普通高等教育“十一五”国家级规划教材

大学数学基础教程 下册

第二版

刘元骏 编著

科学出版社

普通高等教育“十一五”国家级规划教材

大学数学基础教程

（第二版）

（下 册）

刘元骏 编著

科 学 出 版 社

北 京

内 容 简 介

本书是作者根据多年的教学积累，在总结此前出版的同类教材得失的基础上，参照数学教学现代化的主流趋势编撰而成的. 本书分上、下两册出版. 下册内容为空间解析几何和多元微积分，包括空间解析几何简介、多元函数微分学、重积分、曲线积分与曲面积分和无穷级数等 5 章. 书后还附有二阶混合偏导数相等的充分条件，活动标架、曲率与挠率，二元函数在驻点处取极值的充分条件，最小二乘法简介，由参数方程表示的曲面面积公式，函数项级数的一致收敛及其性质，部分习题、复习题答案与提示等 7 个附录.

本书可作为综合大学、理工科大学和师范院校对数学要求较高的非数学专业本科学生的教材或参考书.

图书在版编目(CIP)数据

大学数学基础教程. 下册/ 刘元骏编著. —2 版. —北京：科学出版社，2016.7

普通高等教育“十一五”国家级规划教材

ISBN 978-7-03-049445-0

Ⅰ.①大… Ⅱ.①刘… Ⅲ.①高等数学–高等学校–教材 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016) 第 171019 号

责任编辑：李鹏奇 王 静 / 责任校对：张凤琴
责任印制：白 洋 / 封面设计：迷底书装

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

大厂书文印刷有限公司 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2009 年 1 月第 一 版 开本：720 × 1000 1/16
2016 年 8 月第 二 版 印张：21 1/4
2016 年 8 月第八次印刷 字数：428 000

定价：39.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

第二版前言

本书于 2008 年初版, 经过 8 年的教学实践之后, 应科学出版社之邀进行了这次全面修订. 这次修订, 我们依然坚持立论严谨、详略得当的原则; 行文叙述继续保持简明准确、平实流畅的风格; 第一版中大量精致的几何图形和附录, 经过局部的修改变动, 全部保留.

为均衡两个学期的教学内容, 这次再版将原来下册的常微分方程一章移到上册的最后, 而将原来上册的空间解析几何移到下册的最前面. 这样一来, 恰好将空间解析几何的内容和多元函数微分学衔接起来, 而不会受到假期的阻隔. 这次修订增减了少量例题和习题, 改正了排版和印刷中的一些错误.

内蒙古大学数学科学学院曾使用本教材的下列教师参加了这次修订工作: 刘树忠 (第 1 章)、刘水霞 (第 2 章)、海国君 (第 3 章)、刘金存 (第 4 章)、杨红丽 (第 5 章)、陈金设 (第 6 章)、颜昭雯 (第 7 章)、杨春红 (第 8 章)、王镁 (第 9 章、第 10 章).

他们或是设计了修订的方案, 或是提出了具体的修改意见, 或是直接给出电子版的修订稿, 都对这次再版修订起到至关重要的作用. 没有这一批年轻同事和朋友的有效工作, 以我的一己之力, 是很难完成这次再版工作的!

刘元骏

2016 年 4 月

于内蒙古大学

第一版前言

一

大学数学是高等院校对非数学专业本科学生开设数学课程的总称，它代表的是一类课程. 根据不同的专业需要，这类课程开设的内容和深度均有所不同. 从内容上看大体包含四门课程：第一门是微积分 (习惯上又称高等数学)，以研究连续变量为主；第二门是线性代数，以研究离散变量为主；第三门是概率统计，以研究随机变量为主；第四门则是数学实验或数学建模，以数学的应用研究为主.

高等数学是大学数学课群里的首选基础课程，从教学内容和深度看，理工类专业要求较高，然后是经济管理类专业和其他文科类专业，教学时数也由多到少不全相同.

本书主要面向对数学要求较高的非数学专业本科学生，同时也兼顾其他专业的需要，试图为这样一个比较宽泛的大学低年级学生群体开设的高等数学课程提供一套立论严谨，取材适中，说理透彻，叙述流畅且与教学现代化的改革与发展趋势合拍的基础读本.

