Banach空间的凸性理论

黎永锦 著

科学出版社

Banach 空间的凸性理论

黎永锦 著

科学出版社
北京

内 容 简 介

本书对泛函分析的重要研究方向——Banach 空间的凸性理论作了比较全面的总结，内容基本覆盖了近八十年凸性方面的主要研究成果，介绍了 Banach 空间的严格凸和一致凸的很多推广，也有很多关于范数可微和 Banach 空间的光滑性方面的结果. 另外，对于光滑性很差的范数的性质，如粗范数，也作了较全面的介绍.

本书可供高等院校数学系高年级本科生和研究生学习泛函分析和研究 Banach 空间理论时参考.

图书在版编目(CIP)数据

Banach 空间的凸性理论/黎永锦著. —北京：科学出版社，2016.7
ISBN 978-7-03-049371-2

Ⅰ. ①B… Ⅱ. ①黎… Ⅲ. ①巴拿赫空间–研究 Ⅳ. ①O177.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2016) 第 160942 号

责任编辑：李 欣／责任校对：钟 洋
责任印制：张 伟／封面设计：陈 敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码: 100717
http://www.sciencep.com

北京中石油彩色印刷有限责任公司 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2016 年 7 月第 一 版 开本: 720 × 1000 1/16
2016 年 7 月第一次印刷 印张: 11
字数: 217 000

定价：68.00 元

前　言

法国作家、昆虫学家 Jean-Henri Casimir Fabre 说过: 如果科学肯放下架子让孩子们也感到亲切, 如果我们的大学军营考虑在死书本之外再增设活的野外学习, 如果官僚们颇有好感的教学大纲套索不把有志者的首创精神扼杀干净, 那么, 自然史就能将不知多少美好善良的东西印在孩子们的心灵中!

在二十多年的大学教学中, 我发现如果在本科阶段学习泛函分析的时候, 学生只看教材, 不阅读其他相关书籍和学术论文, 就会限制他们对所学学科的了解, 使其无法深刻理解该学科的重要思想和基本概念, 从而可能会使学生在开展数学研究的时候碰到困难, 也会降低他们的研究兴趣.

如何编写一些大学阶段可以用来扩展阅读的课外书是我长期思考的问题. 泛函分析是一门比较重要的课程, 它与数学分析、抽象代数和点集拓扑学有着密切的关系, 在概率论和微分方程等学科有着重要的应用, 因此, 一直很想写一本泛函分析的课外读物.

我的研究兴趣是泛函分析中的 Banach 空间理论, 因此, 我比较熟悉 Banach 空间的基本理论. Banach 空间的凸性理论具有非常好的几何直观意义, 只要读过本科阶段的泛函分析就可以阅读和理解, 甚至可以开展一些 Banach 空间理论的研究.

Banach 空间的严格凸是 Clarkson 在 1936 年开始研究的, 至今已经有八十年了. 凸性具有非常好的几何直观性, 因此引起了很多数学家的兴趣, 几十年来, 已经有几千篇关于凸性的论文发表. 严格凸利用 Banach 空间的闭单位球的端点来讨论空间的几何性质, 非常容易理解, 它在逼近论、不动点理论和最优化等都有广泛的应用. 本书主要收集和讨论了 Banach 空间的重要凸性, 一致凸空间是很强的凸性, 它有很多推广, 如局部一致凸和中点局部一致凸等. 而光滑性, 作为凸性的对偶性质, 得到了深入的研究. 另一方面, 光滑性与范数的可微性有着密切的联系. 因此, 它们的性质也得到了仔细的研究. 另外, 凸性很差的空间, 它们具有比较奇怪的性质, 会导致 Banach 空间的性质和结构有些特殊的性质, 因此, 凸性较差的平空间等性质也得到了细致的讨论. 范数的可微性很差的 Banach 空间, 引起很多数学家的注意, 他们利用粗范数和强粗范数的概念研究了这些空间的性质.

