

普通高等教育“十三五”规划教材

弹性与塑性力学引论

丁 勇 编著



中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

普通高等教育“十三五”规划教材

弹性与塑性力学引论

丁 勇 编著



中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

内 容 提 要

本书系统地讲述了弹性与塑性力学的基本概念与基本理论。全书共分 11 章, 主要内容包括绪论、应力、应变、弹性本构关系、塑性本构关系、弹性与塑性力学问题的建立与基本解法、平面问题、柱体扭转问题、薄板的弯曲、热传导与热应力、变分原理及其应用等。全书文字叙述深入浅出, 易于理解, 实例紧贴工程实际, 可以提高学生学习兴趣。公式推导力求简洁, 为与现代文献接轨, 尽量采用张量的下标记号法表达。各章均附有习题, 书末附有部分习题参考答案。本书配套有相应的电子课件。

本书可作为土木、水利、机械、交通、船舶等工程类专业高年级本科生、研究生学习弹性力学、弹塑性力学的教材, 也可作为教师和相关领域工程技术人员的参考书。

图书在版编目 (C I P) 数据

弹性与塑性力学引论 / 丁勇编著. -- 北京: 中国水利水电出版社, 2016. 5
普通高等教育“十三五”规划教材
ISBN 978-7-5170-4530-4

I. ①弹… II. ①丁… III. ①弹性力学—高等学校—教材②塑性力学—高等学校—教材 IV. ①034

中国版本图书馆CIP数据核字(2016)第161734号

书 名	普通高等教育“十三五”规划教材 弹性与塑性力学引论
作 者	丁勇 编著
出版发行	中国水利水电出版社 (北京市海淀区玉渊潭南路1号D座 100038) 网址: www.waterpub.com.cn E-mail: sales@waterpub.com.cn 电话: (010) 68367658 (发行部)
经 售	北京科水图书销售中心(零售) 电话: (010) 88383994、63202643、68545874 全国各地新华书店和相关出版物销售网点
排 版	中国水利水电出版社微机排版中心
印 刷	北京纪元彩艺印刷有限公司
规 格	184mm×260mm 16开本 11.75印张 279千字
版 次	2016年5月第1版 2016年5月第1次印刷
印 数	0001—2000册
定 价	25.00元

凡购买我社图书, 如有缺页、倒页、脱页的, 本社发行部负责调换

版权所有·侵权必究

前言

本书是为土木、水利、交通、机械、船舶等工程类专业“弹性力学”“塑性力学”课程教学编写的教材。在编写过程中，强调基本概念和基本理论。叙述由浅入深，突出重点。实例紧贴工程，提高学习兴趣。公式推导力求简洁，易于读者理解，为与现代文献接轨，尽量采用张量的下标记号法表达。为了加强读者对于弹性与塑性力学内容的理解，书中各章均附有习题，书末附有部分习题参考答案。

全书由11章组成。其中，第1章提出了弹性与塑性力学的研究对象、任务和基本假设。第2~6章是弹性与塑性力学的基础理论部分，主要包括应力与应变的基本理论，以及反映两者之间相互关系的弹性本构关系和塑性本构关系，提出了弹性与塑性力学的基本问题与基本解法。第7~10章是基础理论的专题应用，包括平面问题、柱体扭转问题、薄板弯曲问题、热传导热应力问题等，结合土木、水利、机械工程实际，探讨了常见的弹性与塑性力学问题的理论求解方法。第11章介绍了变分原理及其应用，基于能量原理，提出了弹性力学问题的近似解法，也为学习工程上常用的有限单元法打下理论基础。全书结构清晰，内容连续，体系比较完整。

本书编写源于作者承担的“弹塑性力学”研究生课程，课程讲义已经在土木工程研究生中试用多年。本次出版为了提高教材的适用性，使之也满足本科生“弹性力学”课程的教学需求，改进了部分章节，增加了例题和习题。当作为“弹塑性力学”课程教材时，全书内容都适用；当作为“弹性力学”课程教材时，可忽略塑性力学相关部分，例如2.6节、2.7节、3.3.2节、3.3.3节、3.6节、3.7节、4.2节、第5章、6.3节、8.6节、8.7节以及各章例题和习题中塑性力学相关部分。对于土木、水利、交通、机械等工程类专业，“弹性力学”“弹塑性力学”采用统一的教科书，有利于避免课程内容的重复和冲突，增强学习的连贯性。为便于不同课程的教学需求，作者制作了配套的“弹塑性力学”和“弹性力学”电子课件。