二

高等数学是一门重要的基础课程，对理工科专业的学生来说尤为重要. 它包括微积分、空间解析几何、常微分方程等近代数学分支的基础内容. 本书的上册讲授一元微积分和空间解析几何；下册讲授多元微积分、无穷级数和常微分方程. 一般可在 200 课时授完. 如果精简部分内容，也可在较少的 180 课时讲完.

非数学专业的本科学生为什么要学习数学课程？这个问题对于理工科专业的学生来说似乎不言自明，但实际上仍然存在很多模糊认识. 1998 年冬，我国数学教育界经过几年的深入研究与准备，召开了一次以“数学在大学中的地位”为主题的大型研讨会. 国内数学教育界大多数专家学者关于数学教育在大学教育中的应有作用形成了重要的共识，一致认为：成功的数学教育既要为学生所学专业提供必要的数学工具，又不能把这种“工具性”理解得过窄；要对学生进行必要的理性思维

训练，改善他们的思维品质；要发挥数学教学中美育的作用，将大学数学教育纳入素质教育的轨道.

十余年来，这三条共识对我国高校数学教学和改革产生了积极的影响，对那些刚刚走进大学校门准备学习大学数学的学生来说，也有现实的指导意义.

我们知道，现代数学是自然科学的基本语言，是运用模式探索物质世界运动机理的主要手段. 对现代工业和现代工程而言，数学更是表达技术原理、进行科学计算的必不可少的工具. 由于计算机的快速发展，现代社会的经济运行与组织管理更无法离开现代数学所提供的方法、模式与手段. 所以，一种成功的数学教育也好，一个合格的大学生也好，首先应该教好、学好作为工具的数学，作为改造客观世界的数学.

提起数学的教与学，就不应该忘记爱因斯坦 (Einstein) 说过的一句话:“被放在首要位置的永远应该是独立思考和判断的总体能力的培养，而不是获取特定的知识.”这就是不能把数学课程的“工具性”理解得过窄的含义. 大学四年，转瞬即逝，可是数学的知识却浩如烟海，我们应该在那些最基本的原理、最基本的方法、最基本的能力上下工夫，将它们内化为个体的素质和优秀的思维品质. 还是爱因斯坦说得好:“如果人们已经忘记了他们在学校里所学的一切，那么所留下的就是教育.”微积分能给我们留下什么？我认为微积分能多方位地塑造科学精神，建立科学思维的方法. 从这个意义上讲，我们还要教好、学好作为改造主观世界的数学.

三

内蒙古大学在大学数学教学改革和教材建设上有较好的积累. 1995 年，作者在内蒙古大学出版社出版了为综合大学物理类专业使用的《高等数学基础教程》. 1999 年，曹之江教授与作者合作在高等教育出版社出版面向 21 世纪课程教材《微积分简明教程》. 2001 ~2003 年，作者主持世行贷款 21 世纪初高等教育教学改革项目“大学数学分层次教学的研究与实践”. 2005 年，内蒙古大学的大学数学课程被评为内蒙古自治区精品课程. 本书的编撰思想就是在这些工作积累之下形成的.

本书在引进重要数学概念和数学原理时，注意尽可能本原地挖掘并阐述那些理性思维训练的要素，为那些抽象的数学概念固本浚源. 对那些形式化或是数学技巧的内容，我们秉持淡化的原则，在讲清问题背景和逻辑演绎的前提下，不做过多训练.

本书遵循分层次教学的理念，在上、下两册都设置了一定篇幅的附录，供有兴

趣又有能力的学生阅读. 其中有为微积分创立与发展过程中做出过贡献的数学家简介, 有当前中学数学与大学数学脱节的内容补充, 有希望学生了解而又无法讲授或是并不普遍要求的教学内容. 这种多窗口式的展示是一种尝试, 目的在于满足学生的多元需求.

本书在借助图形几何直观上做了努力, 以增加空间的想象力, 降低课程的难度, 激发学生学习的积极性. 在行文叙述上尽量简明准确, 平实流畅, 兼具良好的可读性与启发性.

四

本书被列入普通高等教育“十一五”国家级规划教材, 源于 2005 年科学出版社的盛情邀请以及孙炯教授的热情鼓励, 没有这些邀请与鼓励, 本书的一些构想可能仍被束之高阁.

本书写作期间得到内蒙古大学教务处朱瑞英副处长和数学科学学院院长杨联贵教授的大力支持以及很多同事的帮助. 协助我编配习题、复习题的是一批优秀的年轻博士和硕士——黄俊杰、高彩霞、刘水霞、范惠荣、刘金存、张静等, 他 (她) 们在繁忙的教学科研工作之余, 认真而有效地工作, 才保证了本书的编撰进度. 书中一些精美插图的绘制得到王镁副教授的帮助, 为本书增加了不少的亮点.

