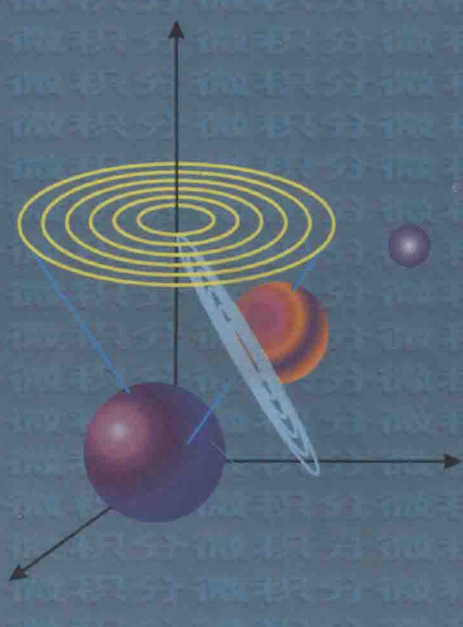
国家工科数学课程教学基地系列教材

微积分
同步学习指导

电子科技大学应用数学学院 编



电子科技大学出版社

"国家工科数学课程教学基地"系列教材

微积分同步学习指导

电子科技大学应用数学学院　编

电子科技大学出版社

内容提要

本书是根据国家教委颁发的《高等工业学校高等数学课程教学基本要求》，按照我校《国家工科数学课程教学基地》系列教材《微积分》的内容并遵照我校“九五”规划特色教材的要求而编写的。本书的主要特色是：本着面向21世纪深化课程体系与教学内容改革的精神，重在培养学生分析问题的能力；以育人为本、学生为本、质量为本；注重内容与体系的整体优化；为现代数学适度地提供“窗口”与“接口”；重视数学思想与方法，适当淡化运算技巧；重视培养学生应用数学知识解决实际问题的意识与能力。

本书共分八个单元，每个单元分为五部分：基本要求；内容提要；典型例题；复习题选解；单元检测题。每一单元后面介绍了在微积分发展史上做出重大贡献的中外数学家。附录中有电子科技大学最近三年的《微积分期末考试试题》及参考解答、三套数学竞赛试题及参考解答和最近三年硕士研究生入学考试《数学一试题》及参考解答。

本书可供工科学生、专科学生、报考研究生者、参加自学考试者及成人教育工科各类学生学习参考。

图书在版编目（CIP）数据

微积分同步学习指导/电子科技大学应用数学学院编．成都：电子科技大学出版社，2002.9

ISBN 7—81065—947—2

Ⅰ．微…　Ⅱ．电…　Ⅲ．微积分-高等学校-教学参考资料　Ⅳ．O172

中国版本图书馆CIP数据核字（2002）第070197号

微积分同步学习指导

电子科技大学应用数学学院　编

出　　版：电子科技大学出版社　　（成都建设北路二段四号，邮政编码610054）
责任编辑：徐守铭
发　　行：新华书店
印　　刷：电子科技大学出版社印刷厂
开　　本：787mm×1092mm　1/16　印张 21.5　字数 520千字
版　　次：2002年9月第一版
印　　次：2002年9月第一次印刷
书　　号：ISBN 7—81065—947—2/O・41
印　　数：1—6000册
定　　价：28.00元

前　言

《微积分同步学习指导》是根据国家教委颁发的《高等工业学校高等数学课程教学基本要求》，和我校“九五”规划特色教材的要求而编写的．它与我校《国家工科数学课程教学基地》系列教材《微积分》上、下册的内容完全同步．本书由电子科技大学应用数学学院长期从事《微积分》教学，具有丰富教学经验的教师编写，编写的指导思想是：紧扣大纲，突出重点；加强基础，重视综合；总结题型，启迪思路；注重应用，提高能力．

本书力求突出以下特点：

一、注重教学内容与体系整体优化

本书在内容编写上注意了教学内容与体系的整体优化，并与我校“国家工科数学教学基地”系列教材之一的《微积分》教材相对应，还与我校新开发的多媒体高等数学网上答疑系统相辅相成，优势互补．若学生能将其紧密地结合起来，定能在学习上收到很好的效果．

二、重视数学思想与方法，适当淡化运算技巧

计算机技术的迅速发展及数学软件的广泛应用使得求极限、求导数与求积分的运算技巧有必要适当淡化．因此，本书在编写时尽量少举一些计算繁难的例题，多介绍一些基本题，把重点放在介绍数学思想与方法上．

三、充分重视培养学生应用数学知识解决实际问题的意识与能力

本书力求将数学建模的思想和方法渗透到教材中去，培养学生应用数学知识解决实际问题的意识与能力．每一单元都重视了应用题的选择和分析解答．

本书根据教学内容分为八个单元，每个单元分为五个部分：(1) 基本要求；(2) 内容提要；(3) 典型例题；(4) 复习题选解；(5) 单元检测题．每一单元后面分别介绍了在微积分发展史上做出了伟大贡献的中外数学家．希望对读者有所启发和帮助．

为了帮助读者检查自己对知识的掌握情况，除每单元附有检测题外，在附录里还有三套电子科技大学最近三年《微积分（上、下）期末考试试题》及参考解答．

电子科技大学每年九月举办的全校高等数学竞赛吸引了不少优秀学生参加．竞赛试题不脱离“基本要求”，主要考察掌握知识的灵活性及综合应用数学知识解决实际问题的能力．试题有较大的参考价值，所以特在附录里选编了三套电子科技大学最近三年《高等数学竞赛试题》及参考解答和最近三年全国工科硕士研究生入学考试《数学一试题》及参考解答．

