, 对应的函数值全体构成的数集

Z = \{y | y = f(x), x \in D\}

称为该函数的值域. 若 x_0 \notin D, 则称该函数在点 x_0 没有定义.

由函数的定义可知, 决定一个函数有三个因素: 定义域 D、对应法则 f 和值域 Z. 注意到每一

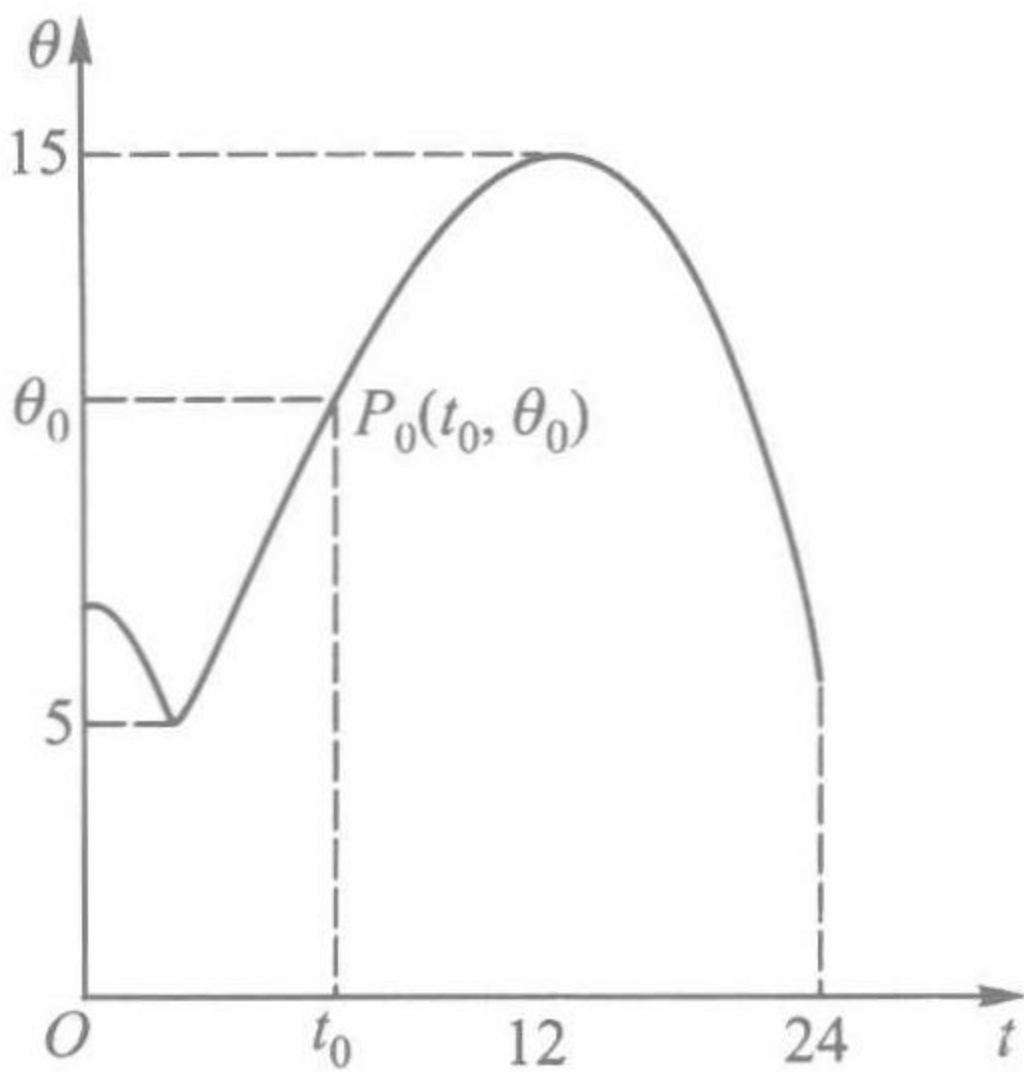


图 1.1

个函数值都可由一个 $x \in D$ 通过 f 而唯一确定,于是给定 D 和 f , Z 就相应地被确定了,从而 D 和 f 就是决定一个函数的两个要素. 当两个函数用不同的解析式表示时,这两个函数相等的充要条件是定义域相同且对应法则相等.