孙炯教授、朱瑞英副教授和于素芬副教授仔细审读了书稿, 提出很有价值的建设性意见和建议, 对此作者表示衷心的感谢! 本书在试用过程中还得到作者所在教学团队的所有同事和承担助教工作的在读硕士生们的积极协助, 作者也深表感谢!

在本书即将出版之际, 还应该感谢曹之江教授多年来在国内和内蒙古大学推进数学教学改革所作出的积极努力, 正是他的关心与指导, 内蒙古大学大学数学作为精品课程的建设才有今天的局面.

由于作者水平所限, 加之时间仓促, 书中存在一些错误在所难免, 望数学教育界的朋友们和读者不吝指正.

刘元骏

2008 年 5 月

目　录

第 6 章　空间解析几何简介

平面解析几何告诉我们, 在给定的平面直角坐标系下, 可以用坐标 (二元有序实数组) 表示平面上的点, 用坐标所满足的方程表示平面上的曲线, 于是代数的方法进入几何学的研究, 形成解析几何学特有的思想和方法. 现在我们将研究的内容从平面扩展到空间.

本章对空间解析几何学这一数学分支的介绍仅限于简介, 不做深入的讨论, 这是因为, 设置本章的目的主要是给多元函数微积分这些后续内容提供直观知识的背景.

我们先来介绍空间直角坐标系和向量这两个重要工具.

§6.1　向量及其运算

6.1.1　空间直角坐标系

设有平面直角坐标系 O-xy, 过点 O 作 xy 平面的垂线 Oz, 适当选择 Oz 的正方向, 使 Ox, Oy, Oz 符合下列**右手法则**的顺序: 若右手四指握拳的方向恰与 Ox 轴正向旋转 $90°$ 到达 Oy 轴正向的旋转方向一致, 则右手拇指的方向和 Oz 轴的正向一致 (图 6.1). 这样三条两两垂直且相交于点 O 的数轴连同它们所确定的平面称为**空间直角坐标系** O-xyz. 轴 Ox, Oy, Oz 称为**坐标轴**. 平面 Oyz, Ozx, Oxy 称为**坐标平面**. 点 O 仍称为**原点**. 三个坐标平面分空间为八个部分, 每个部分称为**卦限**. 第一卦限至第八卦限的位置如图 6.2 所示.

在空间内任取一点 M, 依次记点 M 在 x, y, z 轴上的投影[①] 为 P, Q, R. 由这三个点所在轴上的坐标构成的三元有序实数组 (x, y, z), 称之为 M 的**坐标**.

反过来, 任给一组三元有序实数组, 都可借助于初等几何的方法, 在给定坐标系下找到唯一确定的点, 以此数组为坐标. 这样就形成了空间点与它的坐标间的一一对应关系.

---

① 过点 M 作某直线的垂直相交直线, 称垂足为点 M 在此直线上的**投影**, 如图 6.3 所示, 点 P, Q, R 就是点 M 在坐标轴 x, y, z 轴上的投影.

类似地, 过点 M 作某平面的垂线, 称垂足为点 M 在此平面上的**投影**, 如图 6.3 所示, 点 M_1 就是点 M 在坐标平面 O-xy 上的投影.

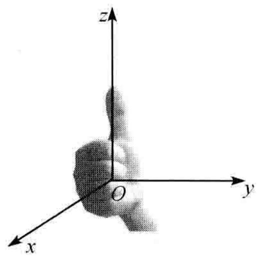

图 6.1　右手法则的图示

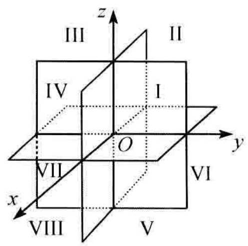

图 6.2　空间直角坐标系

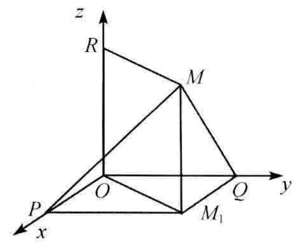

图 6.3　空间点的坐标

建立空间直角坐标系之后, 可以仿照平面解析几何里已经采用的方法得到一系列类似结论.

