

Signature

首都名校学生素质  
能力同步训练与测评

# 数学

北京市重点中学编写组

高二

上



光明日报出版社

**首都名校学生素质能力  
同步训练与测评**

**数 学**

(高二上册)

北京市重点中学编写组

光明日报出版社

(京)新登字 101 号

图书在版编目(CIP)数据

首都名校学生素质能力同步训练与测评:高二数学.-北京:光明日报出版社,1996.8

ISBN 7-80091-813-0

I. 首… II. III. ①课程-中学-习题②数学课-高中-习题  
IV. G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(96)第 11504 号

首都名校学生素质能力同步训练与测评  
北京市重点中学编写组



光明日报出版社出版发行  
(北京永安路 106 号)

邮政编码:100050

电话:63017788-225

新华书店北京发行所经销  
北京通县运河印刷厂印刷

\*

787×1092 1/32 印张 7 字数 170 千字  
1996 年 8 月第 1 版 1996 年 8 月第 1 次印刷

印数:1-10000 册

ISBN 7-80091-813-0/G·374

---

上下册定价:13.30 元(单册 6.65 元)

# 首都名校学生素质能力

## 同步训练与测评丛书

### 编委会名单

主 编 王文琪

副主编 安 然

编 委 (以姓氏笔画为序)

|     |     |     |     |
|-----|-----|-----|-----|
| 王文琪 | 刘彭芝 | 安 然 | 孙嘉平 |
| 李海峰 | 杨建文 | 吴祖兴 | 邵裕民 |
| 张福岐 | 茹新平 | 胡新懿 | 赵 桐 |
| 崔金君 | 程念祖 | 鲍晓娜 | 霍恩儒 |

本册编著 普诚兴 王敬珍 张桂金

# 首都名校学生素质能力 同步训练与测评丛书

## 编写说明

一、首都名校学生素质能力同步训练与测评丛书,是在全国知名中学科研联合体 1995 年 11 月上海年会以后产生的一项成果。当时全国百余所知名中学在上海以“应试·素质·效能”为中心对从应试教育向素质教育转轨进行了深入的探讨;并定出 1996 年大庆年会的研究中心是“目标·管理·师资”,以便使素质教育得到进一步的贯彻与落实。会后北京分部各校便以《中国教育改革与发展纲要》为指针,为促进中学教育由应试教育向素质教育转轨,探索学科教学中进行素质教育,提高中学生文化素质水平的途径,编写了这套丛书。

二、这套丛书根据中学各科教学大纲和高考、中考说明,依据全国统编教材和教学进度,结合章节内容,明确素质与能力的培训目标进行编写。计有初中语文、数学、英语、政治、物理、化学,高中语文、数学、英语、政治、历史、物理、化学 13 门学科共计 60 来册。

三、这套丛书与年级教学同步,与教材检测结合,重在素质能力的培养训练。其特点是:

1. 以课本章节为体系,简要说明教材知识的重点、难点,便

于师生清晰掌握。

2. 着重思维能力开发,启发同向、异向以及创造性思维,提高解决实际问题的能力。

3. 进行审题、解题、表述、验证等相关学法的指导。并有相关练习、自测试卷、综合预测试卷及答案,以求实效。

四、这套丛书由首都师大附中、北京师范大学附属实验中学、北京大学附中、清华大学附中、中国人民大学附中、北京汇文中学、北京四中、北京八中、北京十五中、北京三十五中、北京一〇一中,以及海淀区教师进修学校、北京西城外国语学校、北京二十一世纪实验学校等名校的特级、高级教师和卓有成效的中青年骨干教师共同编写,其中高一英语特邀武汉市英语教研室主持编写。参加本书编写的有普诚兴老师、王敬珍老师、张桂金老师、岳斌老师、刘荫真老师、许飞老师、周誉蔼老师、王红老师、张群老师也为丛书的编写做了大量的工作。

五、这套丛书由首都的名校名师编写,精要简明,重在训练,既与教学同步,又可系统复习,是师生平时教学和学生复习考试的实用书籍,可谓随身而带的良师益友。但落实素质教育,提高知识能力是教育改革的一项艰巨工程,需要不断深入完善。本丛书的疏漏之处自在难免,真诚欢迎批评指正。