练习 1(定义域的求法) 求函数 $y = \frac{x^2 - 3}{\sqrt{4 - x^2}} + \ln(x + 1)$ 的定义域.

解 该函数由两项和构成,其定义域应是各项自变量取值范围的公共部分,须将每项分别讨论.

第一项是分式,其分子 x 可取任意值;对分母 $\sqrt{4 - x^2}$,因开偶次方的式子应非负,所以有 $4 - x^2 \geq 0$,又注意到分母不能为零,所以有 $4 - x^2 > 0$,即 $-2 < x < 2$,写成区间则是 $(-2, 2)$.

第二项 $\ln(x + 1)$,因取对数的式子应为正,所以有

$$x + 1 > 0, \quad \text{即 } x > -1,$$

写成区间则是 $(-1, +\infty)$.

上述两个区间之交是区间 $(-1, 2)$,这就是所求函数的定义域.

练习 2(函数值的求法) 设 $y = f(x) = x^2 - 3x + 2$,求 $f(1), f(0), f(-1), f(a), f(-x), f(f(x))$.

解 这是已知函数的表达式,求函数在指定点的函数值.易看出该函数对 x 取任何数值都有意义.

$f(1)$ 是当自变量 x 取 1 时函数 $f(x)$ 的函数值.为求 $f(1)$,须将 $f(x)$ 的表示式中的 x 换为数值 1,得

$$f(1) = 1^2 - 3 \times 1 + 2 = 0,$$

或记作

$$y|_{x=1} = (x^2 - 3x + 2)|_{x=1} = 1^2 - 3 \times 1 + 2 = 0.$$

同理可得

$$f(0) = 0^2 - 3 \times 0 + 2 = 2 \quad \text{或} \quad y|_{x=0} = 0^2 - 3 \times 0 + 2 = 2,$$

$$f(-1) = (-1)^2 - 3 \times (-1) + 2 = 6 \quad \text{或} \quad y|_{x=-1} = (-1)^2 - 3 \times (-1) + 2 = 6.$$

为求 $f(a)$,须将 $f(x)$ 的表示式中的 x 换为 a ,得

$$f(a) = a^2 - 3a + 2.$$

同理,将 x 换为 $-x$,得

$$f(-x) = (-x)^2 - 3(-x) + 2 = x^2 + 3x + 2.$$

将 $f(x)$ 的表示式中的 x 换为 $f(x)$ 的表示式,得

$$\begin{aligned} f(f(x)) &= [f(x)]^2 - 3f(x) + 2 \\ &= (x^2 - 3x + 2)^2 - 3(x^2 - 3x + 2) + 2 \\ &= x^4 - 6x^3 + 10x^2 - 3x. \end{aligned}$$

案例 3 是用一个数学式子表示两个变量之间的函数关系,而案例 4 则是用三个数学式子表示两个变量之间的函数关系.若两个变量之间的函数关系要用两个或两个以上数学式子来表达,即对一个函数,在其定义域的不同部分用不同数学式子来表达,则称为分段函数.

对案例 4:(1) 试确定函数 $P = P(x)$ 的定义域;

(2) 试求乘客乘车 2 km、3 km、5 km 和 20 km 所付的费用.

【解案例 4】 由案例 4 所给乘车费用 P 与乘车里程 x 之间的关系式知,这是分段函数, $x = 3, x = 15$ 是该分段函数的分段点.

(1) 由于乘车里程 x 可在区间 $(0, 3]$ 内取值, 可在区间 $(3, 15]$ 内取值, 也可在区间 $(15, +\infty)$ 内取值, 故该函数的定义域是 $(0, 3] \cup (3, 15] \cup (15, +\infty) = (0, +\infty)$.

(2) 因 $2 \in (0, 3]$, 所以当乘客乘车 2 km 时, 所付的费用 $P = 10$ (元).

同样, 因 $3 \in (0, 3]$, 所以当乘客乘车 3 km 时, 所付的费用 $P = 10$ (元).