1. **空间两点间的距离公式**

已知两点 $M_i(x_i, y_i, z_i)\ \ (i=1,2)$, 若记它们之间的距离 $\rho(M_1, M_2)$, 则

$$\rho(M_1, M_2) = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}. \tag{6.1.1}$$

如图 6.4 所示, 利用勾股定理和立体几何的知识, 结论 (6.1.1) 不难证明.

2. **定比分点公式**

已知两点 $M_i(x_i, y_i, z_i)\ \ (i=1,2)$, 若 M_1, M_2 所在直线上的点 $P(x,y,z)$ 分有向线段 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 为定比

$$\lambda = \frac{M_1P}{PM_2} \qquad (\lambda \neq -1),$$

则点 P 的坐标为

$$x = \frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}, \quad y = \frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}, \quad z = \frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}. \tag{6.1.2}$$

式 (6.1.2) 由平面解析几何中的定比分点公式和立体几何的知识证明, 此处从略. 应该指出, 在表示比值 λ 的分式中 M_1P 和 PM_2 分别表示有向线段 $\overrightarrow{M_1P}$ 和 $\overrightarrow{PM_2}$ 在 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 方向下的**值**①. 图 6.5 给出分点 P 的不同位置对定比 λ 的符号以及绝对值的大小所造成的影响.

① 数轴 l 上有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 的**值**是指这样一个代数数, 它的绝对值等于有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 的长度, 它的符号取决于有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 与数轴 l 同方向还是反方向, 同向取正, 反向取负.

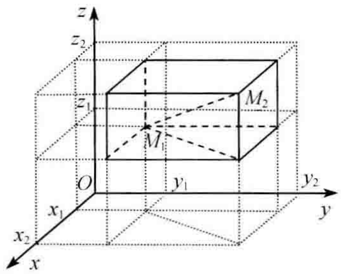

图 6.4 两点距离公式证明的图示

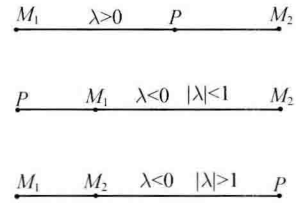

图 6.5 定比分点公式的讨论

本章还要使用另一个重要工具 —— **向量**, 今后将交替使用坐标和向量这两种工具, 以便更便捷地展开空间解析几何的有关内容.

6.1.2 向量的概念

向量的概念产生于物理学, 也称作**矢量**, 用来表示一类兼具大小和方向的物理量, 如物理学中的力、速度、加速度等. 给出向量的原意是为了与那些只有大小而无方向的**标量** (如温度与质量等) 相区分.

从数学上看, 向量就是一个**有向线段**, 这个线段的长度代表向量的大小, 从起点到终点的方向代表向量的方向. 以 A 为起点, B 为终点的向量沿用有向线段符号, 记作 $\overrightarrow{AB}$. 本书也用斜黑体字母, 如 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{F}$ 表示向量.

向量 $\overrightarrow{AB}$ 的大小称作向量的**模**, 记作 $|\overrightarrow{AB}|$. 模为 1 的向量称为**单位向量**, 模为零的向量称为**零向量**, 记作 $\mathbf{0}$. 零向量的方向不确定. **当且仅当向量的起点与终点相重合时, 向量成为零向量**.

向量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 具有相同的方向和大小时, 称它们**相等**, 记作 $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$.

基于这种规定, 向量的相等并不要求它们具有相同的起点, 因此有人说数学上研究的是**自由向量**.

两个向量具有相同或相反方向时, 称它们**平行**, 记作 $\boldsymbol{a} // \boldsymbol{b}$. 零向量被认为和任何向量平行. 两个向量平行, 一定可以平移到同一条直线上, 因此又被称作**共线**.

建立直角坐标系之后, 以原点 O 为起点的向量称为**向径**, 记作 $\overrightarrow{OM}$. 任何一个向量都可通过平移找到一个和它相等的向径.

1. 向量的加法

设有向量 $\overrightarrow{OA} = \boldsymbol{a}, \overrightarrow{OB} = \boldsymbol{b}$. 以 $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ 为邻边的平行四边形的对角线所确定的向量 $\overrightarrow{OC} = \boldsymbol{c}$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的**和**, 记作 $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{c}$.

上述定义实际上是力学中求合力的**平行四边形法则**(图 6.6).