本书内容全面、例题典型、分析透彻、叙述清楚、便于自学．本书可供普通高校、成人教育、高教自考等各类本、专科学生以及报考研究生的读者参考．

本书由傅英定、彭年斌主编．各单元的执笔人分别是：赵汇渝（第一单元）；蒲和平（第二单元）；李昌宜（第三单元）；高建（第四单元）；傅英定（第五单元）；曾勇（第六单元）；彭年斌（第七单元）；贾闽惠（第八单元）；其余内容由刘金水选编．

限于编者水平，难免有不妥之处，敬请批评指正．

编　者

2002 年 8 月

目 录

第一单元　函数 极限 连续

一、基本要求

1. 理解函数的概念.

2. 了解函数的奇偶性、单调性、周期性和有界性.

3. 理解复合函数的概念，了解反函数的概念.

4. 掌握基本初等函数的性质及其图形.

5. 会建立简单实际问题中的函数关系式.

6. 理解极限的概念(对极限的 $\varepsilon-N$，$\varepsilon-\delta$ 定义可在学习过程中逐步加深理解，对于给出 ε 求 N 或 δ 不作过高要求).

7. 掌握极限四则运算法则.

8. 了解两个极限存在准则(夹逼准则和单调有界准则)，会用两个重要极限的结果来求极限.

9. 了解无穷小、无穷大以及无穷小的阶的概念，会用等价无穷小求极限.

10. 理解函数在一点连续的概念.

11. 了解间断点的概念，并会判断间断点的类型.

12. 了解初等函数的连续性和闭区间上连续函数的性质(介值定理和最大、最小值定理).

二、内容提要

(一)函数

1. 函数的概念及其表示法

(1)定义　设 $\overline{X}$ 和 $\overline{Y}$ 为两个非空实数集，若存在某一对应规律(或法则)f，使得对于 $\overline{X}$ 中任意一个数 x，$\overline{Y}$ 中都有惟一确定的实数 y 与它对应，则称 f 为定义在 $\overline{X}$ 上的函数，记为 $f:\overline{X}\to\overline{Y}$ 或简记为 $y=f(x)$.

函数是高等数学研究的基本对象. 在函数的定义中，定义域和对应法则是函数概念的两个要素.

(2)在函数记号 $y=f(x)$ 中，记号 $f()$ 表示自变量 x 与因变量 y 之间的对应法则，此对应法则 $f()$ 与自变量、因变量用什么字母表示无关，且不限于表示某一个数学表达式，也可以表示几个数学表达式(如分段函数)，甚至还可以表示一个几何图形或一张数据表格.

2. 函数的几种简单形态

(1)奇偶性　$f(x)$ 的定义域 D_f 是关于原点对称的，若对 $\forall\ x\in D_f$，都有 $f(-x)=$

$-f(x)$，称 $f(x)$ 为奇函数；若对 $\forall\ x\in D_f$，有 $f(-x)=f(x)$，称 $f(x)$ 为偶函数.

奇函数的图形关于原点对称，偶函数的图形关于 y 轴对称.

(2)单调性　对 $\forall\ x_1,x_2\in(a,b)\subset D_f$，当 $x_1<x_2$，有 $f(x_1)<f(x_2)$(或 $f(x_1)>f(x_2)$)，则称函数 $y=f(x)$ 在 (a,b) 内单调增加(或单调减少).

(3)周期性　函数 $f(x)$ 在 $D_f=(-\infty,+\infty)$ 内有定义，若存在常数 $T\neq 0$，对 $\forall\ x$，有 $f(x+T)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为周期函数，T 为 $f(x)$ 的周期，通常所说的周期是指最小正周期.

(4)有界性　若存在正数 M，对 $\forall\ x\in X\subset D_f$，恒有 $|f(x)|\leqslant M$，称 $f(x)$ 在 X 上有界.

3. 基本初等函数、复合函数和初等函数

(1)基本初等函数　常值函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函统称为基本初等函数.

(2)复合函数　设 $y=f(u)$ 的定义域为 D_f，$u=\varphi(x)$ 的定义域为 D_φ，值域为 Z_φ. 若 $Z_\varphi\cap D_f\neq\Phi$，则可定义 D_f 的一个子集到 Z_f 的函数为 $y=f[\varphi(x)]$，称为由 $y=f(u)$ 和 $u=\varphi(x)$ 复合而成的复合函数. y 是因变量，x 是自变量，u 是中间变量，注意分段函数的复合数.

(3)初等函数　由基本初等函数通过有限次四则运算和有限次复合运行得到，且能用一个式子表示的函数，称为初等函数.

(二)极限的概念、性质和运算

1. 定义

(1)数列的极限　设有数列 $\{x_n\}$ 和常数 A，如果对于任意给定的正数 ε，总存在正整数 N，使得满足 $n>N$ 的一切 n，都有 $|x_n-A|<\varepsilon$ 成立，则称 A 是数列 $\{x_n\}$ 的极限，记为 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，这时也称 $\{x_n\}$ 收敛于 A. 如果 $\{x_n\}$ 没有极限，则称 $\{x_n\}$ 是发散的，数列 $\{x_n\}$ 是否收敛以及收敛时收敛到何值与 $\{x_n\}$ 的前面有限项无关.

