普通高等院校“十二五”规划教材

数学建模

SHUXUE JIANMO

沈大庆 主 编
李繁荣 马吉臣 张红宁 副主编

国防工业出版社
National Defense Industry Press

数学建模

沈大庆　主编
李繁荣　马吉臣　张红宁　副主编

国防工业出版社
·北京·

内容简介

本书是继《基础数学Ⅰ(高等数学)》《基础数学Ⅱ(线性代数与概率统计)》和《应用数学》之后适合应用型高校非数学专业学生的又一本教材。该教材介绍了数学模型和数学建模的基本概念以及八步建模法。由浅入深、循序渐进地讲解了一些数学模型,使学生逐渐了解数学建模的思想和方法,增强利用数学模型解决实际问题的意识和能力。此外,本教材也用了一定的篇幅简单介绍了常用的统计建模的方法和 SPSS 统计软件。

本书适合应用型高校非数学专业使用,也可作为相关专业人员的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

数学建模 / 沈大庆主编. —北京: 国防工业出版社, 2016.3

ISBN 978-7-118-10835-4

Ⅰ. ①数... Ⅱ. ①沈... Ⅲ. ①数学模型-高等学校-教材 Ⅳ. ①O141.4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 055585 号

※

国防工业出版社出版发行

(北京市海淀区紫竹院南路 23 号 邮政编码 100048)

三河市腾飞印务有限公司印刷

新华书店经售

*

开本 787×1092 1/16 **印张** 9¼ **字数** 208 千字

2016 年 3 月第 1 版第 1 次印刷 **印数** 1—3000 册 **定价** 26.00 元

国防书店:(010)88540777 发行邮购:(010)88540776

发行传真:(010)88540755 发行业务:(010)88540717

前　言

大千世界，浩瀚宇宙，绚丽多彩，变化万千。自然现象，社会现象，无穷无尽，时时刻刻都在按各自的规律、模式运动、变化、发展。从古到今人类在不断实践、探索、研究、揭示现实，形成了诸多理论学科。人们研究各种现象的一种重要方法就是为了某种目的建立研究对象的模型。模型是为了某个特定的目的而构造的整个原型（研究对象）或其某一层面的替代物。模型可分为两大类：形象模型和抽象模型。形象模型包含直观模型和物理模型，抽象模型包括思维模型、符号模型和数学模型。数学模型就是揭示原型数量上和空间存在形式上的规律性的模型。而万事万物、一切现象都普遍存在数量上和空间存在形式上的规律性，因此数学模型无处不在。所以，马克思说："一门科学只有成功地运用数学时，才算达到真正完善的地步。"

那么到底什么是数学模型呢？其实大家在学习初等代数的时候就已经碰到过数学模型了。譬如大家熟知的"鸡兔同笼"问题：一个笼子里装有鸡和兔若干只，已知它们共有 8 个头和 22 只脚，问该笼子中有多少只鸡和多少只兔。

解：设笼中有鸡 x 只，有兔 y 只，由已知条件有

$$\begin{cases} x+y=8 \\ 2x+4y=22 \end{cases}$$

这个二元方程组就是上述"鸡兔同笼"问题的数学模型，解得 $x=5, y=3$，即该笼子中有鸡 5 只，有兔 3 只。将此结果代入原题进行验证可知所求结果正确。

实际问题的数学模型有的简单，有的复杂。由上面例子可以看出：数学模型就是对实际问题的一种数学表述。具体一点说：数学模型是关于部分现实世界为某种目的的一个抽象、简化的数学结构。更确切地说：数学模型就是对于一个特定的对象为了一个特定目标，根据特有的内在规律，做出一些必要的简化假设，运用适当的数学工具，得到的一个数学结构。数学结构可以是数学公式、算法、表格、图示等。而数学建模是指建立研究对象的数学模型的全过程。

数学是在实际应用的需求中产生的，要解决实际问题就常常需要建立数学模型，从此意义上讲数学建模和数学一样有古老历史。欧几里得几何、牛顿的万有引力定律和微积分、线性代数、概率与数理统计和近代发展起来的应用数学各个分支都是数学建模的光辉典范。