本书虽然是一本关于凸性的专著, 但它是作为一本课外读物来写作的, 为了方便读者阅读, 对于一些比较难的证明, 没有给出详细的步骤. 主要是讲清楚一些比较容易的证明, 让读者能够毫无困难地理解和掌握凸性比较简单的证明技巧, 为开展研究打好基础.

在本书中, 没有特别说明的赋范空间和 Banach 空间一般都是实的赋范空间和 Banach 空间, 有些定义或者定理中的 Banach 空间有时并不需要完备的条件, 只是尊重原来引入这些概念和定理的论文的写作习惯.

我要向帮助过我的学生表示衷心的感谢, 陈炯阳、张纪元等对本书的改进和校对做了很多的工作. 何炳等在校对时提出了很多很好的意见. 本书正是在他们的帮助下不断修改和完善的结果.

黎永锦
2016 年 6 月于中山大学

符 号 表

B_X	空间 X 中, 以 0 为球心、1 为半径的闭单位球
$B(x_0, r)$	以 x_0 为球心、r 为半径的闭球
C	复数全体
$C[a,b]$	$[a,b]$ 上的所有连续函数构成的空间
$C^n[a,b]$	$[a,b]$ 上的所有 n 阶连续可导函数构成的空间
$C(M)$	M 上的所有连续函数构成的空间
c_0	所有收敛到 0 的数列构成的空间
$\mathrm{co}\ \ C$	C 的凸包
$\overline{\mathrm{co}}\ \ C$	C 的闭凸包
$\dim\ \ X$	空间 X 的维数
$\mathrm{diam}\ \ C$	C 的直径, 即 $\sup\{\|x-y\| \mid x, y \in C\}$
$D(x)$	x 的支撑泛函全体
$D(f)$	满足 $f(x) = 1$ 的 $x \in S_X$ 全体
$d(x, E)$	点 x 到集合 E 的距离
$d(x, y)$	点 x 到点 y 的距离
E^0	集合 E 的内点全体
E^C	E 的补集, 余集
$E^\perp$	内积空间的子集 E 的正交补, 或者赋范空间的子空间 E 上取值为 0 的线性连续泛函全体
$E \perp F$	E 与 F 正交
$E + F$	E 与 F 的和
e_i	第 i 个单位向量
$\mathrm{ext}\ \ C$	C 的所有端点
$\|f\|$	线性泛函 f 的范数
Jx	J 为 X 到 X^{**} 的映射,$Jx(f) = f(x)$ 对任意 $f \in X^*$ 都成立
K	数域, 实数域或复数域
$\ker\ f$	线性泛函 f 的核, $\ker\ \ f = \{x \in X \mid f(x) = 0\}$
$L(X,Y)$	从 X 到 Y 的所有线性连续算子构成的空间
$L^p[a,b]$	$[a,b]$ 上所有 p 阶可积函数构成的 Lebesgue 空间
l_p	p 阶可和数列构成的序列空间

l_∞	所有有界数列构成的序列空间
$\overline{M}$	子集 M 的闭包
N	自然数全体
Q	有理数全体
R	实数全体
Re	复数的实部
S_X	空间 X 中, 以 0 为球心,1 为半径的单位球面
$S(f,\delta)$	线性连续泛函 f 关于 δ 的切片
$\mathrm{span}\ \ M$	M 生成的子空间
$\overline{\mathrm{span}}\ \ M$	M 生成的闭子空间
T^*	T 的共轭算子
U_X	空间 X 中, 以 0 为球心,1 为半径的开单位球
$\xrightarrow{w}$	弱收敛
$\xrightarrow{w^*}$	弱 * 收敛
X^*	X 的共轭空间
X^{**}	X 的二次共轭空间
$X^{(n)}$	X 的 n 次共轭空间
$X \times Y$	X 与 Y 的笛卡尔乘积
X/M	X 关于子空间 M 的商空间
$x \perp M$	x 与子集 M 正交
$x \perp y$	x 与 y 正交
(x,y)	x 与 y 的内积
$[x,y]$	x 与 y 的半内积
$X \backslash M$	$x \in X$ 并且 x 不属于 M
(x_i)	如 c_0 等序列空间的点, x_i 为点 $x = (x_i)$ 的第 i 个坐标
$\{x_n\}$	度量空间, 赋范空间或内积空间中的序列
$\delta_X(\varepsilon)$	赋范空间 X 的凸性模
$\rho_X(\tau)$	赋范空间 X 的光滑性模
$\tau(x,y)$	范数在 x 点以 y 为方向的 Gateaux 导数