同济大学吴家龙教授详细审阅了全书，提出了许多宝贵意见与建议。宁波大学章子华博士审阅了全书，修订了部分内容和例题。同济大学万永平教授审阅了本书的塑性力学部分，提出了修改意见。宁波大学单艳玲博士修订了部分习题与课件。宁波大学土木工程专业研究生林幸福、张纬、杨阳、梁宇辉录入了部分图表和习题。在此一并致谢！

尽管在过去的教学实践中已经发现和纠正了本书的一些错误，也得到了审稿专家对本书的指导和帮助，但是由于编者水平有限，不足之处在所难免，敬请读者批评指正。

丁勇

2016年1月

目 录

前言

第 1 章 绪论	1
1.1 弹性与塑性力学的研究对象和任务	1
1.2 弹性与塑性力学的基本假设	2
1.3 应力应变关系的简化模型	3
习题	4
第 2 章 应力	5
2.1 应力的概念	5
2.2 一点的应力状态	7
2.3 平衡微分方程	9
2.4 边界条件	11
2.5 主应力和主方向	12
2.6 应力球张量与偏张量	15
2.7 等效应力	18
习题	18
第 3 章 应变	20
3.1 变形与应变的概念	20
3.2 转轴时应变分量的变换	23
3.3 主应变、应变偏量及其不变量	25
3.4 体积应变	27
3.5 应变协调方程	27
3.6 等效应变	28
3.7 应变率的概念	29
习题	29
第 4 章 弹性本构关系	31
4.1 广义胡克定律	31
4.2 广义胡克定律的推论	39

4.3 线弹性应变能密度函数	40
习题	42
第 5 章 塑性本构关系	43
5.1 屈服条件的概念	43
5.2 常用的屈服条件	44
5.3 后继屈服条件	49
5.4 德鲁克公设和伊留申公设	56
5.5 加载、卸载准则	58
5.6 增量理论 (流动理论)	60
5.7 全量理论	64
习题	66
第 6 章 弹性与塑性力学问题的建立与基本解法	68
6.1 弹性力学基本方程与边界条件	68
6.2 弹性力学问题的基本解法	69
6.3 塑性力学基本方程与求解方法	72
6.4 解的唯一性定理、圣维南原理、叠加原理	74
习题	76
第 7 章 平面问题	77
7.1 平面问题的基本方程	77
7.2 应力函数	80
7.3 梁的平面弯曲	81
7.4 用极坐标表示的基本方程	87
7.5 厚壁筒的弹塑性解	90
7.6 半无限平面体问题	94
习题	100
第 8 章 柱体扭转问题	104
8.1 基本概念	104
8.2 基本方程	105
8.3 矩形截面柱体的扭转	110
8.4 薄膜比拟法	113
8.5 薄壁杆件的扭转问题	115
8.6 塑性扭转与沙堆比拟法	121
8.7 弹塑性扭转与薄膜-屋顶比拟法	124
习题	126
第 9 章 薄板的弯曲	128
9.1 一般概念与基本假定	128

9.2	薄板小挠度理论的基本方程	129
9.3	薄板的边界条件	133
9.4	矩形板的经典解法	136
9.5	薄板弯曲的叠加法	142
	习题	143
第 10 章	热传导与热应力	145
10.1	热传导方程及其求解方法	145
10.2	热应力的基本概念	147
10.3	热弹性力学的基本方程	150
10.4	热弹性力学问题的基本解法	150
10.5	平面热弹性力学问题	152
	习题	154
第 11 章	变分原理及其应用	155
11.1	基本概念	155
11.2	基于位移的变分原理	159
11.3	基于应力的变分原理	164
11.4	基于位移变分原理的近似解法	166
11.5	基于应力变分原理的近似解法	171
	习题	173
附录 I	张量的下标记号法和求和约定	174
I.1	张量简介	174
I.2	下标记号法	174
I.3	求和约定	175
I.4	克罗内克符号	176
附录 II	部分习题参考答案	177
参考文献	180

第 1 章 绪 论

1.1 弹性与塑性力学的研究对象和任务

弹性与塑性力学是固体力学的一个分支，它由弹性力学和塑性力学两部分组成，简称为弹塑性力学。当物体承受的外力较小时，卸除外力后，物体可以完全恢复原来的状态，这种可恢复的变形称为弹性变形，弹性变形是弹性力学的研究对象。而当外力超过一定限度后，即使卸除全部外力，也有一部分变形不能恢复，这种不可恢复的变形称为塑性变形，塑性变形是塑性力学的研究对象。弹塑性力学的研究对象则包含了以上两种变形，它是研究可变形固体受到外部作用（外荷载、温度变化、边界约束变动等）时，弹性、塑性变形和应力状态的科学。