因 $5 \in (3, 15]$, 所以当乘客乘车 5 km 时, 所付的费用应由式子 $P = 10 + 2(x - 3)$ 计算, 即

$$P = [10 + 2(x - 3)]|_{x=5} = 14 \text{ (元)}.$$

因 $20 \in (15, +\infty)$, 所以当乘客乘车 20 km 时, 所付的费用应由式子 $P = 10 + 2(15 - 3) + 3(x - 15)$ 计算, 即

$$P = [10 + 2(15 - 3) + 3(x - 15)]|_{x=20} = 49 \text{ (元)}.$$

2. 函数的几何特性

函数的几何特性包括奇偶性、单调性、周期性和有界性. 由于函数的几何特性在中学都已学习过, 这里只作简要说明.

(1) 函数的奇偶性

由图 1.2 看到, 曲线 $y = x^3$ 关于坐标原点对称, 即自变量取一对相反的数时, 相对应的一对函数值也恰是相反数, 这时称 $y = x^3$ 为奇函数. 图 1.3 表明, 曲线 $y = x^2$ 关于 y 轴对称, 即自变量取一对相反的数时, 相对应的一对函数值却相等, 这时, 称 $y = x^2$ 为偶函数.

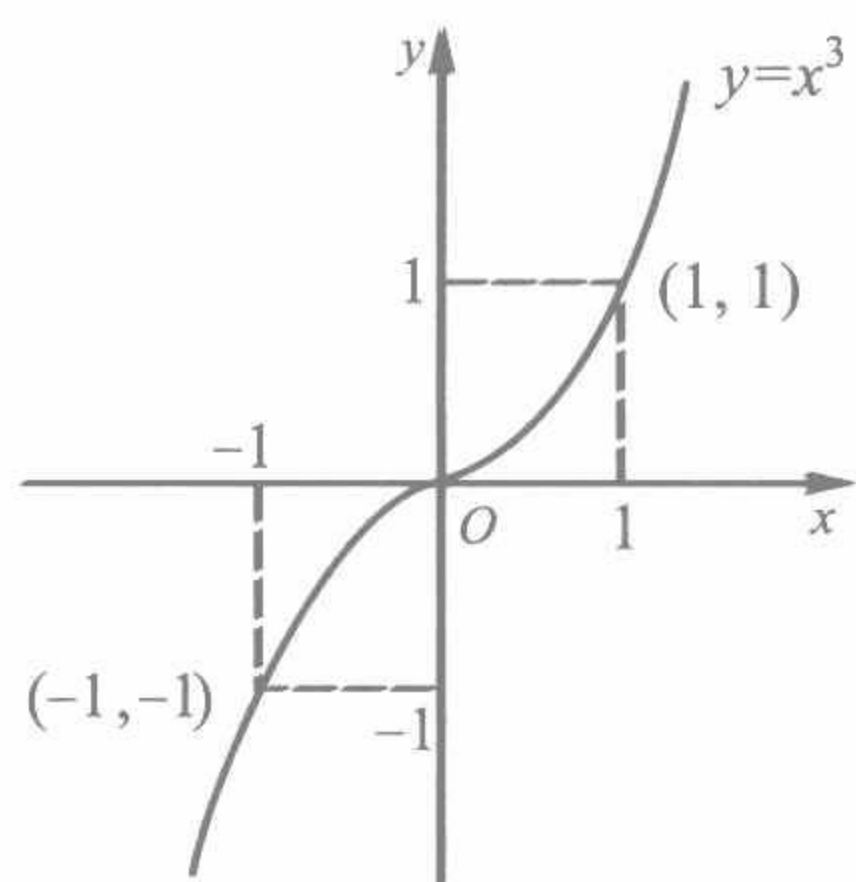


图 1.2

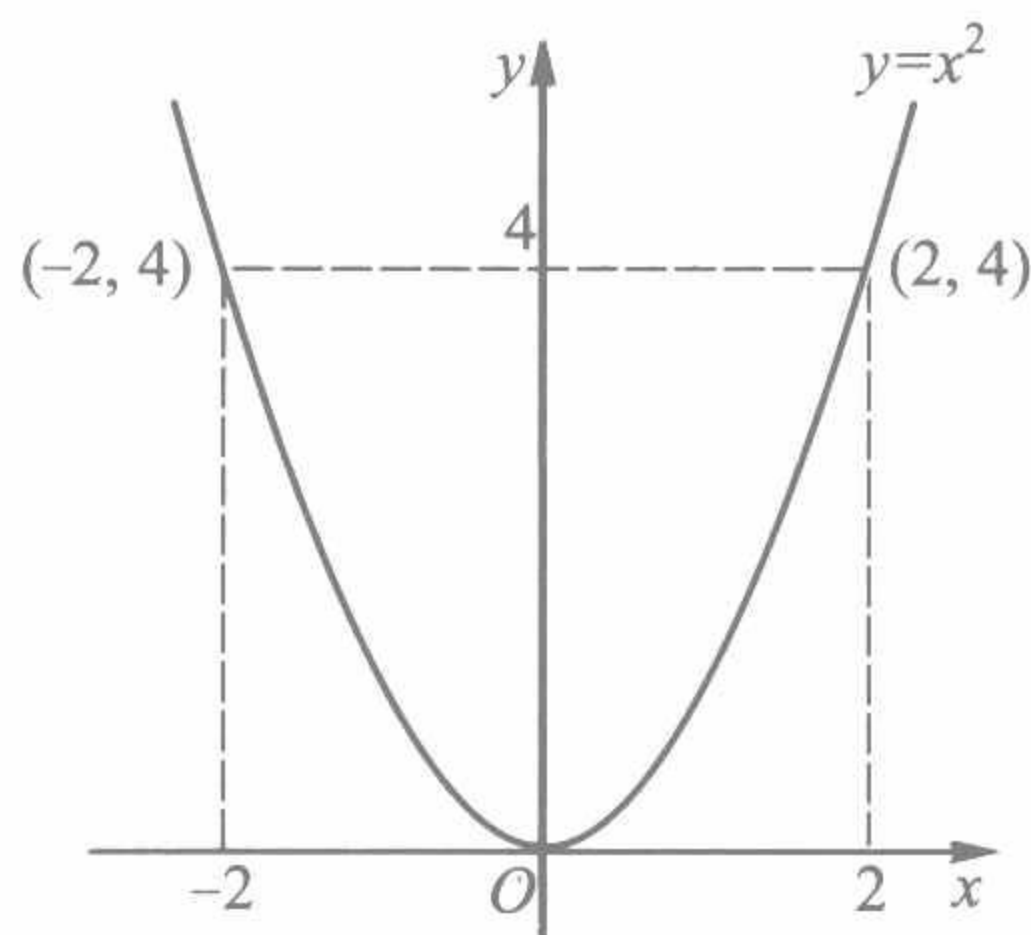


图 1.3

一般地, 设函数 $y = f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称, 若对任意 $x \in D$, 有