目　　录

第 1 章　端点与严格凸

大学乃是为了两个目的而存在: 一方面, 为某些职业训练人才, 另一方面, 从事与眼前用途无关的学术研究.

Bertrand Russell (1872-1970, 英国哲学家、数学家)

赋范空间的严格凸是 Clarkson 在 1936 年引入的[4], Krein 和 Shmulyan 分别在 1938 年和 1939 年也讨论了严格凸性. Clarkson 开创了从 Banach 空间单位球的几何结构来研究 Banach 空间性质的方法. 凸性具有非常鲜明的几何直观意义, 因此凸性理论得到了深入的研究. 为了证明的简单明了, 在本章中, 没有特别说明的赋范空间都是指实赋范空间.

1.1　凸集与端点

凸集是线性空间的重要概念, 凸集具有很好的几何性质. 实数 R 中的闭区间 $[a,b]$ 和 R^2 中的圆以及 R^3 中的球都是凸集.

1.1.1　凸集的定义和性质

如果一个集合里面的任意两个点的连线都一定在该集合里面, 那么该集合就是凸集.

定义 1.1.1　设 C 为实线性空间 X 的子集, 若对于任意的 $x,y\in C$ 和 $\lambda\in[0,1]$, 都有 $\lambda x+(1-\lambda)y\in C$, 则称 C 为凸集 (convex set).

若 C 为实线性空间 X 的子集, 并对于任意的 $x,y\in C$, 都有 $\dfrac{x+y}{2}\in C$, 则称 C 为中点凸集 (midpoint convex set). 中点凸集不一定是凸集, 如在实数空间 R 中取 $C=\{x\in[0,1]\mid x\text{是有理数}\}$, 则容易知道 C 是中点凸集, 但对于任意无理数 $\lambda\in(0,1), x=0, y=1$ 时, $\lambda x+(1-\lambda)y$ 不属于 C, 因此 C 不是凸集. 不过, 不难证明, 若 X 是赋范空间, C 是闭集, 则 C 是中点凸集当且仅当 C 是凸集. 实际上, 对于任意 $x,y\in C,\lambda\in[0,1]$, 存在形如 $\lambda_n=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}c_i2^{-i}$ 的有理数 (这里 c_i 为 0 或 1), 使得 $\lambda_n\to\lambda$, 由 C 是中点凸集可知 $\lambda_nx+(1-\lambda_n)y\in C$, 再由 C 是闭集可知

$\lambda x+(1-\lambda)y\in C$, 所以 C 是凸集.

凸集有下面的一些等价条件:

性质 1.1.1　设 C 为线性空间 X 的子集, 则下列条件等价:

(1) C 是凸集.

(2) 对于任意的 $x_i\in C$ 和 $\lambda_i\in[0,1]$, $\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i=1$, 都有 $\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i x_i\in C$.

(3) 对于任意的 $\lambda_i\in[0,+\infty)$, 都有 $\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i C=\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i\right)C$.

性质 1.1.2　任意多个凸集的交集是凸集.

性质 1.1.3　若 C_1 和 C_2 为线性空间 X 的凸集, 则 C_1+C_2 也是凸集.

定义 1.1.2　设 C 为实线性空间 X 的子集, 称包含 C 的最小凸集为 C 的凸包 (convex hull), 记为 $\operatorname{co} C$.

容易知道, C 为凸集当且仅当 $C=\operatorname{co} C$.

1.1.2　Banach 空间中的凸集和端点

在 Banach 空间中, 凸集有着鲜明的几何特征和重要的性质.