以材料力学中的低碳钢的单向拉伸实验为例，图 1.1.1 为拉伸试件简图，图 1.1.2 为实验过程中工作段横截面上的应力（单位面积上的力）与应变（单位长度的伸长量）之间的关系曲线，该曲线中有几个应力的特征值，分别为比例极限（ σ_p ）、弹性极限（ σ_e ）、屈服极限（ σ_s ）、强度极限（ σ_b ），以这几个特征值点为界，应力应变关系曲线中的 OB 段为弹性变形阶段（其中 OA 段为线弹性段）、 BF 段为塑性变形阶段（其中 BC 段为屈服段、 CE 段为强化段、 EF 段为颈缩段）。

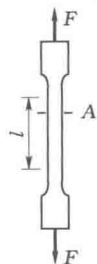


图 1.1.1 低碳钢单向拉伸实验图

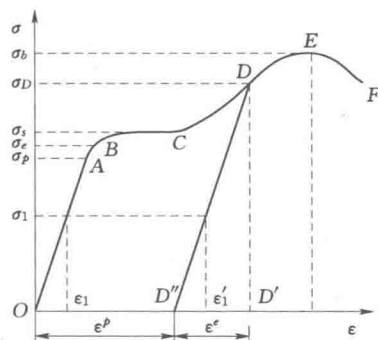


图 1.1.2 低碳钢单向拉伸时的应力应变关系

在弹性变形阶段卸除外力后，试件变形（应变）可以恢复到 0；但是在塑性变形阶段卸除外力后，试件的部分变形（应变）不可恢复。例如在图 1.1.2 中的 D 点卸除外力，应力从 σ 减小到 0，但是应变从 ϵ 减小了 ϵ^e ，最终应变为 ϵ^p 。因此，在塑性变形阶段，不仅有可以恢复的弹性变形，也有不可恢复的塑性变形。如果用应变来度量变形的大小，则有

$$\epsilon = \epsilon^e + \epsilon^p \quad (1.1.1)$$

式中： ϵ 为总应变； ϵ^e 为可恢复的弹性应变； ϵ^p 为不可恢复的塑性应变。

与弹性变形不同，塑性变形时，应力与应变之间不再满足一一对应关系，例如图 1.1.2 中 σ_1 所对应的应变可以由弹性变形导致的 ϵ_1 ，也可以是由塑性变形导致的 ϵ'_1 。因此，塑性力学问题的求解，不仅与外部作用的大小有关，还与外部作用的历史有关。

从微观机理上看，产生弹性变形的原因是组成物体的微粒（晶体、原子、分子等）之间距离的改变，这种改变尚处于可以完全恢复的范围内；产生塑性变形则被认为是一种微观晶体缺陷（位错）运动的结果。本课程不研究这种微观机理，只考虑其造成的宏观统计特性，这对于解决工程中的普通力学分析问题已经足够。

对土建、水利、机械、航空航天等工程应用而言，学习弹塑性力学的目的主要是研究结构物在外部作用下的变形（应变）和内力（应力），确定其强度、刚度和稳定性。此外，弹塑性力学的学习，也将为断裂力学、有限单元法等后继课程的学习打下基础。其中有限单元法是弹塑性力学最具代表性的后继拓展，它以弹性力学的变分原理为控制方程，结合加权余量法等偏微分方程解法，再利用结构离散方法和现代计算机强大的计算能力，使复杂工程结构的弹塑性力学分析成为可能，在工程界得到了广泛的应用。

1.2 弹性与塑性力学的基本假设

弹塑性力学中，为了能通过已知量（物体的几何形状和尺寸、所受的外部作用等）求出未知量（应力、应变、位移等），需要从静力学、几何学、物理学 3 方面出发，建立未知量所满足的基本方程和边界条件。这些方程和边界条件不可能把实际工程中所有因素不分主次地都考虑进来，因此需要按照物体的性质和求解的要求，忽略一些次要因素，使我们所研究的问题限制在一个切实可行的范围内。因此，在以后的讨论中，如果不特别指出，本书对弹塑性力学将采用以下 5 条基本假设。

(1) 连续性假设。所谓连续性假设，是将可变形的固体看作是连续密实的物体，组成物体的质点之间不存在任何空隙。从这条假定出发，我们可以认为应力、应变和位移等是连续的，他们可以表示成空间坐标的连续函数，因而在数学推导时可以方便地运用连续和极限的概念。事实上，一切物体都是由粒子组成的，不可能符合这个假定。但是，当微粒的尺寸和微粒之间的距离远比物体的几何尺寸小时，这个假设导致的求解误差可以忽略。