(2)函数的极限　设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某空心邻域有定义，A 为一常数，如果对于任意的 $\varepsilon>0$，总存在正数 δ，使得满足不等式 $0<|x-x_0|<\delta$ 的一切 x，恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 成立，则称 A 为 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的极限，记为 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$.

设函数 $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 和 $(-\infty,-a)$ $(a>0)$ 内有定义，A 为一常数. 如果对于任意给定的 $\varepsilon>0$，总存在一个正数 X，使得满足 $|x|>X$ 的一切 x，恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 成立，则称 A 为 $f(x)$ 当 x 趋于无穷大时的极限，记为 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x)=A$.

还有单侧极限的概念，左极限 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A\Leftrightarrow\forall\ \varepsilon>0,\exists\ \delta>0$，当 $x_0-\delta<x<x_0$ 时，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$，亦可记为 $f(x_0-0)=A$. 右极限 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A\Leftrightarrow\forall\ \varepsilon>0,\exists\ \delta>0$，当 $x_0<x<x_0+\delta$ 时，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$，亦可记作 $f(x_0+0)=A$. 显然，极限存在 $\Leftrightarrow$ 左、右极限存在且相等. 此结论常用来证明分段函数在分段点处极限的存在性.

需要指出的是，由于自变量的变化状态及其相应函数的变化趋势不同，因此函数的极限有多种形式，但不论自变量的变化状态，还是因变量的变化趋势，主要有两类.

自变量的变化状态有：

1° $x\to\infty$，包括 $x\to-\infty$，$x\to+\infty$，$x\to\infty$；

2° $x\to x_0$，包括 $x\to x_0^-$，$x\to x_0^+$，$x\to x_0$.

因变量的变化趋势有：

1° $f(x)\to A$；

2° $f(x)\to\infty$，包括 $f(x)\to-\infty$，$f(x)\to+\infty$，$f(x)\to\infty$.

若把它们加以组合，共有 24 种形式，读者在复习时可列表整理.

2. 无穷小量

如果 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$，则称 $f(x)$ 为当 $x\to x_0$ 时的无穷小量，简称为无穷小.

(1)无穷小的运算　有限个无穷小的代数和仍是无穷小.

有界函数与无穷小的乘积仍是无穷小，由此可以推出：常数与无穷小的乘积为无穷小；有限个无穷小的的乘积为无穷小.

(2)函数、极限与无穷小的关系

$$\lim f(x)=A\Leftrightarrow f(x)=A+\alpha(x),(\text{其中 } A \text{ 为常数},\lim\alpha(x)=0)$$

(3)无穷小与无穷大的关系　在自变量的同一变化过程中，若 $f(x)$ 是无穷大，则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 是无穷小；若 $f(x)$ 是无穷小，且 $f(x)\neq0$，则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 是无穷大.

3. 极限的四则运算

若 $\lim f(x)=A$，$\lim g(x)=B$，则

$$\lim[f(x)\pm g(x)]=A\pm B,\qquad \lim[f(x)g(x)=]A\cdot B.$$

此性质可以推广到任意有限个函数的情形.

$$\lim\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{A}{B},\quad(B\neq0)$$

4. 极限的性质

(1)惟一性　若函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时的极限存在，则极限惟一.

(2)保号性　若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A>0$（或 $A<0$），则存在 $\delta>0$，使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，恒有 $f(x)>0$（或 $f(x)<0$）.

设 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=B$，若 $A<B$，则存在 $\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，$f(x)<g(x)$.

若存在 x_0 的某个空心邻域，有 $f(x)\leqslant g(x)$，且 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=B$，则 $A\leqslant B$.

(3)有界性　若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，则存在 $\delta>0$ 及 $M>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，恒有 $|f(x)|\leqslant M$.

5. 极限存在准则及两个重要极限

(1)夹逼准则　如果在 x_0 点的某个空心邻域内，有 $g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$，且 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=$

$\lim\limits_{x \to x_0} h(x) = A$，则$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$.

(2)单调有界准则　若数列$\{x_n\}$单调且有界，则数列$\{x_n\}$必有极限.

若$\{x_n\}$为单调增加数列，且$\exists\ m$，对$\forall\ n > m$，有$x_n \leqslant M$，则极限$\lim\limits_{n \to \infty} x_n$存在；

若$\{x_n\}$为单调减少数列，且$\exists\ m$，对$\forall\ n > m$，有$x_n \geqslant M$，则极限$\lim\limits_{n \to \infty} x_n$存在.

(3)两个重要极限　$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$；$\lim\limits_{n \to \infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e}$，或$\lim\limits_{x \to 0} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e}$，可以推广到：

$$\lim_{x \to x_0} [1 + \alpha(x)]^{\frac{1}{\alpha(x)}} = \mathrm{e}, (\text{其中}\lim_{x \to x_0} \alpha(x) = 0, \alpha(x) \neq 0)$$

6. 无穷小的比较及代换定理

设$\lim \alpha(x) = 0$，$\lim \beta(x) = 0$，$(\beta(x) \neq 0)$.

(1)如果$\lim \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$，则称在该趋势下，$\alpha(x)$是比$\beta(x)$高阶的无穷小，可记为$\alpha(x) = 0(\beta(x))$；

如果$\lim \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \infty$，则称在该趋势下，$\alpha(x)$是比$\beta(x)$低阶的无穷小；

如果$\lim \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = C(C \neq 0)$，则称在该趋势下，$\alpha(x)$与$\beta(x)$是同阶无穷小，特别地，若$C = 1$，即$\lim \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$，则称在该趋势下，$\alpha(x)$与$\beta(x)$为等价无穷小，记为$\alpha(x) \sim \beta(x)$.