定理 1.1.1　若 C 是 Banach 空间 X 的紧集, 则 C 的凸包 $\operatorname{co} C$ 也是紧集.

定理 1.1.2 (Banach-Mazur 定理)　若 C 是 Banach 空间 X 的凸集, 则 C 是弱闭的充要条件为 C 是范数闭的.

定理 1.1.3 (Mazur 定理)　若 C 是 Banach 空间 X 的紧集, 则 C 的闭凸包 $\overline{\operatorname{co}}\, C$ 也是紧集.

端点是 Minkowski 引进的, 他证明了如果 C 是 R^3 的紧凸子集, 则 C 的每个点 x 都可以写成 C 的端点的凸组合 $\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i x_i$, 这里 x_i 都是 C 的端点[25].

定义 1.1.3　设 C 为线性空间 X 的凸子集, $x\in C$, 若不存在 $y,z\in C, y\neq z$, 使得 $x=\dfrac{y+z}{2}$, 则称 x 为 C 的端点 (extreme point), C 的端点全体记为 $\operatorname{ext} C$.

例 1.1.1　线性空间 R^2 在范数 $\|x\|=|x_1|+|x_2|$ 下, 闭单位球为 $B_{R^2}=\{(x_1,x_2)\mid |x_1|+|x_2|\leqslant 1\}$, $(1,0),(-1,0),(0,1)$ 和 $(0,-1)$ 都是闭单位球 B_{R^2} 的端点, 并且它的端点的闭凸包就是闭单位球 B_{R^2}.

记 S_X 为赋范空间 X 的单位球面, B_X 为 X 的单位闭球. 对于 Banach 空间闭单位球的端点, 容易得到它的一些刻画.

定理 1.1.4 设 X 是 Banach 空间, $x \in S_X$, 则 x 是 B_X 的端点的充要条件为对任意的 $\|y\| = 1$, 满足 $\|x + y\| = 2$ 和 $\|2x - y\| = 1$ 时, 一定有 $x = y$.

证明 若 x 是闭单位球 B_X 的端点, 则对任意满足 $\|x+y\| = 2$ 和 $\|2x-y\| = 1$ 的 $\|y\| = 1$, 有 $x = \dfrac{y + (2x - y)}{2}$, 因此有 $y = 2x - y$, 所以 $x = y$.

反过来, 若单位球面上的点 $\|x\| = 1$, 对任意的 $\|y\| = 1$, 满足 $\|x + y\| = 2$ 和 $\|2x - y\| = 1$ 时, 一定有 $x = y$. 如果存在 $x_1, x_2 \in B_X$ 使得 $x = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$, 则记 $y = x_1$ 时, 有 $\|2x - y\| = \|x_2\| = 1$. 对于 $\|x\| = 1$, 存在 $f \in X^*, \|f\| = 1$, 满足 $f(x) = 1$, 因此 $f(x) = f(x_1) = 1$, 故 $\|x + x_1\| = \|x + y\| = 2$, 因此 $x = y$, 从而 $x = x_1 = x_2$, 所以 x 是闭单位球面 B_X 的端点. ■

从上面的证明可以看出, 下面的结论也是成立的.

定理 1.1.5 设 X 是 Banach 空间, $x \in S_X$, 则 x 是 B_X 的端点的充要条件为对任意的 $\|y\| \leqslant 1$, 满足 $\|2x - y\| = 1$ 时, 一定有 $x = y$.

容易知道, 下面也是单位球面上的点 $x \in S_X$ 是闭单位球 B_X 的端点的充要条件.

定理 1.1.6 设 X 是 Banach 空间, $x \in S_X$, 则 x 是 B_X 的端点的充要条件为对任意的 $\|y\| \leqslant 1$, 满足 $\|x + y\| = 1$ 和 $\|x - y\| = 1$ 时, 一定有 $y = 0$.

可以证明, 对于任意的有限维赋范空间 X, 有下面结论成立.

定理 1.1.7 设 C 为有限维赋范空间 X 的闭凸集, 则 C 一定有端点, 并且 C 是它的端点的闭凸包 (closure of the convex hull), 即 $C = \overline{\text{co}}\ (\text{ext}\ C)$.