利用下列**三角形法则**可以同样定义向量的加法 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$: 将向量 $\boldsymbol{b}$ 的起点放在向量 $\boldsymbol{a}$ 的终点上, 以向量 $\boldsymbol{a}$ 的起点为起点, 向量 $\boldsymbol{b}$ 的终点为终点所得到的向量即向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$(图 6.7).

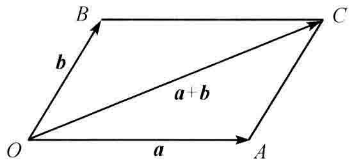

图 6.6　向量加法的平行四边形法则

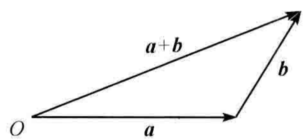

图 6.7　向量加法的三角形法则

向量的加法运算满足以下算律.

(i) *加法的交换律*: $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$;

(ii) *加法的结合律*: $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$;

(iii) *零向量相加不变*: *对任意向量* $\boldsymbol{a}$ *有* $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{a}$.

加法交换律可以借助图 6.6 证明, 加法结合律可借助图 6.8 证明, 零向量性质直接由零向量的定义得到.

根据加法的交换律和结合律, n 个向量 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n$ 的加法运算可以写成

$$\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\cdots+\boldsymbol{a}_n=\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{a}_i,$$

并利用三角形法则按照图 6.9 提示的方法进行: 后一向量的起点放在前一向量的终点上, 以第一个向量的起点为起点, 第 n 个向量的终点为终点的向量即为 n 个向量之和.

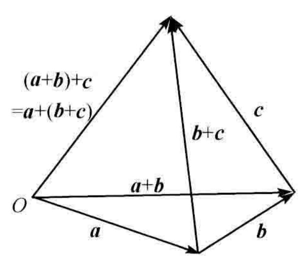

图 6.8　加法结合律的图示

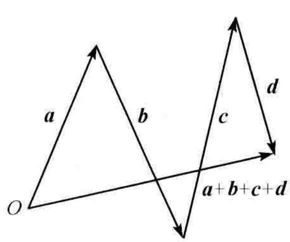

图 6.9　4 个向量相加的图示

2. *向量与实数的乘法*

向量 $\boldsymbol{a}$ 与实数 λ 的乘法简称为**数乘**, 记作 $\lambda\boldsymbol{a}$. 数乘 $\lambda\boldsymbol{a}$ 仍表示一个向量, 它的

模等于 $|\boldsymbol{a}|$ 的 $|\lambda|$ 倍, 即

$$|\lambda \boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|,$$

$\lambda \boldsymbol{a}$ 的方向当 $\lambda>0$ 时, 与 $\boldsymbol{a}$ 相同; 当 $\lambda<0$ 时, 与 $\boldsymbol{a}$ 反方向; 当 $\lambda=0$ 时, $\lambda \boldsymbol{a}=\mathbf{0}$.

特别地, 当 $\lambda=1$ 时, $1\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$. 当 $\lambda=-1$ 时, 记 $(-1)\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a}$, 它表示与向量 $\boldsymbol{a}$ 大小相等方向相反的向量, 称之为 $\boldsymbol{a}$ 的**反向向量**或**负向量**.

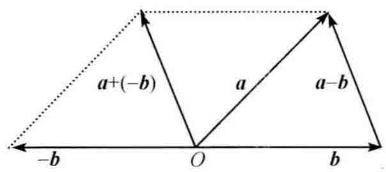

图 6.10　向量减法的图示

利用负向量的概念可以定义向量的减法 (图 6.10):

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b}).$$

关于向量加法和数乘所满足的算律, 还有以下五条:

(iv) 向量与其负向量相加为零: 对任意向量 $\boldsymbol{a}$, 有 $\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\mathbf{0}$.

(v) 单位 1 数乘不变: $1\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$.

(vi) 数乘的结合律: $\lambda(\mu \boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$.

(vii) 数乘对实数加法的分配律: $(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$.

(viii) 数乘对向量加法的分配律: $\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$.

向量数乘与加法运算称为向量的**线性运算**, 性质 (i)~(viii) 反映了线性运算的特征. 这些性质可按定义逐一验证, 此处从略. 依据这八条算律, 向量间的运算就像数量运算一样方便.