(2)设$\alpha(x) \sim \alpha_1(x)$，$\beta(x) \sim \beta_1(x)$，若$\lim \dfrac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)} = A(\text{或}\infty)$，则

$$\lim \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)} = A;$$

若$\lim \dfrac{\alpha_1(x) f(x)}{\beta_1(x)} = \beta(\text{或}\infty)$，则

$$\lim \frac{\alpha(x) f(x)}{\beta(x)} = \lim \frac{\alpha_1(x) f(x)}{\beta_1(x)} = B.$$

(3)设$\alpha(x)$，$\beta(x)$是$x \to x_0$的无穷小，若$\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{[\beta(x)]^k} = C \neq 0$($C$为常数，$k > 0$)，则称$x \to x_0$时，$\alpha(x)$是$\beta(x)$的$k$阶无穷小量.

(4)一些常用的等价无穷小：

当$x \to 0$时，$\sin x \sim x$；$\tan x \sim x$；$\arcsin x \sim x$；$\arctan x \sim x$；$\ln(1 + x) \sim x$；$\mathrm{e}^x - 1 \sim x$；$a^x - 1 \sim x \ln a (a > 0, a \neq 1)$；$\log_a(1 + x) \sim \dfrac{x}{\ln a}(a > 0)$；$(1 + x)^a - 1 \sim ax$.

(三)函数的连续性

(1)函数$y = f(x)$在$x = x_0$连续的等价定义：设函数$f(x)$在x_0的某一邻域内定义，有

1°　$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim\limits_{\Delta x \to 0} [f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)] = 0$，则称$f(x)$在$x = x_0$连续.

2°　$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$，则称$f(x)$在$x = x_0$连续.

3°　如果对任意给定的$\varepsilon > 0$，存在$\delta > 0$，当$|x - x_0| < \delta$时，恒有$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$，则称$f(x)$在$x = x_0$连续.

当$f(x)$在$x = x_0$连续时，具有局部保号性，即若$f(x_0) > 0$(或< 0)，则$\exists\ \delta > 0$，使得对

$\forall\ x\in N(x_0,\delta)$有 $f(x)>0$(或 $f(x)<0$).

(2)若函数 $f(x)$在开区间(a,b)内每一点都连续，则称 $f(x)$在开区间(a,b)内连续；若 $f(x)$在区间(a,b)连续，且在端点 a 和 b 处分别右连续和左连续，即$\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=f(a)$，$\lim\limits_{x\to b^-}f(x)=f(b)$，则称 $f(x)$在闭区间$[a,b]$连续.

(3)函数的间断点　若 $f(x)$在点 x_0 不连续，称 x_0 是 $f(x)$的间断点，间断点一般分为两类.

1°　第一类间断点，$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$与$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$均存在的间断点，又分为跳跃型和可去型两种：

跳跃型间断点：$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)\neq\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$；可去型间断点：$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$.

对可去型间断点，可以补充（当 $f(x)$在 x_0 没有定义时）或者改变（当$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\neq f(x_0)$时）$f(x)$在 x_0 的函数值，定义新函数

$$\varphi(x)=\begin{cases}f(x), & x\neq x_0\\ \lim\limits_{x\to x_0}f(x), & x\neq x_0\end{cases}$$

则 $\varphi(x)$在 x_0 连续.

2°　第二类间断点，凡是不属于第一类间断点的间断点，常见的有无穷型（若$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$与$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$中至少有一个是无穷大）和振荡型（若$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$与$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$中至少有一个无穷次振荡不存在）两种.

(4)闭区间上连续函数的性质

1°　最值定理　若 $f(x)$在$[a,b]$上连续，则必存在 $\xi_1,\xi_2\in[a,b]$，使对一切 $x\in[a,b]$都有

$$f(\xi_1)\leqslant f(x)\leqslant f(\xi_2)$$

即 $f(x)$在$[a,b]$必有最小值 $f(\xi_1)$和最大值 $f(\xi_2)$.

2°　有界性定理　若 $f(x)$在$[a,b]$上连续，则 $f(x)$在$[a,b]$有界，即存在正数 M，使对 $\forall\ x\in[a,b]$，有$|f(x)|\leqslant M$.

3°　介值定理　设 $f(x)$在闭区间$[a,b]$连续，且 $f(a)\neq f(b)$，若 μ 是 $f(a)$，$f(b)$之间任何一个数，则在(a,b)内至少存在一点 ξ，使得 $f(\xi)=\mu$.

推论 1　若 $f(x)$在区间$[a,b]$连续，m、M 分别为 $f(x)$在$[a,b]$的最小值、最大值（$m<M$），则对任意 $\mu\in(m,M)$，至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $f(\xi)=\mu$.

推论 2　零点定理.若 $f(x)$在闭区间$[a,b]$连续，且 $f(a)\cdot f(b)<0$，则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使 $f(\xi)=0$.

推论 3　若单调函数 $f(x)$在闭区间$[a,b]$连续，且 $f(a)\cdot f(b)<0$，则存在惟一的 $\xi\in(a,b)$，使 $f(\xi)=0$.