对于局部凸空间, 有下面结论成立[16].

定理 1.1.8 (Krein-Milman 定理) 设 C 为局部凸空间 X 的紧凸集, 则 C 是它的端点的闭凸包.

为了证明该定理, 可先回顾面 (face) 的定义. 设 C 是实线性空间 X 的凸集, F 是 C 的子集, 若 $x, y \in C, \lambda \in (0, 1)$, 并且 $\lambda x + (1 - \lambda)y \in F$ 时, 一定有 $x, y \in F$, 则称 F 是一个面. 容易知道, C 的端点就是只含有一个点的面.

证明 (1) 先证明 C 一定有端点.

由于 C 的端点就是只含有一个点的面, 故要寻找极大面. 设 Γ 为 C 的真的面全体, 并且定义: 当 $F_1 \subseteq F_2$ 时, 有 $F_1 > F_2$, 则 Γ 是偏序集. 容易知道, 对于线形链 $\{F_\alpha\}_{\alpha \in I}$, 它一定有上界 $\bigcap\limits_{\alpha \in I} F_\alpha$. 因此由 Zorn 引理, 存在极大面 F_0. 假设 F_0 是一个极大面, 但 F_0 包含两个不同的点 x 和 y. 由于 X 是局部凸空间, 故存在线性连

续泛函 f, 使得 $f(x) \neq f(y)$. 既然 C 是紧集, 因此 $F_1 = \{x \in C \mid f(x) = \sup\limits_{z \in C} f(z)\}$ 非空. 因此容易验证 F_1 是 C 的一个面, 并且 x 和 y 不可能同时在 F_1 中, 但这与 F_0 是极大面矛盾, 因而 F_0 只能包含一个点 x_0, 所以 x_0 是 C 的端点.

(2) 下面再证明 $C = \overline{\mathrm{co}}\,(\mathrm{ext}\ C)$.

假设 $\overline{\mathrm{co}}\,(\mathrm{ext}\ C)$ 与 C 不相等, 则存在 $x_0 \in C$, 并且 $x_0 \in C \backslash \overline{\mathrm{co}}\,(\mathrm{ext}\ C)$.

由于 $\overline{\mathrm{co}}\,(\mathrm{ext}\ C)$ 是闭凸集, 故由分离定理, 存在 $f \in X^*$, 使得

$$f(x_0) > \sup_{y \in \overline{\mathrm{co}}\,(\mathrm{ext}\ C)} f(y).$$

令 $F = \{x \in C \mid f(x) = \sup\limits_{y \in C} f(y)\}$, 则由于 F 是一个紧凸集, 故 F 有端点 y_0, 并且由 F 是 C 的一个面容易证明 $y_0 \in \mathrm{ext}\ C$. 但 $F \bigcap \overline{\mathrm{co}}\,(\mathrm{ext}\ C) = \varnothing$, 矛盾. 所以, 一定有 $C = \overline{\mathrm{co}}\,(\mathrm{ext}\ C)$ 成立. ■

由上面定理, 若 X 是自反的 Banach 空间, B_X 是 X 的闭单位球, 则 B_X 是弱紧的, 从而 $B_X = \overline{\mathrm{co}}\,(\mathrm{ext}\ B_X)$. 但对于一般的 Banach 空间 X, $B_X = \overline{\mathrm{co}}\,(\mathrm{ext}\ B_X)$ 不一定成立.

定义 1.1.4 若 Banach 空间 X 的任意非空有界闭凸集 C 都一定有端点, 则称 Banach 空间 X 具有 Krein-Milman 性质 (Krein-Milman property).

容易知道, 自反的 Banach 空间具有 Krein-Milman 性质. c_0 和 l_∞ 都不具有 Krein-Milman 性质. Lindenstrauss 在 1966 年证明了 Banach 空间 X 具有 Krein-Milman 性质当且仅当 X 的任意非空有界闭凸集 C 都是它的端点的闭凸包, 他还证明了 l_1 具有 Krein-Milman 性质[17].