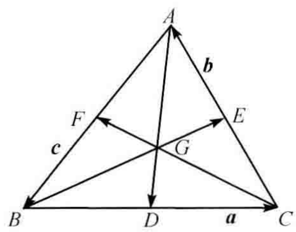

图 6.11　三角形三中线共点的图示

利用数乘的概念, 可以将一个非零向量 $\boldsymbol{a}$ 改造成一个和 $\boldsymbol{a}$ 的方向相同, 但模等于 1 的单位向量 $\boldsymbol{a}_0$, 实际上,

$$\boldsymbol{a}_0=\frac{1}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a}.$$

由此知非零向量 $\boldsymbol{a}$ 可以表示成 $\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}_0$.

例 6.1.1　试利用向量的运算证明三角形的三中线相交于一点 (图 6.11).

证明　在 $\triangle ABC$ 中, 记 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{c},\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{a},\overrightarrow{CA}=\boldsymbol{b}$. 设 D,E,F 分别为 BC,CA,AB 边上的中点. G 为中线 AD 靠近 D 的三等分点, 即 $\overrightarrow{GD}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AD}$. 现证明 G 点同时还位于中线 BE,CF 上.

由于 $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\boldsymbol{c}+\dfrac{1}{2}\boldsymbol{a}$, 因此

$$\overrightarrow{GD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}=\frac{1}{3}\boldsymbol{c}+\frac{1}{6}\boldsymbol{a}.$$

这样一来,

$$\overrightarrow{BG}=\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DG}=\frac{1}{2}\boldsymbol{a}-\frac{1}{3}\boldsymbol{c}-\frac{1}{6}\boldsymbol{a}=\frac{1}{3}\boldsymbol{a}-\frac{1}{3}\boldsymbol{c},$$

而

$$\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CE}=\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}-\frac{1}{2}(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a})=\frac{1}{2}\boldsymbol{a}-\frac{1}{2}\boldsymbol{c},$$

于是得到 $\overrightarrow{BG}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{BE}$, 即 BG, BE 共线, 点 G 在 BE 上.

同理还可证明点 G 也在 CF, 故三条中线共点于 G.

例 6.1.2 试证明:

(i) $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b} \Longleftrightarrow$ 存在不全为零的实数 λ, μ, 使得 $\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}=\mathbf{0}$;

(ii) 若 $\boldsymbol{a}\neq\mathbf{0}$, 则 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b} \Longleftrightarrow$ 存在唯一的实数 λ, 使得 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$.

证明 (i) 充分性 不妨设 $\lambda\neq 0$, 则由 $\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}=\mathbf{0}$, 得到 $\boldsymbol{a}=-\dfrac{\mu}{\lambda}\boldsymbol{b}$, 由此可见, $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$.

必要性 设 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$. 若 $\boldsymbol{a}=\mathbf{0}$, 则只要取 $\lambda=1, \mu=0$, 便有 $\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}=\mathbf{0}$. 同样, 若 $\boldsymbol{b}=\mathbf{0}$, 则只要取 $\lambda=0, \mu=1$, 便有 $\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}=\mathbf{0}$.

若 $\boldsymbol{a}\neq\mathbf{0}, \boldsymbol{b}\neq\mathbf{0}$, 取 $\lambda=\pm\dfrac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}$, 其中的正负号按以下方式确定: 当 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 同方向时, 取负; 当 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 反方向时, 取正. 这时 $\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 反方向, 而且

$$|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|=\frac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|.$$

因此有 $\lambda\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\mathbf{0}$.

(ii) 充分性 由 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$, 立刻得到 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$.

必要性 按照 (i) 中必要性的证明知存在实数 λ, 使得 $\lambda\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\mathbf{0}$, 即 $\boldsymbol{b}=-\lambda\boldsymbol{a}$.

实数 λ 唯一性的证明 若存在两个不同实数 $\lambda\neq\mu$, 使得

$$\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a} \text{ 及 } \boldsymbol{b}=\mu\boldsymbol{a}$$

同时成立, 则有 $(\lambda-\mu)\boldsymbol{a}=\mathbf{0}$. 由于 $\boldsymbol{a}\neq\mathbf{0}$, 则必有 $\lambda-\mu=0$, 矛盾.

6.1.3 向量的坐标

1. 一维直线坐标系上向量的表示

已知一维的直线坐标系 Ox 轴 (图 6.12), 与 x 轴同方向的单位向量记作 $\boldsymbol{i}$. 根据例 6.1.2(ii) 中的结论, 对 x 轴上的任意向量 $\overrightarrow{OP}$, 都存在唯一的实数 x, 使得