三、典型例题

例 1　求函数 $f(x)=\dfrac{1}{\lg(x+4)}+\sqrt{x^2-x-6}+\arcsin\dfrac{2x-1}{7}$的定义域.

解 对$\dfrac{1}{\lg(x+4)}$,有 $x+4>0$,且 $x+4\neq1$; 对 $\sqrt{x^2-x-6}$,有 $x^2-x-6\geqslant0$;

对 $\arcsin\dfrac{2x-1}{7}$,有 $\left|\dfrac{2x-1}{7}\right|\leqslant1$.

$$\text{联立}\begin{cases}x+4>0\\x+4\neq1\\x^2-x-6\geqslant0\\\left|\dfrac{2x-1}{7}\right|\leqslant1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x>-4\\x\neq-3\\x\geqslant3,x\leqslant-2\\-3\leqslant x\leqslant4\end{cases}$$

故 $f(x)$的定义域 $D_f=(-3,-2)\cup[3,4]$.

注: 求函数的定义域,如果是实际问题建立的函数,由实际意义来确定定义域,如果函数由解析式子给出,通常是指自然定义域,其原则是:

(1)分式函数的分母不能等于零;

(2)开偶次方,被开方式$\geqslant0$;

(3)对数函数的底大于零且$\neq1$,其数>0;

(4)arcsin(),arccos(),括号部分的绝对值小于等于1.

例2 设 $\psi(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant0\\x, & x>0\end{cases}$, $\varphi(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant0\\-x^2, & x>0\end{cases}$,求 $\psi[\varphi(x)]$,$\varphi[\varphi(x)]$,$\varphi[\psi(x)]$,$\psi[\psi(x)]$.

分析 两个或两个以上的函数能构成复合函数,必须后面函数的值域是相应前面函数定义域的子集,对于分数函数,由于在其定义域的不同子集上,用不同的解析式表示,所以在复合时,应区别对待.

解 (1)$\psi[\varphi(x)]$,当 $x\leqslant0$ 时,$\varphi(x)=0$,故 $\psi[\varphi(x)]=0$,当 $x>0$ 时,$\varphi(x)=-x<0$,故 $\psi[\varphi(x)]=0$,因此

$$\psi[\varphi(x)]=0$$

(2)$\varphi[\varphi(x)]$,当 $x\leqslant0$ 时,$\varphi(x)=0$,故 $\varphi[\varphi(x)]=0$,当 $x>0$ 时,$\varphi(x)=-x^2<0$,故 $\varphi[\varphi(x)]=0$,因此 $\varphi[\varphi(x)]=0$.

(3)$\varphi[\psi(x)]$,当 $x\leqslant0$ 时,$\psi(x)=0$,故 $\varphi[\psi(x)]=0$,当 $x>0$ 时,$\psi(x)=x>0$,故 $\varphi[\psi(x)]=-x^2$,则

$$\varphi[\psi(x)]=\begin{cases}0, & x\leqslant0\\-x^2, & x>0\end{cases}\quad\text{即 }\varphi[\psi(x)]=\varphi(x)$$

(4)$\psi[\psi(x)]$,当 $x\leqslant0$ 时,$\psi(x)=0$,故 $\psi[\psi(x)]=0$,当 $x>0$ 时,$\psi(x)=x$,$\psi[\psi(x)]=\psi(x)$.

因此
$$\psi[\psi(x)]=\begin{cases}0, & x\leqslant0\\x, & x>0\end{cases}\quad\text{即 }\psi[\psi(x)]=\psi(x)$$

例3 设函数 $y=f(x)$是以 T 为周期的周期函数,求证 $f(ax)(a>0)$是以$\dfrac{T}{a}$为周期的函数.

分析 只要证明 $f\left[a\left(x+\dfrac{T}{a}\right)\right]=f(ax)$就行了.

证 $f\left[a\left(x+\dfrac{T}{a}\right)\right]=f(ax+T)$,而 $f(ax+T)=f(ax)$(因为 $f(x)$是以 T 为周期的周

期函数)，所以 $f\left[a\left((x+\frac{T}{a}\right)\right]=f(ax)$.

故 $f(ax)$是以$\frac{T}{a}$为周期的函数.

例 4　求函数 $y=\begin{cases} x^2-1, & 0\leqslant x\leqslant 1 \\ x^2, & -1\leqslant x<0 \end{cases}$ 的反函数.

分析　求函数的反函数，可将 x 解出为 y 的函数，再将 x 与 y 的位置互换即可，对于分段函数的情形，必须分段处理.

解　当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时，有 $-1\leqslant y=x^2-1\leqslant 0$，解得 $x=\sqrt{1+y}$.

当 $-1\leqslant x<0$ 时，有 $0<y=x^2\leqslant 1$，解得 $x=-\sqrt{y}$，因此反函数为

$$x=\varphi(y)=\begin{cases} \sqrt{1+y}, & -1\leqslant y\leqslant 0 \\ -\sqrt{y}, & 0<y\leqslant 1 \end{cases}$$

习惯上写成

$$y=\varphi(x)=\begin{cases} \sqrt{1+x}, & -1\leqslant x\leqslant 0 \\ -\sqrt{x}, & 0<x\leqslant 1 \end{cases}$$

例 5　已知函数 $f(x)$，$x\in R$ 满足方程

$$z=\sqrt{y}+f(\sqrt[3]{x}-1)$$

且当 $y=1$，$z=x$，试求 $f(x)$.