(i) $f(-x) = -f(x)$, 则称 $f(x)$ 为奇函数;

(ii) $f(-x) = f(x)$, 则称 $f(x)$ 为偶函数.

奇函数的图形关于坐标原点对称; 偶函数的图形关于 y 轴对称.

(2) 函数的单调性

观察函数 $y = x^3$ 的图形 (如图 1.2), 从左向右看 (沿着 x 轴的正方向), 这是一条上升的曲线, 即函数值随着自变量的值增大而增大, 这样的函数称为在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内是单调增加的. 在区间 $(-\infty, 0)$ 内, 观察函数 $y = x^2$ 的图形 (如图 1.3), 我们会看到, 情况完全相反, 这是一条下降的曲线, 即函数值随自变量的值增大而减少, 这时, 称函数 $y = x^2$ 在区间 $(-\infty, 0)$ 内是单调减少的.

一般地, 设函数 $f(x)$ 在区间 I ^① 上有定义, 若对于 I 中的任意两点 x_1 和 x_2 , 当 $x_1 < x_2$ 时, 总有

^① 区间分为有限区间和无限区间. 在以后的叙述中, 当我们所讨论的问题在任何一个区间上都成立时, 将用字母 I 表示这样一个泛指区间.

(i) $f(x_1) < f(x_2)$, 则称函数 $f(x)$ 在 I 上是单调增加的;

(ii) $f(x_1) > f(x_2)$, 则称函数 $f(x)$ 在 I 上是单调减少的.

单调增加的函数和单调减少的函数统称为单调函数. 若 $f(x)$ 在区间 I 内是单调函数, 则称 I 是该函数的单调区间.