编 者

1996年7月

# 目 录

|                        |      |
|------------------------|------|
| 第一章 反三角函数和简单三角方程 ..... | (1)  |
| 一、本章知识的重点与难点 .....     | (1)  |
| 二、思维能力训练的重点与难点 .....   | (3)  |
| (一)思维的深刻性与全面性 .....    | (3)  |
| (二)等价转化的能力 .....       | (3)  |
| (三)数形结合的能力 .....       | (3)  |
| (四)灵活地解决综合问题的能力 .....  | (3)  |
| 三、相关学法指导 .....         | (4)  |
| 第一节 反正弦函数 .....        | (5)  |
| (一)练习题 .....           | (5)  |
| (二)解题指导 .....          | (8)  |
| 第二节 反余弦函数 .....        | (18) |
| (一)练习题 .....           | (18) |
| (二)解题指导 .....          | (20) |
| 第三节 反正切函数 .....        | (26) |
| (一)练习题 .....           | (26) |
| (二)解题指导 .....          | (29) |

|                      |      |
|----------------------|------|
| 第四节 反余切函数 .....      | (36) |
| (一)练习题 .....         | (36) |
| (二)解题指导 .....        | (39) |
| 自测试卷一 .....          | (44) |
| 第五节 简单三角方程 .....     | (46) |
| (一)练习题 .....         | (46) |
| (二)解题指导 .....        | (49) |
| 自测试卷二 .....          | (59) |
| 第二章 不等式 .....        | (61) |
| 一、本章知识的重点与难点 .....   | (61) |
| 二、思维能力训练的重点与难点 ..... | (62) |
| (一)逻辑思维能力 .....      | (62) |
| (二)创造性思维能力 .....     | (62) |
| (三)逻辑划分能力 .....      | (62) |
| (四)综合解题能力 .....      | (62) |
| 三、相关学法指导 .....       | (62) |
| 第一节 不等式的性质 .....     | (63) |
| (一)练习题 .....         | (63) |
| (二)解题指导 .....        | (66) |
| 第二节 用比较法证明不等式 .....  | (68) |
| (一)练习题 .....         | (68) |
| (二)解题指导 .....        | (70) |
| 第三节 用综合法证明不等式 .....  | (76) |
| (一)练习题 .....         | (76) |

|                      |       |
|----------------------|-------|
| (二) 解题指导 .....       | (78)  |
| 第四节 用分析法证明不等式 .....  | (87)  |
| (一) 练习题 .....        | (87)  |
| (二) 解题指导 .....       | (87)  |
| 自测试卷三 .....          | (92)  |
| 第五节 有理不等式的解法 .....   | (94)  |
| (一) 练习题 .....        | (94)  |
| (二) 解题指导 .....       | (96)  |
| 第六节 无理不等式的解法 .....   | (100) |
| (一) 练习题 .....        | (100) |
| (二) 解题指导 .....       | (100) |
| 第七节 指数不等式的解法 .....   | (101) |
| (一) 练习题 .....        | (101) |
| (二) 解题指导 .....       | (102) |
| 第八节 对数不等式的解法 .....   | (104) |
| (一) 练习题 .....        | (104) |
| (二) 解题指导 .....       | (105) |
| 第九节 绝对值不等式的解法 .....  | (111) |
| (一) 练习题 .....        | (111) |
| (二) 解题指导 .....       | (112) |
| 自测试卷四 .....          | (118) |
| 第三章 直线 .....         | (120) |
| 一、本章知识的重点与难点 .....   | (120) |
| 二、思维能力训练的重点与难点 ..... | (121) |

|                         |       |
|-------------------------|-------|
| (一)逻辑思维能力 .....         | (121) |
| (二)运算能力 .....           | (122) |
| (三)转化能力 .....           | (122) |
| 三、相关学法指导 .....          | (122) |
| 第一节 有向线段 定比分点 .....     | (123) |
| (一)练习题 .....            | (123) |
| (二)解题指导 .....           | (126) |
| 第二节 直线方程 .....          | (128) |
| (一)练习题 .....            | (128) |
| (二)解题指导 .....           | (132) |
| 第三节 两条直线的重合、平行与垂直 ..... | (135) |
| (一)练习题 .....            | (135) |
| (二)解题指导 .....           | (139) |
| 第四节 两条直线所成的角 .....      | (142) |
| (一)练习题 .....            | (142) |
| (二)解题指导 .....           | (143) |
| 第五节 点到直线的距离 .....       | (145) |
| (一)练习题 .....            | (145) |
| (二)解题指导 .....           | (147) |
| 自测试卷五 .....             | (150) |
| 第四章 圆锥曲线(上) .....       | (152) |
| 一、本章知识的重点与难点 .....      | (153) |
| 二、思维能力训练的重点与难点 .....    | (153) |
| (一)逻辑思维能力 .....         | (153) |