解　将 $y=1$，$z=x$ 代入 $z=\sqrt{y}+f(\sqrt[3]{x}-1)$，得

$$x=1+f(\sqrt[3]{x}-1),\quad f(\sqrt[3]{x}-1)=x-1$$

令 $\sqrt[3]{x}-1=t$，$x\ (t+1)^3$，故

$$f(t)=(t+1)^3-1=t^3+3t^2+3t$$

即

$$f(x)=x^3+3x^2+3x$$

例 6　设 $f(0)=0$，且 $x\neq 0$ 时，$f(x)$满足 $af(x)+bf\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{c}{x}$($a,b,c$ 为常数，$|a|\neq|b|$)，求证 $f(x)$为奇函数.

分析　考虑函数的奇偶数，通常可以按下述步骤进行，(1)定义域 D_f 是否关于原点对称；(2)考虑 $|f(-x)|=|f(x)|$是否成立，不成立时不具奇偶性，成立时再考虑 $f(-x)=-f(x)$或 $f(-x)=f(x)$是否成立，本题可先求 $f(x)$的表达式.

解　当 $x\neq 0$ 时，令 $x=\frac{1}{t}$得

$$af\left(\frac{1}{t}\right)+bf(t)=ct$$

联立 $\begin{cases} af\left(\frac{1}{x}\right)+bf(x)=cx \\ af(x)+bf\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{c}{x} \end{cases}$　解出　$f(x)=\frac{1}{a^2-b^2}\left(\frac{ac}{x}-bcx\right),\quad x\neq 0$

因此　$$f(-x)=\frac{1}{a^2-b^2}\left[\frac{ac}{-x}-bx(-x)\right]=\frac{1}{a^2-b^2}\left(\frac{ac}{x}-bcx\right)=-f(x)$$

又 $f(0)=0$，故 $f(x)$为奇函数.

注：得出 $f(x)=\frac{1}{a^2-b^2}\left(\frac{ac}{x}-bcx\right)$后，可以直接由两个不同奇函数的和、差仍为奇函

数得证.

例 7　定义域是关于原点对称的区间 I 内的任意函数,可表示成一个奇函数 $G(x)$ 与一个偶函数 $H(x)$ 之和,且这种表示法是惟一的.

分析　因为 $G(x)$ 是奇函数,$H(x)$ 是偶函数,即对 $\forall\ x\in I, G(-x)=-G(x), H(-x)=H(x)$,于是

$$f(x)=G(x)+H(x),\quad f(-x)=-G(x)+H(x)$$

两式相加得 $$H(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2}$$

两式相减得 $$G(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2}$$

且这种表示法是惟一的.

例 8　证明函数 $f(x)=\sin x^2$ 不是周期函数.

分析　原则上说有直接证法和反证法两种证明方法. 直接证法是用周期函数的定义去求周期,经过推算所找到的 T 却与变量有关,这与周期的定义不符,从而断定 $f(x)$ 不是一个周期函数,反证法预先假定该函数是周期函数,运用一些众所周知的运算推得矛盾结果,从而否定预先的假定,下面分别证明如下:

证一[用反证法]　假定 $f(x)=\sin x^2$ 是周期函数,则存在与 x 无关的周期 T,使 $\sin(x+T)^2=\sin x^2$ 对任意的 x 皆成立.

首先取 $x=0$,则有 $\sin T^2=\sin(0)=0$,于是由此得出 $T^2=n\pi$,而取 $x=\sqrt{2}T$ 时,由 $\sin(x+T)^2=\sin x^2$ 得 $\sin(\sqrt{2}\sqrt{n\pi}+\sqrt{n\pi})^2=\sin(\sqrt{2}\sqrt{n\pi})^2$,即 $\sin[(\sqrt{2}+1)^2 n\pi]=0$,于是得 $(\sqrt{2}+1)^2 n\pi=k\pi$,即 $(\sqrt{2}+1)^2=\dfrac{k}{n}$,矛盾(左端为一无理数,右端为一有理数).

证二[直接证法]　假设 T 为 $f(x)=\sin x^2$ 的周期函数,则对于 x 取任何值,皆有 $\sin(x+T)^2=\sin x^2$,即 $\sin(x+T)^2-\sin x^2=0$,对 T 解方程得

$$2\cos\frac{1}{2}[(x+T)^2+x^2]\sin\frac{1}{2}[(x+T)^2-x^2]=0$$

即 $$2\cos\frac{1}{2}[(x+T)^2+x^2]\sin\frac{1}{2}[(2xT+T^2)]=0$$

于是有 $\cos\dfrac{1}{2}[(x+T)^2+x^2]=0\to T^2+2xT+2x^2=\pi$

或 $$\sin\frac{1}{2}[(2xT+T^2]=0\to T^2+2xT=0$$

不论哪种情况下的非 0 解均与 x 有关,可见函数 $f(x)=\sin x^2$ 是非周期函数.

例 9　设函数 $f(x)=\dfrac{x}{1+x}$,(1)证明 $f(x)$ 在区间$[0,+\infty]$上单调增加;(2)应用(1)的结论,对于任意实数 a,b,证明不等式 $\dfrac{|a+b|}{1+|a+b|}\leqslant\dfrac{|a|}{1+|a|}+\dfrac{|b|}{1+|b|}$.

证　(1)应用函数单调性的定义证明.