1.1.3 常见的 Banach 空间闭单位球的端点

比较令人感兴趣的是 Banach 空间的闭单位球是否有端点, 对于古典的 Banach 空间, 它的闭单位球是否有端点是很容易知道的.

例 1.1.2 $c_0 = \{(x_i) \mid x_i \in R, \lim\limits_{i \to \infty} x_i = 0\}$ 在范数 $\|x\| = \sup |x_i|$ 下是 Banach 空间, 它的闭单位球没有端点.

例 1.1.3 $l_\infty = \{(x_i) \mid x_i \in R, \sup |x_i| < \infty\}$ 在范数 $\|x\| = \sup |x_i|$ 下是 Banach 空间, $x \in l_\infty$ 是它的闭单位球的端点充要条件为对所有的 i, 都有 $|x_i| = 1$.

例 1.1.4 $l_1 = \{(x_i) \mid x_i \in R, \sum\limits_{i=1}^{\infty} |x_i| < \infty\}$, 在范数 $\|x\| = \sum\limits_{i=1}^{\infty} |x_i|$ 下是 Banach 空间, $x \in l_1$ 是它的闭单位球的端点充要条件为存在某个 i, 使得 $|x_i| = 1$.

例 1.1.5 $C[0,1]$ 为 $[0,1]$ 上的连续函数全体, 在范数 $\|x\|=\sup\limits_{t\in[0,1]}|x(t)|$ 下是 Banach 空间, $x\in C[0,1]$ 是它的闭单位球的端点充要条件为对于任意 $t\in[0,1]$, 都有 $|x(t)|=1$.

1.1.4 闭单位球的端点个数

问题 1.1.1 *一个 Banach 空间, 它的闭单位球最少有多少个端点呢?*

容易证明, c_0 的闭单位球没有端点.

问题 1.1.2 *一个有限维 Banach 空间, 它的闭单位球有多少个端点呢?*

容易知道, 在 R^2 中, 对于 $x=(x_1,x_2)$, 可以定义不同的范数, 如:

$$\|x\|_1=|x_1|+|x_2|,$$

$$\|x\|_2=\max\{|x_1|,|x_2|\},$$

则对于这两个范数, R^2 的闭单位球都有四个不同的端点.

命题 1.1.1 *R^2 在任意范数下, 闭单位球都至少有四个不同的端点.*

证明 由于 R^2 的闭单位球是紧集, 故一定含有端点. 设 x_0 是 R^2 闭单位球的一个端点, 则 $-x_0$ 也一定是 R^2 的闭单位球的一个端点. 假设 R^2 的闭单位球只有两个端点. 由 $B_{R^2}=\overline{\mathrm{co}}\,(\mathrm{ext}\,B_{R^2})$ 可知, 对于任意的 $y\in B_{R^2}$, 存在 $\lambda_n\in[0,1]$, 使得 $\lambda_n x_0+(1-\lambda_n)(-x_0)$ 收敛到 y, 因而存在 λ, 使得 $y=\lambda x_0$, 但这与 R^2 是二维线性空间矛盾, 从而 R^2 的闭单位球不止只有两个端点, 所以 R^2 在任意范数下, 它的闭单位球都至少有四个不同的端点. ■

设 X 是线性空间, C 是 X 的子集, 如果对于任意 $x\in X$, 都存在 $\lambda_0>0$, 使得对所有的 $|\lambda|\leqslant\lambda_0$, 都有 $\lambda x\in C$, 则称 C 是吸收集; 如果对所有的 $|\lambda|\leqslant 1$, 都有 $\lambda C\subseteq C$, 则称 C 是均衡的.

若 C 是 X 中的吸收集, $p(x)=\inf\{\lambda>0\mid x\in\lambda C\}$ 就称为 C 的 Minkowski 泛函.

若 C 是吸收均衡凸集, 并且对于任意 $x\neq 0$, 一定存在 $\lambda>0$, 使得 λx 不属于 C, 则不难证明 C 的 Minkowski 泛函是 X 的一个范数.