(2) 均匀性假设。所谓均匀性假设，即认为物体是用同一类型的均匀材料组成的，因而各部分的物理性质相同，并不会随着坐标位置的改变而改变。根据这个假设，我们在处理问题时可取出物体任一部分进行分析，然后将分析的结果用于整个物体。如果物体是由两种或两种以上材料组成的，例如混凝土，那么只要每种材料的颗粒远小于物体的几何尺寸，而且在物体内部均匀分布，从宏观意义上也可采用均匀性假设。

(3) 各向同性假设。所谓各向同性假设，即认为物体在不同的方向具有相同的物理性质，因而物体的弹性、塑性材料系数不随坐标方向的改变而改变。单晶体是各向异性的，木材也是各向异性的，钢材虽然是由无数个各向异性的晶体组成，但是由于晶体很小，而且排列杂乱无章，所以从宏观上看是各向同性的。

(4) 小变形假设。所谓小变形假设，是指物体在外部作用下产生的位移远小于物体原来的尺寸，因而应变远小于1。应用这条假设，可以简化弹塑性力学问题的求解。例如，在研究物体的平衡时，可以将物体中各点位置用其初始构形来描述，而不考虑由于变形引起的尺寸和位置的变化；在建立几何方程和物理方程时，可以略去应变的二次项和二次乘积以上的项，使得到的关系式都是线性的。

(5) 无初应力假设。所谓无初应力假设，是指本书公式和实例中都假设物体在受到外部作用之前处于自然状态，物体内部没有应力，因此弹塑性力学求得的应力仅仅是由外部作用引起的。如果物体内有初始应力存在，那么这些应力要叠加在外部作用产生的应力之上，物理方程中也需要考虑初始应力的影响。

如果是弹性力学，则仅仅考虑弹性阶段的应力应变关系，即还需要引入完全弹性假设，为简化起见，往往只考虑应力和应变呈线性关系的情况。

与材料力学、结构力学等采用更简化模型的初等力学理论相比，弹塑性力学的假设更少，能解决问题的类型更多。材料力学、结构力学都是以杆件或杆系结构为研究对象，材料的应力应变关系局限在线弹性范围内。而弹塑性力学的研究对象则不仅有杆系，还有板壳和块体，材料的应力应变关系也涵盖了弹性和塑性两个阶段，因此可以求解更多的力学问题，或者为更多力学问题的求解奠定基础，有限单元法力学分析就是弹塑性力学理论的一个很好的发展。

1.3 应力应变关系的简化模型

如图 1.1.2 所示，弹塑性变形过程中的应力应变关系非常复杂，若直接采用它进行理论研究，将使公式的解答也异常复杂而不可行，因此需要对这种应力应变关系进行理想化处理，用简化模型求解弹塑性力学的理论解。而如果采用的是有限单元法等求解解法，则可以采用实验得到的应力应变关系。

如图 1.3 所示，应力应变关系的简化模型主要有以下几种：

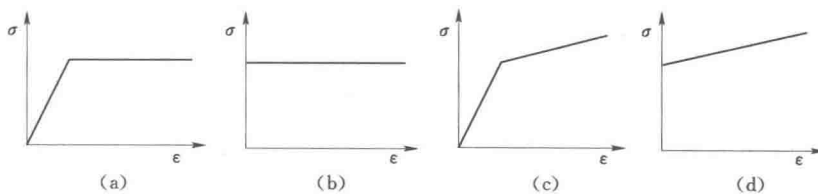


图 1.3.1 应力应变关系的简化模型

(1) 理想弹塑性模型。在单向拉伸情况下，理想弹塑性模型的应力应变关系如图 1.3.1 (a) 所示。该模型包括线弹性段和理想塑性段。适用于加载初期具有明显的弹性变形，进入塑性阶段后弹性变形又远小于塑性变形，且无明显强化的材料。

(2) 理想刚塑性模型。理想刚塑性模型的应力应变关系如图 1.3.1 (b) 所示，该模型适用于弹性变形部分远小于塑性变形的情况。

(3) 理想弹塑性线性强化模型。理想弹塑性线性强化模型的应力应变关系如图 1.3.1

(c) 所示。该模型包括线弹性段和线性强化段。适用于加载初期具有明显的弹性变形，之后的塑性变形可以简化为线性强化的材料。

(4) 理想刚塑性线性强化模型。理想刚塑性线性强化模型的应力应变关系如图 1.3.1 (d) 所示。该模型适用于弹性变形远小于塑性变形，且塑性变形可以简化为线性强化的材料。

上述简化模型的选取与材料和应力状态有关。例如，分析结构物受力变形的全过程时，常采用理想弹塑性线性强化模型；计算结构塑性极限荷载时，可采用理想刚塑性模型或理想刚塑性线性强化模型。