设 $x_1,x_2\in[0,+\infty]$,且 $x_1<x_2$,则

$$f(x_2)-f(x_1)=\frac{x_2}{1+x_2}-\frac{x_1}{1+x_1}$$
$$=\frac{x_2(1+x_1)-x_1(1+x_2)}{(1+x_2)(1+x_1)}=\frac{x_2-x_1}{(1+x_2)(1+x_1)}\geqslant 0$$

(2)观察欲证不等式两端的形式，猜测它很可能与三角不等式$|a+b|\leqslant|a|+|b|$有一定的联系，试探证明如下：

由$|a+b|\leqslant|a|+|b|$，根据(1)的结果有

$$f(|a+b|)\leqslant f(|a|+|b|)$$

即
$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|}\leqslant\frac{|a|+|b|}{1+|a|+|b|}$$

而上述不等式的右端
$$\frac{|a|+|b|}{1+|a|+|b|}=\frac{|a|}{1+|a|+|b|}+\frac{|b|}{1+|a|+|b|}\leqslant\frac{|a|}{1+|a|}+\frac{|b|}{1+|b|}$$

所以
$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|}\leqslant\frac{|a|}{1+|a|}+\frac{|b|}{1+|b|}$$

例 10　已知定义在$[0,4]$上的函数$f(x)=3^x$，试先延拓至$[-4,0]$使之成为偶函数，然后再把已延拓到$[-4,4]$上的函数，延拓至整个实数轴上，使函数成为以 8 为周期的函数.

解　利用周期函数的定义来处理这个问题.

当$x\in[-4,0]$时，$-x\in[0,-4]$，由于要求$f(x)$在$[-4,0]$上进行延拓后成为偶函数，所以
$$f(-x)=f(x),(x\in[-4,4])$$

故$x\in[-4,0]$时，有
$$f(x)=f(-x)=3^{-x}$$

因此有
$$f(x)=\begin{cases}3^x, & x\in[0,4]\\ 3^{-x}, & x\in[-4,0]\end{cases}$$

如果再将$f(x)$延拓至整个实数轴上，使之成为以 8 为周期的函数，那么，对于任何实数x，都惟一地存在整数k，使

$$8k-4\leqslant x\leqslant 8k+4$$

当$8k-4\leqslant x\leqslant 8k$时，有$-4\leqslant x-8k\leqslant 0$，此时

$$f(x)=f(x-8k)=3^{-(x-8k)}=3^{8k-x}$$

当$8k\leqslant x\leqslant 8k+4$时，有$0\leqslant x-8k\leqslant 4$，此时，$f(x)=f(x-8k)=3^{x-8k}$.

因此得　$f(x)=\begin{cases}3^{-x+8k}, & 8k-4\leqslant x\leqslant 8k\\ 3^{x-8k}, & 8k\leqslant x\leqslant 8k+4\end{cases}$

例 11　利用函数的连续性求极限(直接代入法).

(1)$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{8\cos^2x-2\cos x-1}{2\cos^2x+\cos x-1}$；　　(2)$\lim\limits_{x\to+\infty}[\cos\ln(1+x)-\cos\ln x]$.

解　由连续函数的定义求极限时，函数符号“f”可以与极限符号“lim”交换次序，即

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)=f(\lim_{x\to x_0}x)$$

更一般地，$f(\ )$为连续函数，有

$$\lim_{x\to x_0}f[\varphi(x)]=f[\lim_{x\to x_0}\varphi(x)]$$

解这类问题时，通常需要适当变形，消去零因子(约分，分子、分母有理化，因式分解，三角函数和差化积等).

(1)原式$=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{(4\cos x+1)(2\cos x-1)}{(\cos x+1)(2\cos x-1)}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{4\cos x+1}{\cos x+1}=\dfrac{4x\dfrac{1}{2}+1}{\dfrac{1}{2}+1}=2$

(2)原式$=\lim\limits_{x\to+\infty}\left\{-2\sin\dfrac{\ln[(1+x)x]}{2}\sin\dfrac{\ln\dfrac{1+x}{x}}{2}\right\}=0$

其中，$\left|-2\sin\dfrac{\ln[(1+x)x]}{2}\right|\leqslant 2$，$\lim\limits_{x\to+\infty}\sin\dfrac{\ln\dfrac{1+x}{x}}{2}=\sin\dfrac{|n|}{2}=0$.

例 12 利用数列求和公式和基本极限求下列极限：

(1)$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n})}{(n+1)+2(n+2)+\cdots+n(n+n)}$；

(2)$\lim\limits_{n\to\infty}(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^{2n})$，$(|x|<1)$；

(3)$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2a^n+3(-b)^n}{2a^{n+1}+3(-b)^{n+1}}$，(其中 $a>b>0$).

解 (1)原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n})}{n(1+2+\cdots+n)+(1^2+2^2+\cdots+n^2)}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3\left[\dfrac{1-\frac{1}{2^{n+1}}}{1-\frac{1}{2}}\right]}{\dfrac{n\cdot n(n+1)}{2}+\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}}=\frac{12}{5}$$

(2)原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-x}{1-x}(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^{2n})=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x}=\dfrac{1}{1-x}$， $(|x|<1)$

(3)原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2+3\left(\dfrac{-b}{a}\right)^n}{2a+3\left(\dfrac{-b}{a}\right)^n(-b)}=\dfrac{2}{2a}=\dfrac{1}{a}$， $\left(\because\left|\dfrac{-b}{a}\right|<1\right)$

注：(1)常用的数列求和公式有：

$1+2+3+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$；

$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$；

$a+aq+aq^2+\cdots+aq^{n-1}=\dfrac{a(1-q^n)}{1-q}$，$(q\neq1)$.