随着数学和计算机科学的发展，数学以空前的广度和深度向其他科学技术领域渗透，出现了许多交叉学科和边缘学科。例如，数学化学、数学生物学、数学地质学、数学心理学、数理语言学、数学社会学、数量经济学、数理经济学等。当前，过去很少应用数学的领域正在迅速走向定量化、数量化，需建立大量的数学模型，甚至可以说当今的社会正在日益数学模型化。特别是高新技术、新工艺蓬勃兴起中，数学起着十分关键的作用。有远见

的科学家曾深刻地指出:“当今如此受到称颂的‘高科技’本质上是一种数学技术”。数学科学不但是一门科学而且是解决各方面实际问题的技术的观点越来越被人们所接受。因此,数学建模被时代赋予了更为重要的意义。

1985 年,在美国出现了一种叫做 MCM 的一年一度大学生数学模型(1987 年全称为 Mathematical Competition in Modeling,1988 年改全称为 Mathematical Contest in Modeling,其缩写均为 MCM)竞赛。这并不是偶然的。在 1985 年以前美国只有一种大学生数学竞赛(The William Lowell Putnam mathematial Competition,Putman(普特南)数学竞赛),这是由美国数学协会(Mathematical Association of America,MAA)主持,于每年 12 月的第一个星期六分两试进行,每年一次。在国际上产生很大影响,现已成为国际性的大学生的一项著名赛事,该竞赛每年 2 月或 3 月举行。

我国自 1989 年首次参加美国大学生数学建模竞赛,历届均取得优异成绩。经过数年参加美国赛表明,中国大学生在数学建模方面是有竞争力和创新联想能力的。为使这一赛事更广泛地展开,1990 年先由中国工业与应用数学学会,后与国家教委联合主办全国大学生数学建模竞赛(CMCM),该项赛事每年 9 月进行。

数学模型竞赛与通常的数学竞赛不同,它来自实际问题或有明确的实际背景。它的宗旨是培养大学生用数学方法解决实际问题的意识和能力,整个赛事是完成一篇包括问题的阐述分析,模型的假设和建立,计算结果及讨论的论文。通过训练和比赛,同学们不仅用数学方法解决实际问题的意识和能力有很大提高,而且在团结合作发挥集体力量攻关,以及撰写科技论文等方面将都会得到十分有益的锻炼。

我国各高校都相继开设了“数学建模”课程。当然不同层次的学校讲授的内容和深度有所不同,但是在培养利用所学的数学知识建立数学模型解决实际问题的能力培养方面是共同的。在各类数学建模比赛中,使用数学知识的深浅不是评价成绩的标准,而巧妙地利用所学的数学知识,合理恰当地解决了实际问题才是评价好坏的唯一标准。目前,在全国数学建模比赛中的成绩已成为评价高校数学教育好坏的重要衡量标准。

本教材第 1 章由沈大庆编写,第 3 章由李繁荣编写,其他各章由马吉臣、张红宁、刘亚轻、崔艳英和沈丽英编写。

目　录

第1章　简单数学模型和数学建模的基本步骤

1.1　简单的数学模型

在前言中介绍了数学模型、数学建模的概念和意义，这节先介绍一些简单的数学模型。

微积分、线性代数、概率论与数理统计是大学重要的基础课，是所有理工科、经济管理专业的必修课程。这些课程的学习对于学生了解数学知识，提高数学素养起到了积极作用。同时，这些课程又是建立数学模型、解决实际问题的基本工具。然而，由于内容多和课时所限，在如何运用这三门课的知识解决实际问题方面讲述的较少。这里我们举出一些例子来弥补讲“用”的不足，实际上也是提供一些简单数学建模的案例。