沿着 x 轴的正方向看, 单调增加函数的图形是一条上升的曲线; 单调减少函数的图形是一条下降的曲线. 由图 1.4 知, 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内, 函数 $y = 2^x$ 是单调增加的; 而函数 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ 则是单调减少的. 由图 1.5 知, 在区间 $(0, +\infty)$ 内, 函数 $y = \ln x$ 是单调增加的.

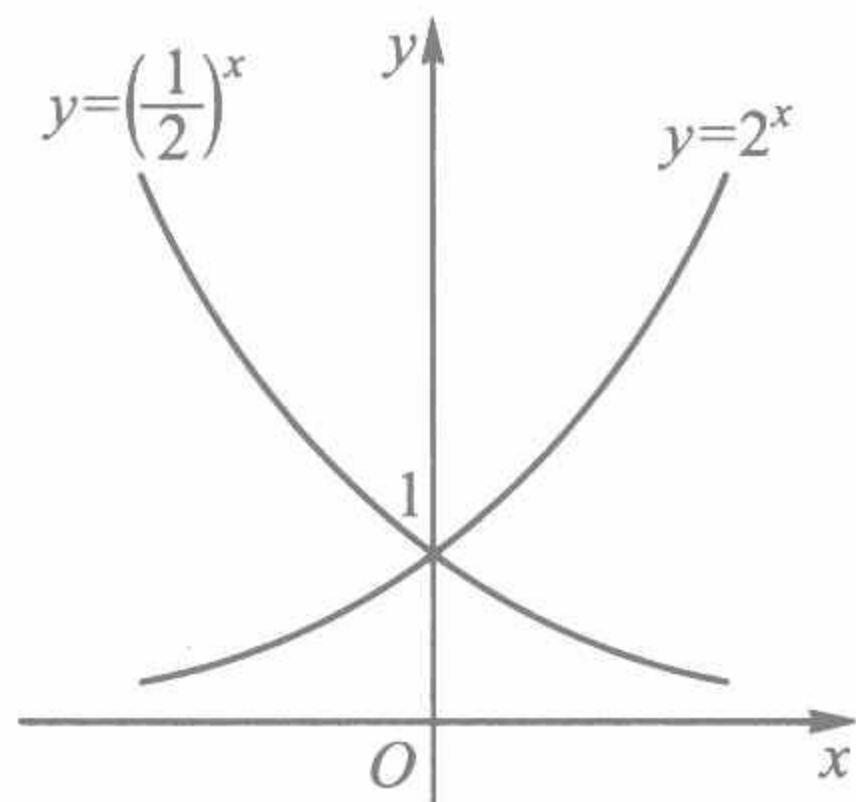


图 1.4

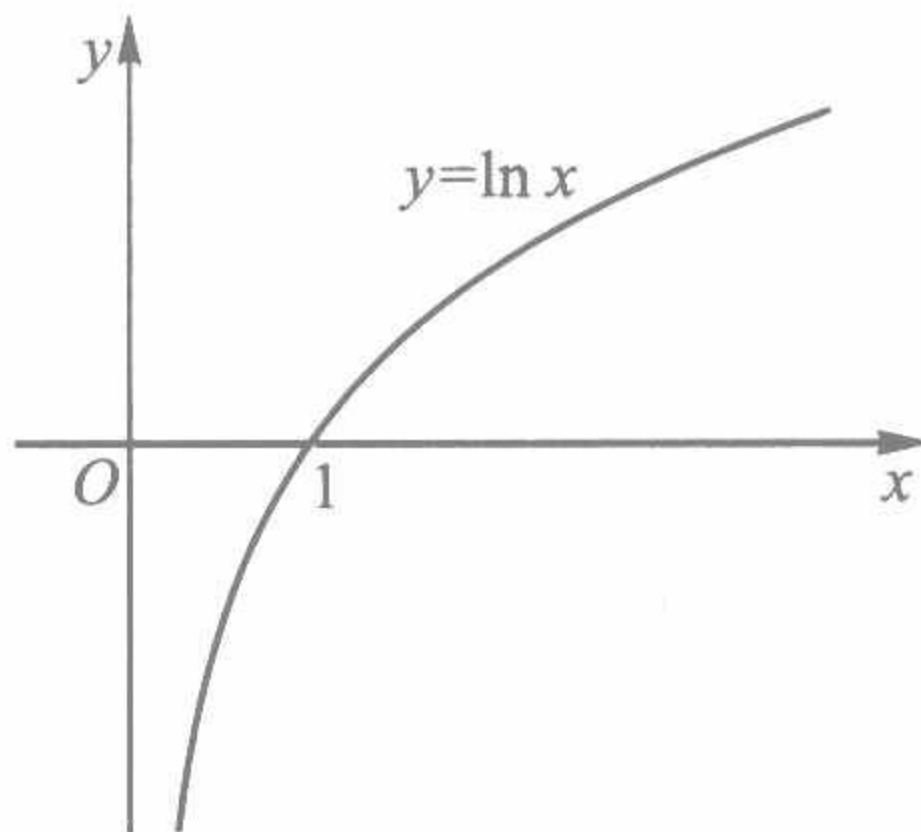


图 1.5

(3) 函数的周期性