如图 1.3.1 所示应力应变关系是单向拉伸的情况（一维问题），对于物体在二维、三维受力状态下的弹塑性力学问题，我们需要引入应力、应变状态概念，来讨论其受力与变形之间的关系。

习 题

- 1.1 弹性力学分析时要引进哪些假定？
- 1.2 弹塑性力学与弹性力学的基本假定什么不同？
- 1.3 在低碳钢拉伸实验中，弹性和塑性变形的宏观表现是什么，其微观机理又是什么？
- 1.4 弹性与塑性力学和材料力学等初等力学的联系和区别是什么？
- 1.5 弹性力学和塑性力学有哪些区别和联系？
- 1.6 常用的应力应变关系简化模型有哪些？

第 2 章 应 力

弹塑性力学研究的问题多为超静定问题，需要综合考虑静力学、几何学和物理学 3 方面的条件来解决，本章首先考虑静力学条件。首先提出应力的概念，分析一点的应力状态；然后建立可变形固体的平衡微分方程以及相应的边界条件；最后引入“等效应力”的概念，以定量地描述不同应力状态下应力的“强度”。

2.1 应力的概念

作用在物体上的外力可以分为体力和面力。体力是指作用在物体内部所有质点上的力，例如物体的自重、惯性力、电磁力等。体力是一个矢量，可用 F_b 表示：

$$F_b = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta F_b}{\Delta V} \quad (2.1.1)$$

式中： ΔV 为物体内部某一体元； ΔF_b 为该体元所受的外力矢量，当 $\Delta V \rightarrow 0$ （即体元趋于一点）时，即可得到物体内部某点的体力， N/m^3 。

面力是指作用在物体表面上的力，例如液体压力、风力、物体表面之间的接触压力等。面力是一个矢量，可用 p_s 表示：

$$p_s = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta P}{\Delta S} \quad (2.1.2)$$

式中： ΔS 为物体表面上某一面元； ΔP 为该面元所受的外力矢量，当 $\Delta S \rightarrow 0$ （即面元趋于一点）时，即可得到物体表面某点的面力， N/m^2 。

应力与面力类似，只是其作用面不是物体表面，而是其内部某一截面，如图 2.1.1 所示。应力也是一个矢量，可用 p 表示：

$$p = \lim_{\Delta S_c \rightarrow 0} \frac{\Delta P}{\Delta S_c} \quad (2.1.3)$$

式中： ΔS_c 为物体内部 C 截面上围绕 P 点的面元； ΔP 为该面元所受内力的合力矢量，当 $\Delta S_c \rightarrow 0$ （即面元趋于一点）时，即可得到物体内部 C 截面上过 P 点的应力， N/m^2 。

应力矢量 p 可以在截面 C 的法向和切向做分解，分别得到正应力矢量 σ_n 和切应力矢量 τ_n ：

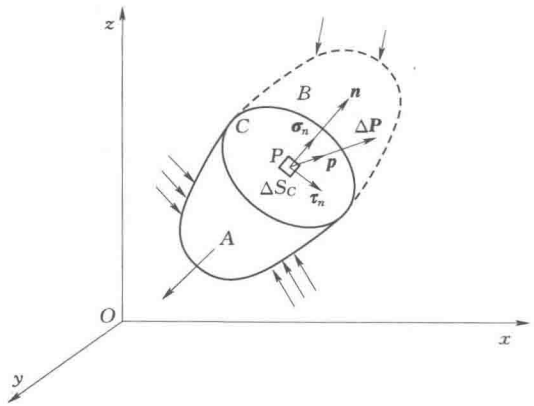


图 2.1.1 应力示意图

$$\left. \begin{aligned} \sigma_n &= \lim_{\Delta S_C \rightarrow 0} \frac{\Delta P_n}{\Delta S_C} \\ \tau_n &= \lim_{\Delta S_C \rightarrow 0} \frac{\Delta P_s}{\Delta S_C} \end{aligned} \right\} \quad (2.1.4)$$

式中： ΔP_n 和 ΔP_s 分别为 ΔP 在 C 截面法向和切向的分量。

在以上的定义中，过 P 点的截面 C 是任意的，这样的截面有无穷多个，所有这些截面上应力的集合称为 P 点的应力状态。显然，要通过列举的方式表达一点的应力状态是不可能的，为了描述一点的应力状态，需要引入应力张量的概念。