例1.1.1　椅子为什么在不平的地面上能放稳？

把椅子往不平的地面上一放，通常只有三条腿着地，放不稳，但只要稍微挪动几下，就可以四条腿着地放稳了。这是什么道理呢？

为了能用数学语言说明这个问题，必须对椅子和地面作出一些合理的假设：

(1) 椅子的四条腿一样长，椅腿与地面接触处看作是一个点，四腿连线呈正方形。

(2) 地面高度是连续变化的，沿任何方向不会出现间断（如没有台阶那种情况），即地面是数学上的连续曲面。

(3) 地面相对平坦，不会出现连续变化的深沟或凸峰，能够使椅子在任何位置上至少有三条腿着地。

这里的假设(1)是显然的，假设(2)给出了椅子可以放稳的条件，假设(3)则排除出了三条腿无法同时着地的情况。下面我们就在这些假设的基础上建立椅子问题的数学模型。

这里首先要解决的是如何用数学语言把问题的条件和结论表示出来。如图1－1所示，如果以A、B、C、D表示椅子的四条腿，以正方形$ABCD$表示椅子的初始位置，则以原点为中心按逆时针将其旋转角θ所得到的正方形$A'B'C'D'$就表示椅子位置的改变。换言之，椅子位置应该是角θ的函数。另外，由于可以以椅角与地面的竖直距离是否为零作为衡量椅腿是否着地的标准，而椅子旋转就是调整这一距离，因此该距离也应该是角θ的函数。注意到正方形的椅子腿是中心对称的，所以只要考虑两组对称的

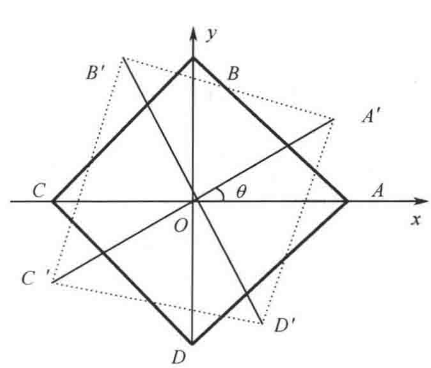

图1－1　椅子着地与旋转示意图

椅腿与地面的竖直距离就可以了。

设 A、C 两腿与地面距离之和为 $f(\theta)$，B、D 两脚与地面距离之和为 $g(\theta)$，显然

$$f(\theta) \geqslant 0,\ g(\theta) \geqslant 0$$

且由假设(2)可知，$f(\theta)$、$g(\theta)$ 均为连续函数；由假设(3)可知 $f(\theta)$ 与 $g(\theta)$ 中至少有一个为 0，即对任意 θ，$f(\theta)g(\beta)=0$，不妨设 $\theta=0$ 时，有 $f(\theta)>0,\ g(\theta)=0$。

于是，改变椅子的位置使其四条腿着地就归结为下面的命题：

已知 $f(\theta)$、$g(\theta)$ 均为连续函数，对任意的 θ，$f(\theta)g(\beta)=0$，且 $f(\theta)>0,\ g(\theta)=0$，证明至少存在一点 θ_0，可使 $f(\theta_0)=g(\theta_0)=0$。

注意到将椅子旋转 $\frac{\pi}{2}$ 后对角线 AC 与 BD 交换，于是由 $f(\theta)>0,\ g(\theta)=0$，知

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0,\ g\left(\frac{\pi}{2}\right)>0$$

设辅助函数 $H(\theta)=f(\theta)-g(\theta)$，则 $H(\theta)$ 在区间 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上连续，且

$$H(0)=f(0)-g(0)>0,\ H\left(\frac{\pi}{2}\right)=f\left(\frac{\pi}{2}\right)-g\left(\frac{\pi}{2}\right)<0$$

故由零点定理可知，至少存在一点 $\theta_0\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，使得 $H(\theta_0)=0$，即 $f(\theta_0)=g(\theta_0)$。又因为对 θ，$f(\theta)g(\beta)=0$，所以 $f(\theta_0)$ 与 $g(\theta_0)$ 中至少有一个为 0，故

$$f(\theta_0)=g(\theta_0)=0$$

由以上模型的建立与求解过程不难看出，关键是选择了变量 θ 表示椅子的位置，以及用 θ 的两个函数表示椅脚与地面的距离，并且把问题的条件和结论翻译成数学语言。至于利用中心对称和旋转 $\frac{\pi}{2}$ 并不是本质的东西。同学们可以考虑四条腿呈长方形的情形。