我们已经知道, 正弦函数 $y = \sin x$ 是周期函数, 即有

$$\sin(x + 2n\pi) = \sin x, \quad n = \pm 1, \pm 2, \dots,$$

即 $\pm 2\pi, \pm 4\pi, \dots$ 都是函数 $y = \sin x$ 的周期, 而 2π 是它的最小正周期, 一般称 2π 为正弦函数的周期(如图 1.6).

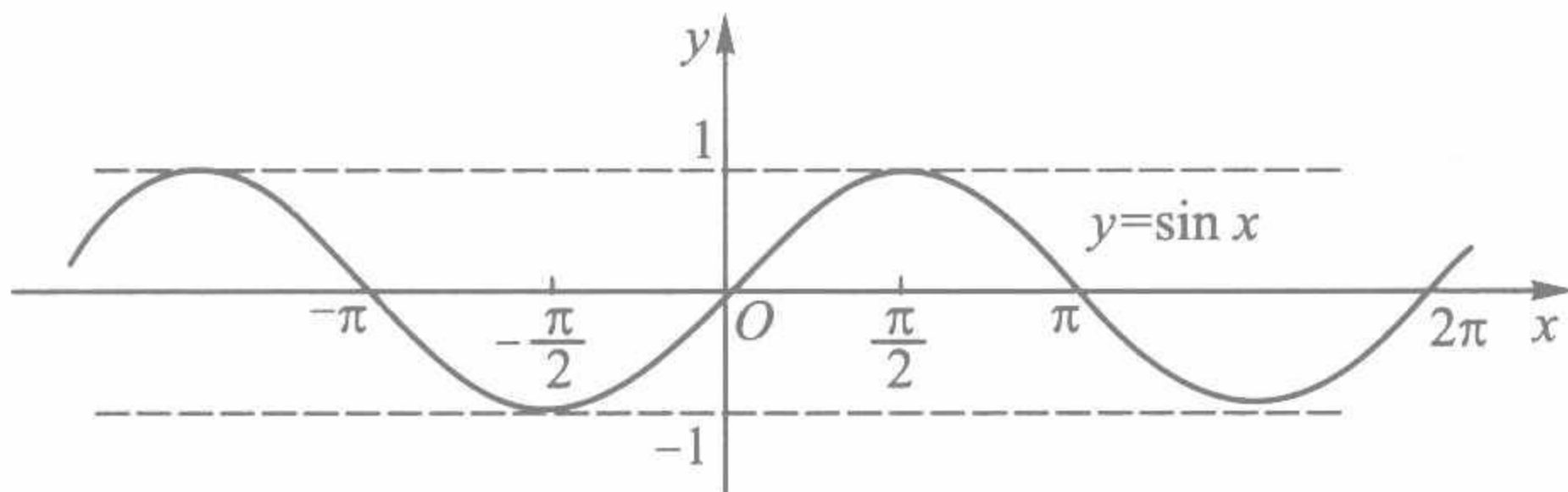


图 1.6

一般地, 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D , 若存在一个非零常数 T , 对于 D 内所有 x , 有 $x + T \in D$, 且

$$f(x + T) = f(x)$$

成立, 则称 $f(x)$ 是周期函数, 称 T 是它的一个周期.