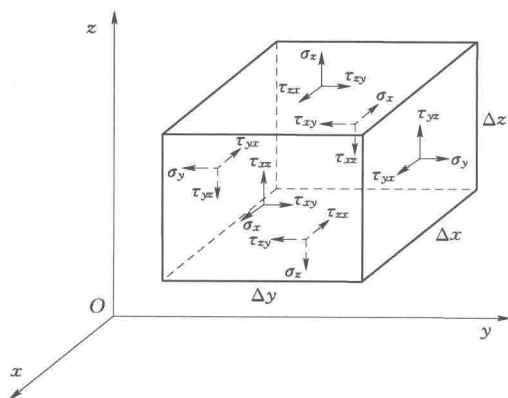


图 2.1.2 应力微元体

在物体内 P 点的邻域内取出 1 个正六面体微元，如图 2.1.2 所示，该六面体的表面外法线方向分别与 3 个坐标轴平行，其中外法线与 x 、 y 、 z 坐标轴同向的 3 个面称为正面，外法线与坐标轴反向的面称为负面。由于微元体极小，其各表面上的应力近似均匀分布，因此可用作用于各面中心点上的应力矢量来表示，每个面上作用有 1 个正应力和两个切应力分量，例如微元体右表面上的正压力为 σ_x ，切应力为 τ_{xy} 和 τ_{xz} 。对正应力只用 1 个字母的下标标记，以拉应力为正，压应力为负。对切应力则用两个字母的下标标记，

第 1 个字母代表应力的作用面，第 2 个字母代表应力的方向，其正负号规定分为两种情况：当所在面的外法线方向与坐标轴正方向一致时，以沿坐标轴正向的切应力为正，反之为负；当所在面的外法线方向与坐标轴负方向一致时，以沿坐标轴负方向的切应力为正，反之为负。因此，图 2.1.2 中给出的各应力分量均沿正方向。

图 2.1.2 中微元体应力分量共有 9 个，包括 3 个正应力分量，6 个切应力分量（以后将证明，独立的切应力分量只有 3 个），它们的组合为

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}, i, j = x, y, z \quad (2.1.5)$$

如果用 1、2、3 分别代表 x 、 y 、 z 轴，则上式可写为

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \sigma_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}, i, j = 1, 2, 3 \quad (2.1.6)$$

当坐标系变换时， σ_{ij} 能够按照一定的变换式变换成另一坐标系 $Ox'y'z'$ 中的 9 个量：

$$[\sigma'_{i'j'}] = \begin{bmatrix} \sigma_{x'} & \tau_{x'y'} & \tau_{x'z'} \\ \tau_{y'x'} & \sigma_{y'} & \tau_{y'z'} \\ \tau_{z'x'} & \tau_{z'y'} & \sigma_{z'} \end{bmatrix}, i', j' = x', y', z' \quad (2.1.7)$$

数学上，在坐标变换时，服从一定的坐标变换式的量称为张量，因此 σ_{ij} 称为应力张

量，以后将证明，应力张量是对称的二阶张量。采用张量的概念与表达方法，可以简化冗长的弹塑性力学公式，本教材在附录 I 中介绍张量的下标记号法和求和约定，更详细的描述可参考相关数学书籍。

2.2 一点的应力状态

如前所述，过固体内部一点的所有截面上应力的集合称为该点的应力状态，利用应力张量即可确定该点的应力状态，本节来推导相关的求解公式。

2.2.1 斜截面上的应力公式

如图 2.2.1 所示，已知物体内部任意一点 O 的应力张量为 σ_{ij} ，求过 O 点外法线为 \mathbf{n} 的任一斜截面上的应力，为此我们在 O 点处截取一个微小的四面体单元 $OABC$ ，斜面 ABC 的外法线方向为 \mathbf{n} ， OBC 、 OAC 、 OAB 3 个截面分别与 x 、 y 、 z 轴垂直，因此这 3 个截面上的应力可以直接用应力张量 σ_{ij} 的分量表示。

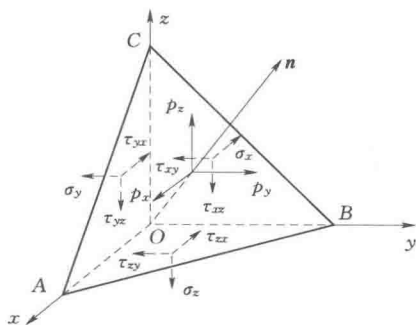


图 2.2.1 过 O 点的四面体单元

令斜面 ABC 面积为 1，则图 2.2.1 中截面 OBC 、 OAC 、 OAB 的面积分别为 n_x 、 n_y 、 n_z ， n_x 、 n_y 、 n_z 分别为斜面外法线 \mathbf{n} 的 3 个方向余弦。由微四面体单元 $OABC$ 的力平衡条件 $\sum F_x = 0$ 、 $\sum F_y = 0$ 和 $\sum F_z = 0$ ，可得斜面 ABC 上的应力在 3 个坐标轴方向的分量 p_x 、 p_y 、 p_z ：

$$\left. \begin{aligned} p_x &= \sigma_x n_x + \tau_{yx} n_y + \tau_{zx} n_z \\ p_y &= \tau_{xy} n_x + \sigma_y n_y + \tau_{zy} n_z \\ p_z &= \tau_{xz} n_x + \tau_{yz} n_y + \sigma_z n_z \end{aligned} \right\} \quad (2.2.1)$$