例 1.1.2 饿狼追兔问题。

设有一只兔子和一匹狼，兔子位于狼的正西 100m 处，假设兔子与狼同时发现对方，并开始了一场追逐。兔子往正北 60m 处的巢穴跑，而狼则在其后追赶。假设兔子和狼均以最大速度匀速奔跑且狼的速度是兔子速度的两倍，问兔子能否安全回到巢穴。

建立如图 1－2 所示的坐标系 兔子在初始时刻位于坐标原点 O 处，狼在横坐标上的 A 处，OA 间的距离为 100m。因为狼要盯着兔子跑，所以狼行走的是一条曲线，且在任一时刻，曲线上狼的位置与兔子的位置的连线是曲线上该点处的切线方向。

设狼的行走轨迹为 $y=f(x)$，则有 $y'|_{x=100}=0$，$y|_{x=100}=0$。

又因为狼的速度是兔子的两倍，所以在相同时间内，狼行走的距离为兔子行走距离的两倍。假设在某时刻兔子跑到 $(0,\ h)$ 处，而狼在 $C(x,\ y)$ 处，则根据微积分中的弧长计算公式容易得出，$y=f(x)$ 应满足

$$\begin{cases}\dfrac{h-y}{0-x}=f'(x)\\ \displaystyle\int_x^{+\infty}\sqrt{1+[f'(t)]^2}\,\mathrm{d}t=2h\end{cases}\tag{1－1}$$

即有
$$2[y-xf'(x)]=\int_x^{10}\sqrt{1+[f'(t)]^2}\,\mathrm{d}t$$

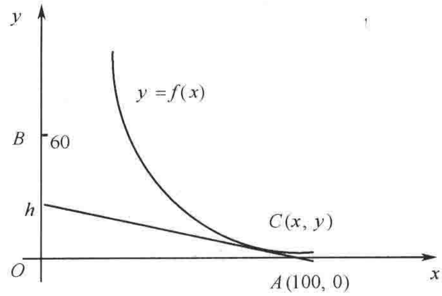

图 1－2　狼追兔子的路线图

两边求导得 $$2[y' - f'(x) - xf''(x)] = \sqrt{1 + [f'(x)]^2}$$

注意到 $y' = f'(x)$，由上式整理得下述模型：

$$\begin{cases} 2xf''(x) = -\sqrt{1 + [f'(x)]^2} \\ f'(x)\big|_{x=100} = 0 \\ f(x)\big|_{x=100} = 0 \end{cases} \tag{1-2}$$

用 Matlab 求解该微分方程：

输入：dsolve('2 * x * D2y = - sqrt(1 + (Dy)^2)','Dy(100) = 0','y(100) = 0','x')

输出：ans =

－10 * x^(1/2) + 1/30 * x^(3/2) + 200/3

于是狼的追踪轨迹为 $f(x) = \frac{1}{30}x^{\frac{3}{2}} - 10x^{\frac{1}{2}} + \frac{200}{3}$

因为 $f(0) = \frac{200}{3} > 60$，所以狼追不上兔子，兔子将会安然无恙地返回巢穴。

顺便指出，某些类型的导弹追击目标的方式与本例中狼追兔子的方程完全相同，因而，式(1－1)也是它们的数学模型。

例 1.1.3　衣服怎样漂洗最干净？

洗衣服，无论是机洗还是手洗，漂洗是一个必不可少的过程，而且要重复进行多次。那么，在漂洗的次数与水量一定的情况下，如何控制每次漂洗的用水量才能使衣物洗得最干净？

为确定起见，首先作出下面的合理假设：

(1) 经过洗涤，衣物上的污物已经全部溶解(或混合)在水中；

(2) 不论是洗涤还是漂洗，脱水后衣物中仍残存一个单位的少量污水；

(3) 漂洗前衣物残存的污水中污染物含量为 a；

(4) 漂洗共进行 n 次，每次漂洗的用水量为 $x_i(i = 1, 2, \cdots, n)$；

(5) 漂洗的总水量为 A。

由于每次漂洗后，残存的污水均为一个单位，因此其污物的浓度即为污物的含量，于是可以计算出：第一次漂洗后，残存污水中的污物含量为

$$a \cdot \frac{1}{1 + x_1} = \frac{a}{1 + x_1}$$

第二次漂洗后，残存污水中的污物含量为

$$\frac{a}{1+x_1}\cdot\frac{1}{1+x_2}=\frac{a}{(1+x_1)(1+x_2)}$$

......