(2)常用的基本极限有：

$$\lim_{n\to\infty}q^n=\begin{cases}0, & |q|<1\\ 1, & q=-1\\ \text{不存在}, & q=-1\\ \infty, & |q|>1\end{cases};$$

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$； $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

例 13 用夹逼法求$\lim\limits_{n\to\infty}(1+2^n+3^n)^{\frac{1}{n}}$.

分析 记 $x_n=(1+2^n+3^n)^{\frac{1}{n}}$，显然$(3\cdot1^n)^{\frac{1}{n}}<x_n<(3\cdot3^n)^{\frac{1}{n}}$，但左边的极限为 1，右边的极限为 3，不能用夹逼准则. 夹逼准则的关键是夹此数列的两个数列必须有相同的极限，这也是构造两个数列的困难所在.

解 记 $x_n=(1+2^n+3^n)^{\frac{1}{n}}$，显然有不等式

$$3=(3^n)^{\frac{1}{n}}<x_n<(3\cdot3^n)^{\frac{1}{n}}=3^{\frac{1}{n}}\cdot3$$

而$\lim\limits_{n\to\infty}3^{\frac{1}{n}}=1$，$\lim\limits_{n\to\infty}3^{\frac{1}{n}}\cdot 3=3$，故$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=3$，即

$$\lim_{n\to\infty}(1+2^n+3^n)^{\frac{1}{n}}=3$$

例 14 (1)$a_1=\dfrac{c}{2}$，$a_{n+1}=\dfrac{c}{2}+\dfrac{a_n^2}{2}(n=2,3,\cdots)$，$(0\leqslant c\leqslant 1)$，求$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$.

(2)设 $x_1>0$，且 $x_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(x_n+\dfrac{a}{x_n}\right)$，$(n=1,2,\cdots,a>0)$，求$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

分析 要证明$\{a_n\}$收敛，利用单调有界数列极限存在准则，由 a_{n+1}的结构及 $a_1=\dfrac{c}{2}$，可以猜测$\{a_n\}$是单调增加的.

证 (1)由已知，对$\forall\ n$，$a_n\geqslant 0$，易知 $a_2-a_1=\dfrac{1}{2}a_1^2\geqslant 0$，若 $a_k-a_{k-1}\geqslant 0$，考查

$$a_{k+1}-a_k=\left(\frac{c}{2}+\frac{a_k^2}{2}\right)-\left(\frac{c}{2}+\frac{a_{k-1}^2}{2}\right)=\frac{1}{2}(a_k+a_{k-1})(a_k-a_{k-1})\geqslant 0$$

从而由数学归纳法知，对$\forall\ n$ 有 $a_{n+1}-a_n\geqslant 0$，即$\{a_n\}$是单调增加的.

又 $0\leqslant c\leqslant 1$，$0\leqslant a_1=\dfrac{c}{2}\leqslant 1$，若对 k 有 $0\leqslant a_k\leqslant 1$，则 $0\leqslant a_k^2\leqslant 1$，考查

$$a_{k+1}=\frac{c}{2}+\frac{a_k^2}{2}\leqslant\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$$

$\{a_n\}$有上界，因此$\{a_n\}$极限存在.

设$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，对 $a_{n+1}=\dfrac{c}{2}+\dfrac{a_n^2}{2}$，取极限 $a=\dfrac{c}{2}+\dfrac{a^2}{2}$，解之得

$$a=1\pm\sqrt{1-c}$$

因为 $0\leqslant a_n\leqslant 1$，有 $0\leqslant a\leqslant 1$，故舍去 $a=1+\sqrt{1-c}$，则

$$\lim_{n\to\infty}a_n=1-\sqrt{1-c}$$

(2)因为

$$x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{a}{x_n}\right)\geqslant\sqrt{x_n\cdot\frac{a}{x_n}}=\sqrt{a}$$

所以$\{x_n\}$有下界$\sqrt{a}$，即从 $n=2$ 开始，$x_n\geqslant\sqrt{a}$，而

$$\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{a}{x_n^2}\right)\leqslant\frac{1}{2}\left(1+\frac{a}{a}\right)=1$$

即 $x_{n+1}\leqslant x_n$，对$\forall\ n\geqslant 1$ 成立，所以$\{x_n\}$是单调减少数列，根据单调有界数列必有极限，故$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在.

设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，则 $A\geqslant\sqrt{a}>0$，由$\lim\limits_{n\to\infty}x_{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2}\left(x_n+\dfrac{a}{x_n}\right)$得

$$A=\frac{1}{2}\left(A+\frac{a}{A}\right)$$

即$\left(A+\dfrac{a}{A}\right)$，即 $A^2=a$，因此，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\sqrt{a}$.

注： 证明数列$\{x_n\}$单调增加(减少)，通常可用 $x_{n+1}-x_n\geqslant 0(\leqslant 0)$或 $x_n>0$ 时，用$\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\geqslant 1(\leqslant 1)$进行证明.

例 15 已知 $a_0\geqslant b_0>0$，对如下两个数列 $a_{n+1}=\dfrac{1}{2}(a_n+b_n)$，$b_{n+1}=\dfrac{2a_nb_n}{a_n+b_n}$，$(n=0,1,2,$