若 T 是函数的一个周期, 则 $\pm 2T, \pm 3T, \dots$ 也都是它的周期. 对周期函数 $f(x)$, 若它在所有的周期中存在一个最小的正数, 通常, 我们称周期中的最小正周期为周期函数的周期.

周期为 T 的周期函数, 在长度为 T 的各个区间上, 其函数的图形有相同的形状. 对正弦函数 $y = \sin x$, 在长度为 2π 的各个区间上, 其图形的形状显然是相同的.

(4) 函数的有界性

在区间 $(-\infty, +\infty)$ 上, 函数 $y = \sin x$ 的图形(如图 1.6) 介于两条平行于 x 轴的直线

$y = -1$ 和 $y = 1$ 之间, 即有 $|\sin x| \leq 1$, 这时称 $y = \sin x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内是有界函数. 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内, 函数 $y = x^3$ 的图形(如图 1.2) 向上、向下都可以无限延伸, 不可能找到两条平行于 x 轴的直线, 使这个图形介于这两条直线之间, 这时称 $y = x^3$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内是无界函数.

一般地, 设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义, 若存在正数 M , 使得对任意的 $x \in I$, 有

$$|f(x)| \leq M \text{ (可以没有等号),}$$

则称 $f(x)$ 在区间 I 上是有界函数; 否则称 $f(x)$ 是无界函数.

有界函数的图形必介于两条平行于 x 轴的直线 $y = -M (M > 0)$ 和 $y = M$ 之间.

例如, 正弦函数 $y = \sin x$ 在其定义域 $(-\infty, +\infty)$ 内是有界的(如图 1.6),

$$|\sin x| \leq 1.$$

二、初等函数

1. 基本初等函数

基本初等函数通常是指以下六类函数: 常量函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数^①.

(1) 常量函数

$$y = C (C \text{ 为常数}), \quad x \in (-\infty, +\infty),$$

其图形如图 1.7.

(2) 幂函数

$$y = x^\alpha \quad (\alpha \text{ 为实数}).$$

该函数的定义域随 α 而异, 但不论 α 取何值, 它在区间 $(0, +\infty)$ 内总有定义, 且其图形均过点 $(1, 1)$. 例如

当 $\alpha = 1$ 时, $y = x, x \in (-\infty, +\infty), y \in (-\infty, +\infty)$, 如图 1.8.