第 n 次漂洗后,残存污水中的污物含量为

$$\frac{a}{(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_n)}$$

显然,只要 n 次漂洗后残存污水中的污物含量达到最低,就能使衣物洗得最干净。于是,问题转化为在条件 $x_1+x_2+\cdots+x_n=A$ 的约束下,求函数

$$F(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\frac{a}{(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_n)}$$

的最小值,即函数

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_n)$$

的最大值问题。为此,设拉格朗日函数

$$L(x_1,x_2,\cdots,x_n)=(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_n)+\lambda(x_1+x_2+\cdots+x_n-A)$$

$$\text{令}\begin{cases}L'_{x_1}(x_1,x_2,\cdots,x_n)=(1+x_2)(1+x_3)\cdots(1+x_n)+\lambda=0\\ L'_{x_2}(x_1,x_2,\cdots,x_n)=(1+x_1)(1+x_3)\cdots(1+x_n)+\lambda=0\\ \vdots\\ L'_{x_n}(x_1,x_2,\cdots,x_n)=(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_{n-1})+\lambda=0\\ x_1+x_2+\cdots+x_n=A\end{cases}$$

容易解得

$$x_1=x_2=\cdots=x_n=\frac{A}{n}$$

由问题的实际意义可知,函数 $F(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的最小值是存在的,故

$$x_1=x_2=\cdots=x_n=\frac{A}{n}$$

即为所求的最小值点。

一般地,漂洗的轮次可以根据总水量的多少来确定,但在水量一定的条件下,不论漂洗多少次,平均分配每个轮次的用水量永远是最佳的选择。

例 1.1.4 下雪时间的确定。

某地从上午开始下雪,均匀地下着一直持续到天黑。从正午开始,一个扫雪队沿着公路清除前方的积雪,它们在头两个小时清扫了 2km 长的路面,但是在其后的两个小时内只清扫了 1km 长的路面。如果扫雪队在相等的时间里清除的雪量相等,试问:雪是在什么时候开始下的呢?从已知条件来看,显然扫雪队扫雪的速率是随着时间的推移越来越慢的,即扫雪的速率 v 可以看做是时刻 t 的函数 $v=v(t)$。由积分的物理意义可知,对做变速运动的物体来说,运动的路程可以表示速度的积分,因而只要确定了扫雪的速率,根据已知条件通过积分是不难列出方程求出下雪事件。

假设扫雪队开始工作前已经下了 t_0 个小时的雪,每小时降雪的厚度为 $h$cm,扫雪队每小时清除的雪量为 C(单位:cm · km),则单位时间清除的雪量 C 与午后 t 时刻积雪的厚度 $h(t+t_0)$ 之比所表示的就是 t 时刻扫雪的速率,即

$$v(t)=\frac{C}{h(t+t_0)}(\mathrm{km/h})$$

于是，由“头两个小时清扫了 2km 长的路面”可得

$$\int_0^2 v(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^2 \frac{C}{h(t+t_0)}\mathrm{d}t = 2$$