命题 1.1.2 *对于任意的 n, 存在等价范数 $\|\cdot\|_1$, 使得 R^2 在该范数下, 闭单位球有 2^n 个不同的端点.*

证明 取 C 为中心在原点的闭正 2^n 边形, 则 C 的 Minkowski 泛函是 R^2 的一个等价范数 $\|\cdot\|_1$, 容易知道在该范数下, 它的闭单位球就是 C, 并且有 2^n 个端点. ■

命题 1.1.3 *对于任意的 n, 存在等价范数 $\|\cdot\|_n$, 使得 c_0 在该范数下, 闭单位球有 $2n$ 个不同的端点.*

证明 只需定义 $\|x\|_n = |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n| + \sup\{|x_i| \mid i > n\}$, 则它的闭单位球 $B_{(X,\|\cdot\|_n)}$ 有 $2n$ 个端点. 明显地, 这些端点为 $x = (x_i)$, 有某个 $i \leqslant n$ 使得 $|x_i| = 1$, 并且 $x_i = 0$ 对其他的 i 都成立. ■

无穷维的自反 Banach 空间 X 的闭单位球一定有不可数个端点. Lindenstrauss 和 Phelps 在 1968 年证明了下面的结果[19].

定理 1.1.9 (Lindenstrauss-Phelps 定理) *若 X 是无穷维的自反 Banach 空间, 则 X 的闭单位球 B_X 的端点 ext B_X 一定是不可数的.*

证明 反证法. 假设 B_X 的端点是可数的, 则存在可数个 $x_n \in S_X$, 使得 ext $B_X = \{x_n\}$. 对于每个 n, 令

$$F_n = \{f \in X^* \mid \|f\| \leqslant 1, |f(x_n)| = \|f\|\}.$$

由于 X^* 的范数是下半连续的, 故 F_n 是弱闭的. 由 X 是自反 Banach 空间和 Krein-Milman 定理可知 X^* 的闭单位球 B_{X^*} 是弱紧的. 并且 $B_{X^*} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n$. 由 Baire 纲定理可知 F_n 最少有一个含有相对 B_{X^*} 的弱拓扑下的内点. 不失一般性, 可设其为 F_1. 取 F_1 的弱拓扑下的内点 f_0, 不失一般性, 可以假设 $\|f_0\| < 1$, 则存在 $y_1, y_2, \cdots, y_n \in X$, 使得对于任意的满足

$$\|f\| \leqslant 1, \quad |(f - f_0)(y_i)| < 1, \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

的 f, 都有 $f \in F_1$.

令 $N = \{f \in X^* \mid f(y_i) = f_0(y_i), i = 1, 2, \cdots, n,$ 并且 $f(x_1) = f_0(x_1)\}$. 既然 X 是无穷维的, 因此 $f_0 \in N, N$ 是 X^* 的弱闭仿射子空间, 并且它在 X^* 中具有有限补维, 故存在 $g \in N, \|g\| = 1$. 由于 $g \in N$, 故 $g \in F_1$. 因此 $1 = \|g\| = |g(x_1)| = |f_0(x_1)| = \|f_0\|$, 矛盾, 由反证法原理可知定理成立. ■

根据上面的结论, 考虑下面问题是自然的.

问题 1.1.3 *若 X 是无穷维的 Banach 空间, X 的闭单位球 B_X 的端点 ext B_X 是不可数的, 那么 Banach 空间 X 一定是自反的吗?*

例 1.1.6 对于 l_∞ 的闭单位球有不可数个端点, 但它不是自反的.

闭单位球 B_X 有不可数个端点与 Banach 空间 X 的单位球面 S_X 上的每个点都是端点是否还有差异?