|                      |       |
|----------------------|-------|
| (二)数学语言的驾驭能力 .....   | (153) |
| 三、相关学法指导 .....       | (153) |
| 第一节 曲线和方程 .....      | (154) |
| (一)练习题 .....         | (154) |
| (二)解题指导 .....        | (156) |
| 第二节 充分条件和必要条件 .....  | (157) |
| (一)练习题 .....         | (157) |
| (二)解题指导 .....        | (158) |
| 第三节 圆的方程 .....       | (158) |
| (一)练习题 .....         | (158) |
| (二)解题指导 .....        | (160) |
| 第四节 圆与直线的位置关系 .....  | (162) |
| (一)练习题 .....         | (162) |
| (二)解题指导 .....        | (167) |
| 第五节 圆与圆的位置关系 .....   | (172) |
| (一)练习题 .....         | (172) |
| (二)解题指导 .....        | (174) |
| 自测试卷六 .....          | (175) |
| 第六节 椭圆方程 .....       | (176) |
| (一)练习题 .....         | (176) |
| (二)解题指导 .....        | (180) |
| 第七节 椭圆与直线的位置关系 ..... | (185) |
| (一)练习题 .....         | (185) |
| (二)解题指导 .....        | (186) |

|                       |       |
|-----------------------|-------|
| 期中综合预测试卷 .....        | (192) |
| 期末综合预测试卷 .....        | (196) |
| 自测试卷及综合预测试卷参考答案 ..... | (200) |

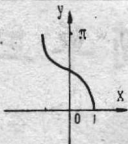
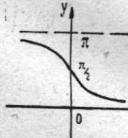
# 第一章 反三角函数和 简单三角方程

素质能力训练的内容与要求

## 一、本章知识的重点与难点

反三角函数的内容概要如下表：

|                   | 反正弦函数                                                                                                  | 反余弦函数                                                                           | 反正切函数                                                                                                                      | 反余切函数                                                                                                 |
|-------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 定义                | $y = \sin x \left( -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \right)$ 的反函数称为反正弦函数, 记作 $y = \arcsin x$ . | $y = \cos x \left( 0 \leq x \leq \pi \right)$ 的反函数称为反余弦函数, 记作 $y = \arccos x$ . | $y = \operatorname{tg} x \left( -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \right)$ 的反函数称为反正切函数, 记作 $y = \operatorname{arctg} x$ . | $y = \operatorname{ctg} x \left( 0 < x < \pi \right)$ 的反函数称为反余切函数, 记作 $y = \operatorname{arcctg} x$ . |
| 定义域               | $[-1, 1]$                                                                                              | $[-1, 1]$                                                                       | $(-\infty, +\infty)$                                                                                                       | $(-\infty, +\infty)$                                                                                  |
| 值域                | $\left[ -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$                                                         | $[0, \pi]$                                                                      | $\left( -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right)$                                                                             | $(0, \pi)$                                                                                            |
| 单调性               | 递增                                                                                                     | 递减                                                                              | 递增                                                                                                                         | 递减                                                                                                    |
| $x$ 与 $-x$ 函数间的关系 | $\arcsin(-x) = -\arcsin x$ .<br>$-1 \leq x \leq 1$<br>奇函数                                              | $\arccos(-x) = \arccos x + \pi$ .<br>$-1 \leq x \leq 1$<br>非奇非偶函数               | $\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x$ .<br>奇函数                                                              | $\operatorname{arcctg}(-x) = \operatorname{arcctg} x + \pi$ .<br>非奇非偶函数                               |

|           | 反正弦函数                                                                             | 反余弦函数                                                                             | 反正切函数                                                                             | 反余切函数                                                                             |
|-----------|-----------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|
| 互余的函数间的关系 | $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$ $(-1 \leq x \leq 1)$                      |                                                                                   | $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}$                |                                                                                   |
| 图 象       |  |  |  |  |

反三角函数的内容包括定义、性质、图象三部分。

四个反三角函数的定义是本单元的重点内容。这是由于反三角函数的性质、图象都需由定义导出，直接应用定义也是解决相关问题的重要方法。定义的理解和应用是难点。因为三角函数不是一一对应函数，它们都没有反函数。对于三角函数的定义域加以某些限制（如对于  $y = \sin x$  限定其定义域为  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ ）时，才能产生反函数。解题时极易忽略反三角函数的定义域和值域，也容易与相应的三角函数的定义域、值域相混淆。

反三角函数的性质是另一重点内容。其单调性与相对应的三角函数（注意是限定了定义域的）的单调性相同。反正弦函数与反正切函数是奇函数。另两个函数  $f(x)$  虽是非奇非偶函数，但  $f(x) + f(-x) = \pi$ 。

反三角函数的图象直观地给出了各种性质，是解决（或验证）相关问题的重要工具。

所有三角方程最终都将化为最简三角方程，因此后者是重点内容。解三角方程不可避免地用到各种三角恒等式，这就增加

了解题的综合性和灵活性,是个难点.