用 Matlab 计算积分：

输入：

```
syms t C h t0
int('C/(h*(t+t0))',t,0,2)
```

输出

```
ans =

(C*(log(t0 + 2) - log(t0)))/h)
```

于是有

$$\frac{C}{h}\ln\frac{2+t_0}{t_0}=2$$

因而“后两个小时只清扫了 1km 长的路面”又可得

$$\int_2^4 \frac{C}{h(t+t_0)}\mathrm{d}t = 1$$

同样用 Matlab 计算积分：

输入：

```
syms t C h t0
int('C/(h*(t+t0))',t,2,4)
```

输出

```
ans =

-(C*(log(t0 + 2) - log(t0 + 4)))/h)
```

于是有

$$\frac{C}{h}\ln\frac{4+t_0}{2+t_0}=1$$

因此有

$$\ln\frac{2+t_0}{t_0}=2\ln\frac{4+t_0}{2+t_0}$$

即

$$\frac{2+t_0}{t_0}=\frac{(4+t_0)^2}{(2+t_0)^2}$$

解得 $t_0=-1\pm\sqrt{5}$，舍去 $t_0=-1-\sqrt{5}$

即 $t_0=\sqrt{5}-1(\mathrm{h})\approx 1\mathrm{h}14\mathrm{min}10\mathrm{s}$

从而开始下雪的时间大约是上午 10h45min10s。

例 1.1.5 一种密码方法。

密码法是信息编码与解码的技巧，其中的一种是基于可逆矩阵的方法。例如，先在

26 个英文字母与数字间建立一一对应关系，如可以是图 1-3 所示的对应关系：

$$\begin{array}{ccccccc} A & B & C & \cdots\cdots & X & Y & Z \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ 1 & 2 & 3 & \cdots\cdots & 24 & 25 & 26 \end{array}$$

图 1-3　字母与数字的对应关系

若要发出信息“action”，使用上述代码是：1,3,20,9,15,14。可以写成两个向量

$\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}1\\3\\20\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}9\\15\\14\end{pmatrix}$或者写成一个矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&9\\3&15\\20&14\end{pmatrix}$。

现任选一个三阶可逆矩阵，例如

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&1&2\\0&1&2\end{pmatrix}$$

于是将要发出的信息向量(或矩阵)经乘以 $\boldsymbol{A}$ 变成“密码”后发出

$$\boldsymbol{A\alpha}=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&1&2\\0&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\3\\20\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}67\\44\\43\end{pmatrix},\boldsymbol{A\beta}=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&1&2\\0&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}9\\15\\14\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}81\\52\\43\end{pmatrix}$$

或者

$$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&1&2\\0&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&9\\3&15\\20&14\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}67&81\\44&52\\43&43\end{pmatrix}$$

在收到信息$\begin{pmatrix}67&81\\44&52\\43&43\end{pmatrix}$后，可予以解码，即用 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵 $\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix}0&1&-1\\2&-2&-1\\-1&1&1\end{pmatrix}$。

(当然这里选定的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是大家约定的，这个可逆矩阵 $\boldsymbol{A}$ 成为解密的钥匙，或者称为“密匙”)从密码中回复明码：

$$\boldsymbol{A}^{-1}\begin{pmatrix}67\\44\\43\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&-1\\2&-2&-1\\-1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}67\\44\\43\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\3\\20\end{pmatrix},\boldsymbol{A}^{-1}\begin{pmatrix}81\\52\\43\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9\\15\\14\end{pmatrix}$$

或者　$$\boldsymbol{A}^{-1}\begin{pmatrix}67&81\\44&52\\43&43\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&-1\\2&-2&-1\\-1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}67&81\\44&52\\43&43\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&9\\3&15\\20&14\end{pmatrix}$$

反过来查图 1-3 所示的引文字母与数字的对应关系，即可得到信息“action”。

如将要传递的明文“Hill on Tuesday”包括两个空格(用 0 对应)分为 5 组。每组 3 个字，所以明文是一个 5×3 矩阵：

$$M=\begin{pmatrix}8&9&12\\12&0&15\\14&0&20\\21&5&19\\4&1&25\end{pmatrix}$$

已知加密矩阵为

$$K=\begin{pmatrix}-1&0&1\\1&-1&1\\1&1&0\end{pmatrix}$$

加密算法为

$$MK=\begin{pmatrix}8&9&12\\12&0&15\\14&0&20\\21&5&19\\4&1&25\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&0&1\\1&-1&1\\1&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}13&3&17\\3&15&12\\6&20&14\\3&14&26\\22&24&5\end{pmatrix}$$

得到密文:mcqcolftncnzvxe。

当然要用加密矩阵的逆矩阵 $K^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1&1&1\\1&-1&2\\2&1&1\end{pmatrix}$进行解密。

说明:由于 M 是 3 列矩阵,这里要求 K 是 3 阶可逆矩阵,并且矩阵 MK 的每一个元素不超过 26 且非负,如果 MK 的元素大于 26,可以取 26 同余数(除以 26 后的余数),不过这时的结果不是一一对应的,而且为解码带来一定的困难。