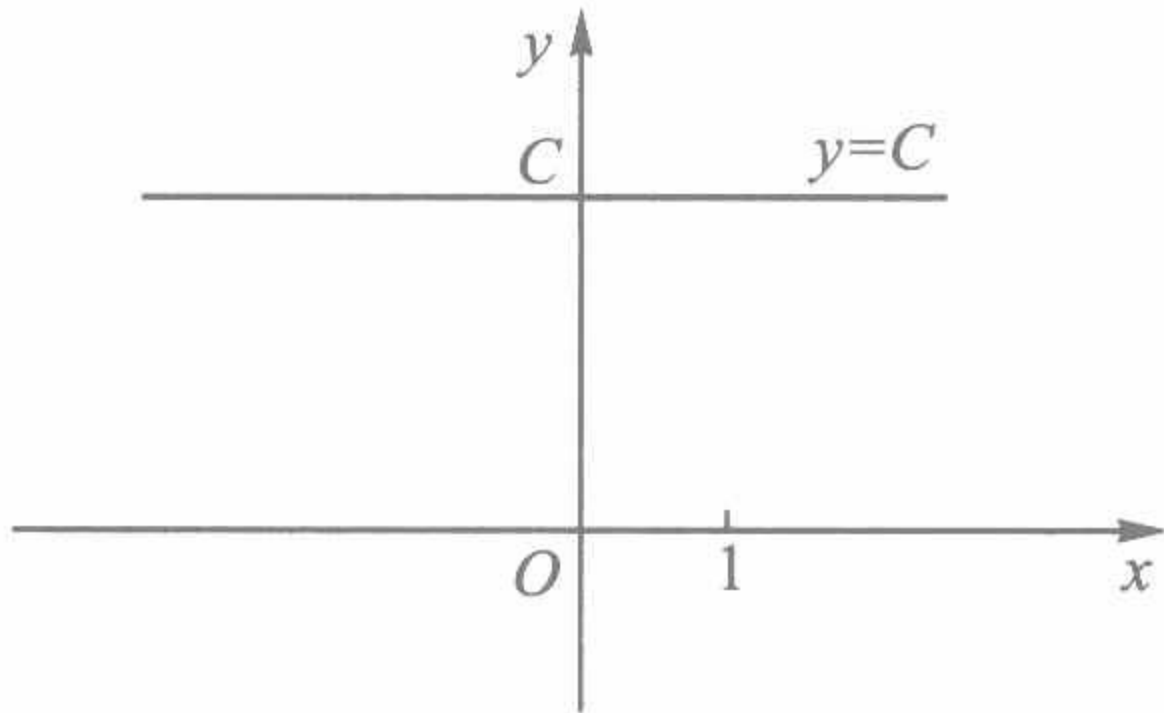


图 1.7

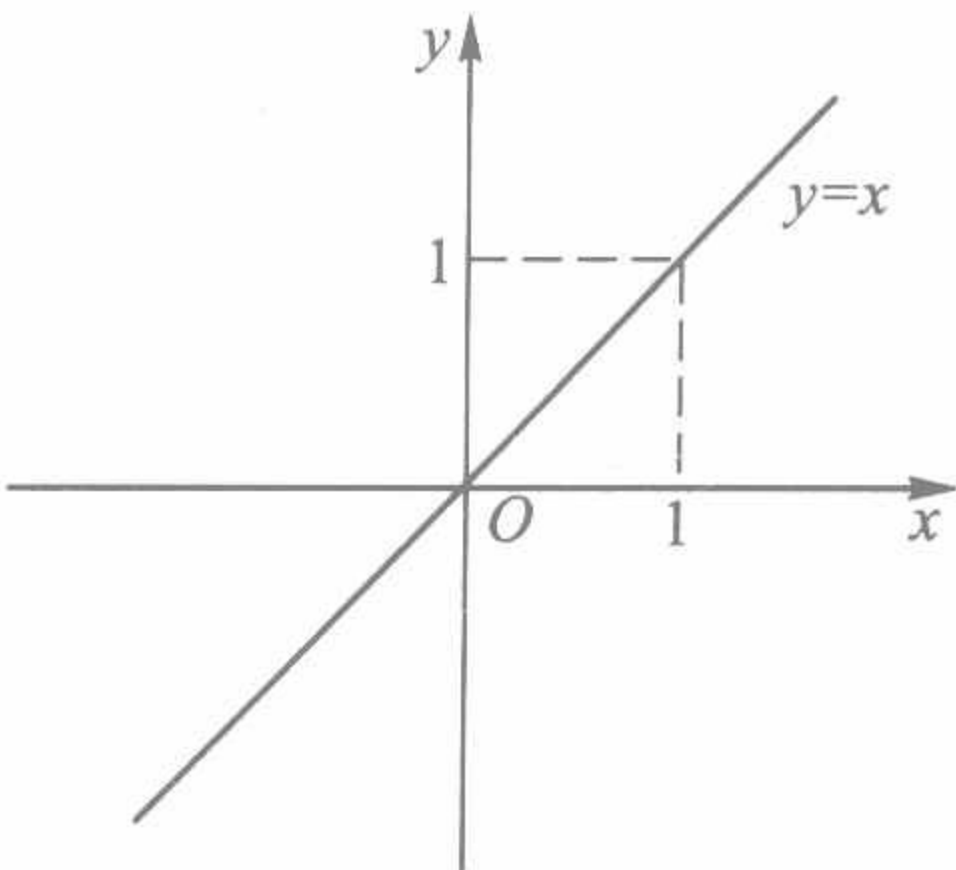


图 1.8

当 $\alpha = 2$ 时, $y = x^2, x \in (-\infty, +\infty), y \in [0, +\infty)$, 如图 1.3.

当 $\alpha = 3$ 时, $y = x^3, x \in (-\infty, +\infty), y \in (-\infty, +\infty)$, 如图 1.2.

^① 由于在经济问题中基本不涉及反三角函数, 故本教材不研究该类基本初等函数.