若采用张量的下标记号法和求和约定，上式可简写为

$$p_i = \sigma_{ij} n_j \quad (2.2.2)$$

式中： $n_j = \cos(\mathbf{n}, \mathbf{x}_j)$ ($j=1, 2, 3$)，为斜面外法线 \mathbf{n} 的 3 个方向余弦。式 (2.2.2) 中利用了切应力互等定理：

$$\left. \begin{aligned} \tau_{xy} &= \tau_{yx} \\ \tau_{yz} &= \tau_{zy} \\ \tau_{zx} &= \tau_{xz} \end{aligned} \right\} \quad (2.2.3)$$

即

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad (2.2.4)$$

该式与材料力学中的切应力互等定理相同，2.3 节将进一步加以证明。式 (2.2.4) 也表明，应力张量 σ_{ij} 是一个对称张量，它的 9 个分量中独立的只有 6 个。

利用式 (2.2.2)，可由一点的应力张量确定通过该点的任意截面上的应力，即确定该点的应力状态。进一步还可以求出截面上的正应力和切应力为

$$\sigma_n = p_i n_i = \sigma_{ij} n_j n_i \quad (2.2.5)$$

$$\tau = \sqrt{p_i p_i - \sigma_n^2} = \sqrt{\sigma_{ij} n_j \sigma_{ik} n_k - (\sigma_{ij} n_j n_i)^2} \quad (2.2.6)$$

2.2.2 应力分量的转换公式

应力张量是一个二阶张量，它在坐标变换时应该满足二阶张量的变换规律，下面来推导这一规律。

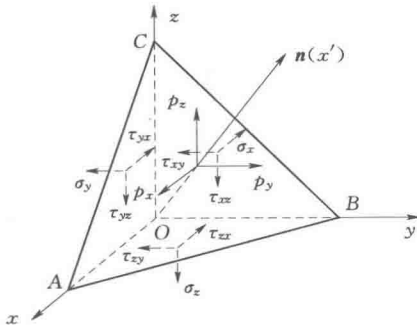


图 2.2.2 坐标系旋转变换

如果坐标变换仅仅是坐标的平移，那么各个应力分量的大小和方向都不会发生变化，只有在坐标旋转时，各个应力分量才会发生变化，所以只需讨论坐标旋转时应力分量的变换。令变换前后的坐标系分别为 $Oxyz$ 和 $Ox'y'z'$ ，其中 x' 轴取为斜截面的法向 n ，并通过 O 点，如图 2.2.2 所示。

沿 x' 轴方向的正应力为

$$\sigma_{x'} = p_x l_{x'x} + p_y l_{x'y} + p_z l_{x'z} \quad (2.2.7)$$

式中： $l_{x'x} = \cos(x', x)$ ， $l_{x'y} = \cos(x', y)$ ， $l_{x'z} = \cos(x', z)$ ，也就是斜面法向在原坐标系中方向矢量的 3 个分量 n_i ， $i=1, 2, 3$ ； p_x 、 p_y 、 p_z 为斜面 ABC 上的应力在 3 个坐标轴方向的分量。将式 (2.2.1) 代入式 (2.2.7)，得到

$$\sigma_{x'} = \sigma_x l_{x'x}^2 + \sigma_y l_{x'y}^2 + \sigma_z l_{x'z}^2 + 2(\tau_{xy} l_{x'x} l_{x'y} + \tau_{yx} l_{x'y} l_{x'x} + \tau_{xz} l_{x'x} l_{x'z}) \quad (2.2.8)$$

用下标符号表示为

$$\sigma_{1'1'} = l_{1'i} l_{1'j} \sigma_{ij} \quad (2.2.9)$$

类似可得 p_x 、 p_y 、 p_z 在 y' 、 z' 轴上的投影：

$$\sigma_{1'2'} = l_{1'i} l_{2'j} \sigma_{ij}, \sigma_{1'3'} = l_{1'i} l_{3'j} \sigma_{ij} \quad (2.2.10)$$