例 1.1.6 循环比赛名次的确定。

若有 5 个球队进行单循环赛,已知它们的比赛结果为:1 队胜 2,3 队;2 队胜 3,4,5 队;4 队胜 1,3,5 队;5 队胜 1,3 队。按获胜的次数排名次,若两队胜的次数相同,则按直接胜与间接胜的次数之和排名次。所谓间接胜,即若 1 队胜 2 队,2 队胜 3 队,则称 1 队间接胜 3 队。试为这 5 个队排名次。

按上述排名次的原则,不难排出 2 队为冠军,4 队为亚军,1 队第 3 名,5 队第 4 名,3 队垫底。问题是如果参加比赛的对数比较多,应如何解决这个问题?有没有解决这类问题的一般方法?

我们可以用邻接矩阵 M 来表示各队直接胜的情况:$M=(m_{ij})_{5\times5}$,若第 i 队胜第 j 队,则 $m_{ij}=1$,否则 $m_{ij}=0(i,j=1,2,3,4,5)$。由此可得

$$M=\begin{pmatrix}0&1&1&0&0\\0&0&1&1&1\\0&0&0&0&0\\1&0&1&0&1\\1&0&1&0&0\end{pmatrix}$$

$$M^2=\begin{pmatrix}0&1&1&0&0\\0&0&1&1&1\\0&0&0&0&0\\1&0&1&0&1\\1&0&1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&1&0&0\\0&0&1&1&1\\0&0&0&0&0\\1&0&1&0&1\\1&0&1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&1&1&1\\2&0&2&0&1\\0&0&0&0&0\\1&1&2&0&0\\0&1&1&0&0\end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{M}$ 中各行元素之和分别为各队直接胜的次数，$\boldsymbol{M}^2$ 中各行元素之和分别为各队间接胜的次数。那么

$$\boldsymbol{M}+\boldsymbol{M}^2=\begin{pmatrix}0&1&2&1&1\\2&0&3&1&2\\0&0&0&0&0\\2&1&3&0&1\\1&1&2&0&0\end{pmatrix}\cdots$$

各行元素之和分别为 5，8，0，7，4，就是各队直接胜与间接胜的次数之和。由此可得：比赛的名次依次为 2 队、4 队、1 队、5 队、3 队。如果参赛的队数多用这种方法计算会很复杂，甚至还无法得出确定的结论。

设向量 $\boldsymbol{v}=(v_1,v_2,v_3,v_4,v_5)^{\mathrm{T}}$ 的各分量依次分别表示各队直接取胜一场的得分，这得分按照从大到小的顺序应与 5 个球队名次的排序一致。注意 $\boldsymbol{M}$ 是 0—1 矩阵及矩阵的乘法，$\boldsymbol{Mv}$ 的分量则表示循环一次各队总的得分，这得分按照从大到小的顺序也应与 5 个球队名次的排序一致。于是应有 $\boldsymbol{Mv}=k\boldsymbol{v}(k>0)$，即 $\boldsymbol{v}$ 是 $\boldsymbol{M}$ 的一个非负特征值的非负特征向量。因此，可根据非负矩阵的最大特征值与其对应的特征向量的性质（查阅可知：最大特征值为非负实数，其对应的特征向量为非负（正）的）来确定排序问题。

用 Matlab 计算 $\boldsymbol{M}$ 的特征值和特征向量：

输入：

```
M=[0,1,1,0,0;0,0,1,1,1;0,0,0,0,0;1,0,1,0,1;1,01,0,0];
  [P,X]=eigs(M)
```

输出：

```
P =
-0.4484   -0.1905 + 0.4714i   -0.1905 - 0.4714i    0.3001   -0.5000
-0.6256    0.6247              0.6247             -0.1424   -0.5000
 0         0                   0                   0         0.5000
-0.5516    0.0100 - 0.4243i    0.0100 + 0.4243i    0.6999   -0.5000
-0.3213   -0.2976 - 0.2874i   -0.2976 + 0.2874i   -0.6323   -0.0000
 X =
1.3953     0                   0                   0         0
 0        -0.4604 - 1.1393i    0                   0         0
 0         0                  -0.4604 + 1.1393i    0         0
 0         0                   0                  -0.4746    0
 0         0                   0                   0         0
```