## 二、思维能力训练的重点与难点

### (一)思维的深刻性与全面性

反三角函数的自变量是相应的三角函数值,而函数值可看作一个角(必须用弧度制表示). 例如  $\arcsin 0.3$  应理解为:①它是一个角;②它是一个正弦值等于 0.3 的角;③它是一个正弦值等于 0.3 且在区间  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  内的角. 无疑,反三角函数是培养良好的思维品质的好教材.

### (二)等价转化的能力

等价转化是重要的数学思想,在数学活动中经常用到. 例如在判断  $a = \arctg(-2)$  与  $b = \text{arcctg}(-\frac{1}{2})$  的关系时,首先将二者用锐角表示:  $a = -\arctg 2, b = \pi - \text{arcctg} \frac{1}{2} = \pi - \arctg 2$ , 则可得  $b - a = \pi$ .

### (三)数形结合的能力

反三角函数的图象形象地表现出反三角函数的定义域、值域及各种性质,便于记忆,也可验证公式和习题的解. 例如在同一坐标系中画出  $y = \arcsin x$  与  $y = \arccos x$  的图象,易验证  $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2} (-1 \leq x \leq 1)$ .

### (四)灵活地解决综合问题的能力

解三角方程时,需灵活地运用各种公式. 不但应熟练地记忆公式,理解公式在形式上和实质上的特点,而且要会依具体问题选择恰当的公式和方法.

### 三、相关学法指导

(1)反三角函数问题常转化回相应的三角函数(特定的定义域)来解决,这正象对数函数的基本性质是转化回指数函数加以证明一样.例如求  $\sin[\arctg(-2)]$  的值时,可设  $\alpha = \arctg(-2)$ , 则  $\operatorname{tg} \alpha = -2$  且  $\alpha \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$ , 原题即为求  $\sin \alpha$ , 极易解决. 所有反三角函数的问题都可用此法解决,当然有时显得繁琐.

(2)由定义易得  $\sin(\arcsin x) = x (-1 \leq x \leq 1)$  和  $\arcsin(\sin x) = x (-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2})$ , 其它几个反三角函数也有类似的公式. 应用这些公式解题很方便.

(3)反三角函数的值域应给予充分重视. 许多问题可用三角函数的诱导公式将角化入反三角函数的值域加以解决. 例如  $\arcsin(\cos \frac{37\pi}{5}) = \arcsin(\cos \frac{7\pi}{5}) = \arcsin(-\cos \frac{2\pi}{5}) = -\arcsin(\cos \frac{2\pi}{5}) = -\arcsin[\sin(\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{5})] = -\arcsin(\sin \frac{\pi}{10}) = -\frac{\pi}{10}$ . 再如,求  $y = \cos x (-\pi \leq x \leq -\frac{\pi}{2})$  的反函数. 由于  $x + \frac{\pi}{2} \in [-\frac{\pi}{2}, 0] \subset [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ , 而  $y = \cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$ , 故  $x + \frac{\pi}{2} = \arcsin y, x = -\frac{\pi}{2} + \arcsin y$ . 反函数为  $y = -\frac{\pi}{2} + \arcsin x (-1 \leq x \leq 0)$ . 也可用如下解法: 由于  $x + \pi \in [0, \frac{\pi}{2}] \subset [0, \pi]$ , 而  $y = \cos x = -\cos(x + \pi), -y = \cos(x + \pi)$ , 故  $x + \pi = \arccos(-y), x = -\pi + \arccos(-y)$ . 反函数为  $y = -\pi + \arccos(-x) (-1 \leq x \leq 0)$ . 显然,两个结果相同.

(4)解三角方程产生增(减)根的原因,除了与代数方程相同

外,还有另外的原因. 例如解方程  $\operatorname{tg} 3x = \operatorname{tg} x$ , 应注意正切函数的定义域. 另外, 用某些三角恒等式(如万能公式)也可能产生增(减)根.

## 第一节 反正弦函数

### (一) 练习题

#### 练习题 A

##### 1. 选择题

(1) 下列函数中存在反函数的是( ).

(A)  $y = \sin x \quad x \in [0, 2\pi]$

(B)  $y = \sin x \quad x \in [-\pi, \pi]$

(C)  $y = \sin x \quad x \in [-\pi, 0]$

(D)  $y = \sin x \quad x \in \left[\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right]$

(2) 下列各式中成立的是( ).

(A)  $\arcsin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$

(B)  $\sin(\arcsin \sqrt{2}) = \sqrt{2}$

(C)  $\arcsin(\sin \frac{3\pi}{5}) = \frac{3\pi}{5}$

(D)  $\arcsin(\cos \frac{\pi}{3}) = \frac{\pi}{6}$

(3) 下列各式中成立的是( ).

(A)  $\frac{\pi}{6} < \arcsin 0.8 < \arcsin 1.2$

(B)  $\arcsin 0.7 < \frac{\pi}{3} < \arcsin(-0.8)$