这两个投影分别为与 x' 轴垂直平面上的两个切应力。

如果分别将轴 y' 、 z' 取为原斜截面法向量 n ，可以得到 $Ox'y'z'$ 坐标系下其余应力分量的求解公式。 $Ox'y'z'$ 坐标系下的应力分量的求解公式可以汇总为

$$\sigma_{ij'} = l_{i'i} l_{j'j} \sigma_{ij} \quad (2.2.11)$$

式中： $l_{i'i} = \cos(x'_i, x_i)$ ($i=1, 2, 3$)； x_i 、 x'_i 分别为 $Oxyz$ 和 $Ox'y'z'$ 坐标系的坐标轴单位矢量； $l_{i'i}$ 各分量的表达式参见表 2.2.1。式 (2.2.11) 就是坐标变换时，二阶应力张量 σ_{ij} 服从的变换规律，由此可以求得不同坐标系下的应力张量分量。

表 2.2.1

新旧坐标轴夹角的方向余弦

坐标轴	$x(x_1)$	$y(x_2)$	$z(x_3)$
$x'(x'_1)$	$l_{1'1} = \cos(x', x)$	$l_{1'2} = \cos(x', y)$	$l_{1'3} = \cos(x', z)$
$y'(x'_2)$	$l_{2'1} = \cos(y', x)$	$l_{2'2} = \cos(y', y)$	$l_{2'3} = \cos(y', z)$
$z'(x'_3)$	$l_{3'1} = \cos(z', x)$	$l_{3'2} = \cos(z', y)$	$l_{3'3} = \cos(z', z)$

作为特例，我们来求解二维的平面问题中坐标转换时的应力分量。如图 2.2.3 所示，假设固体内某点 A 的应力张量中与 z 轴相关的分量都为 0 ($\sigma_z = 0$, $\tau_{xz} = 0$, $\tau_{yz} = 0$)，求解老坐标系 $Axyz$ 旋转到新坐标系 $Ax'y'z'$ 时，垂直于 x' 轴的斜截面 BC 上的正应力和切应力。

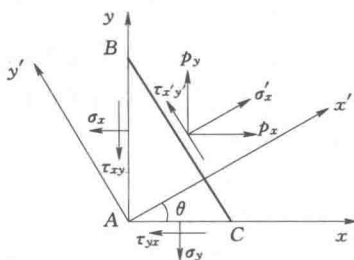


图 2.2.3 平面问题中斜截面的应力

表 2.2.2 平面问题中新、老坐标轴夹角的方向余弦

坐标轴	$x(x_1)$	$y(x_2)$	$z(x_3)$
$x'(x'_1)$	$l'_{11} = \cos\theta$	$l'_{12} = \sin\theta$	$l'_{13} = 0$
$y'(x'_2)$	$l'_{21} = -\sin\theta$	$l'_{22} = \cos\theta$	$l'_{23} = 0$
$z'(x'_3)$	$l'_{31} = 0$	$l'_{32} = 0$	$l'_{33} = 1$

新、老坐标轴间夹角的方向余弦见表 2.2.2，代入式 (2.2.11) 即可得到 $Ax'y'z'$ 坐标系下的应力分量，其中斜截面 BC 上的正应力和切应力为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{x'} &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta \\ \tau_{x'y'} &= -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta \\ \tau_{x'z'} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.2.12)$$

上式中 θ 以 x 轴正方向开始逆时针旋转为正，顺时针为负。将式 (2.2.12) 与材料力学中平面问题的斜截面应力公式相比较，两者非常相像，差别在于材料力学中切应力的正负号规则正好与当前定义相反。

2.3 平衡微分方程

上节讨论了一点的应力状态，物体各点的应力状态是不同的，其空间分布称为应力场，本节研究应力场的变化规律。为简单起见，对于如图 2.1.2 所示的空间应力微元体，假设与 z 轴垂直平面上的应力分量为 0，即 $\sigma_z = \tau_{zx} = \tau_{zy} = 0$ ，此时所有的非零应力分量都在 Oxy 平面上，空间微元体可以退化成平面微元体。先以此平面微元体情况为例，讨论物体处于平衡状态时应力与体力之间的相互关系，由此导出平衡微分方程。

在平面微元体情况下，只需要在 Oxy 平面上建立受力平衡方程即可。图 2.3.1 是从物体内部取出

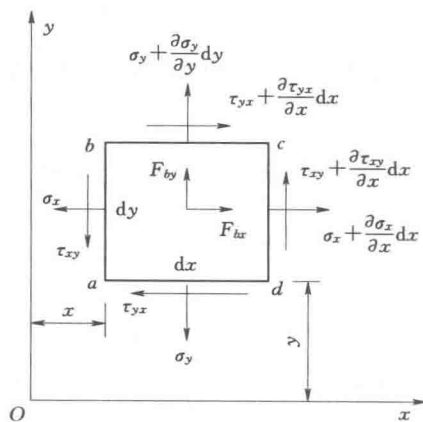


图 2.3.1 平面微元体的平衡