可以求得 $\boldsymbol{M}$ 的最大特征值 $\lambda=1.3953$，对应的经过归一化的特征向量（特征向量 $\boldsymbol{p}=(-0.4484\ \ -0.6256\ \ 0\ \ -0.5516\ \ -0.3213)^{\mathrm{T}}$ 与 $-1/(0.4484+0.6256+0.5516+$

0.3213)作数乘)为 $\boldsymbol{W}=(0.2303, 0.3213, 0, 0.2833, 0.1650)^{\mathrm{T}}$。

$\boldsymbol{W}$ 的分量按照从大到小的顺序应与 5 个球队名次的排序一致,所以,5 个队的排名顺序依次为 2 队、4 队、1 队、5 队、3 队。

又例如,若有 5 个垒球队进行单循环比赛,其结果是:1 队胜 3、4 队;2 队胜 3、5 队;3 队胜 4 队;4 队胜 2 队;5 队胜 1、3、4 队。按直接胜次数与间接生次数之和排名次。

用以表示各个队直接胜和间接胜的情况的邻接矩阵分别为

$$\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix}0&0&1&1&0\\1&0&1&0&1\\0&0&0&1&0\\0&1&0&0&0\\1&0&1&1&0\end{pmatrix},\boldsymbol{M}^2=\begin{pmatrix}0&1&0&1&0\\1&0&2&3&0\\0&1&0&0&0\\1&0&1&0&1\\0&1&1&2&0\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{M}+\boldsymbol{M}^2=\begin{pmatrix}0&1&1&2&0\\2&0&3&3&1\\0&1&0&1&0\\1&1&1&0&1\\1&1&2&3&0\end{pmatrix}$$

那么,$\boldsymbol{M}+\boldsymbol{M}^2$ 各行元素之和分别为 4、9、2、4、7,所以各队的名次为:第 1 名 2 队,第 2 名 5 队,第 3 名 1、4 队(并列),第 5 名 3 队。1 队和 4 队无法确定顺序,是否一定并列呢?还要在计算 $\boldsymbol{M}^3,\boldsymbol{M}^4,\cdots$。下面用求 $\boldsymbol{M}$ 的特征向量的办法来作:

输入:

```
M=[0,0,1,1,0;1,0,1,0,1;0,0,0,1,0;0,1,0,0,0;1,0,1,1,0];
[X,Q]=eigs(M)
```

输出:

```
X =
0.3415  -0.1067 - 0.3367i  -0.1067 + 0.3367i  -0.3059 - 0.4514i  -0.3059 + 0.4514i
0.6382   0.6409             0.6409            -0.1527 + 0.0287i  -0.1527 - 0.0287i
0.2159  -0.2833 - 0.1745i  -0.2833 + 0.1745i  -0.1907 + 0.4780i  -0.1907 - 0.4780i
0.3712  -0.1259 + 0.4443i  -0.1259 - 0.4443i   0.2184 - 0.1797i   0.2184 + 0.1797i
0.5400   0.1477 - 0.3445i   0.1477 + 0.3445i   0.5777             0.5777
Q =
1.7194   0                  0                  0                  0
0       -0.3782 - 1.3352i   0                  0                  0
0        0                 -0.3782 + 1.3352i   0                  0
0        0                  0                 -0.4815 - 0.2649i   0
0        0                  0                  0                 -0.4815 + 0.2649i
```

求得 $\boldsymbol{M}$ 的最大特征值 $\lambda=1.7194$,对应经过归一化的特征向量为

$$\boldsymbol{W}=(0.1621, 0.3029, 0.1025, 0.1762, 0.2563)^{\mathrm{T}}$$

所以,各队的名次为:第 1 名 2 队,第 2 名 5 队,第 3 名 4 队,第 4 名 1 队,第 5 名 3 队。第 1 队与第 4 队不是并列,这样排队才更合理些。