问题 1.1.4 *若 X 是无穷维的 Banach 空间, X 的闭单位球 B_X 的端点 ext B_X 是不可数的, 那么 Banach 空间 X 的单位球面 S_X 上的每个点都一定是端点吗?*

例 1.1.7 对于 $1 < p < \infty$, $l_p = \{(x_i) \mid x_i \in R, \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p < \infty\}$ 在范数 $\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ 下是一个自反的 Banach 空间, 若定义范数 $\|x\|_1 = \max(3\|x_1\|, \|x\|)$, 则

$$\|x\| \leqslant \|x\|_1 \leqslant 3\|x\|.$$

故 $\|\cdot\|$ 与 $\|\cdot\|_1$ 等价, 并且容易知道 $x = \left(\frac{1}{3}, 0, 0, \cdots, 0, \cdots\right)$ 不是它的闭单位球的端点, 但它的闭单位球有不可数个端点.

推论 1.1.1 (Lindenstrauss-Phelps 定理) *若 X 是无穷维的自反 Banach 空间, C 是 X 的有界闭凸集, 并且 C 有内点, 则 C 的端点一定是不可数的.*

有趣的是, 若凸集 C 的端点是可数的, 则还有下面的结论成立[19].

定理 1.1.10 *若 C 是局部凸空间 X 的紧凸集, 并且 C 的端点是可数的, 则 C 是可度量化的.*

1.1.5 不同范数下闭单位球的端点个数不同

实际上, 容易理解, 对于线性空间 X 的不同范数, 它的闭单位球的端点个数是不同的. 如 R^2 在范数 $\|x\|_1 = |x_1| + |x_2|$ 下, 它的闭单位球只有四个不同的端点. 在范数 $\|x\|_2 = (|x_1|^2 + |x_2|^2)^{\frac{1}{2}}$ 下, 它的闭单位球有无穷多个端点.

定理 1.1.11 *若 Banach 空间 X 具有 Krein-Milman 性质, 则对 X 的任意等价范数 $\|\cdot\|_1$, 其闭单位球 $B_{(X,\|\cdot\|_1)}$ 一定有端点.*

明显地, 这是由于对于 X 的任意等价范数 $\|\cdot\|_1$, 其闭单位球 $B_{(X,\|\cdot\|_1)}$ 一定是 $(X, \|\cdot\|)$ 的闭凸集, 所以它一定有端点.

对于一般的实 Banach 空间 X, 我们有如下的结论成立, 该结果和证明技巧来源于 [21].

定理 1.1.12 *若 X 是实 Banach 空间, 则存在 X 的等价范数 $\|\cdot\|_1$, 使得闭单位球 $B_{(X,\|\cdot\|_1)}$ 一定有端点.*

证明 若 X 是有限维的实 Banach 空间, 则它的闭单位球是紧的, 因此一定有端点.

若 X 的维数是无限的, 则一定存在 $x_0 \in X, \|x_0\| = 1$, 根据 Hahn-Banach 定理, 存在 $f_0 \in X^*, \|f_0\| = 1$, 使得 $f_0(x_0) = 1$. 令 $M = \{x \mid f_0(x) = 0\}$, 则对于任意 $x \in X$, 存在 $y \in M, \lambda \in R$, 使得 $x = y + \lambda x_0$, 并且表示是唯一的.

定义 $\|x\|_1 = \|y\| + |\lambda|$, 则 $\|\cdot\|_1$ 是 X 的一个等价范数.(实际上, 由于 $\|x\| =$

$\|y+\lambda x_0\| \leqslant \|y\|+\|\lambda x_0\| = \|x\|_1$, 故 $\|\cdot\|_1$ 比范数 $\|\cdot\|$ 要强. 另外, 若 u_n 依范数 $\|\cdot\|$ 收敛于 u_0, 则 $u_n = y_n + \lambda_n x_0$ 收敛到 $u_0 = y_0 + \lambda_0 x_0$. 从而 $f_0(u_n) = f_0(y_n) + \lambda_n f_0(x_0)$ 收敛到 $f_0(u_0) = f_0(y_0) + \lambda_0 f_0(x_0)$, 故 $\lambda_n \to \lambda_0$. 因此 $y_n \to y_0$. 因而 u_n 依范数 $\|\cdot\|_1$ 收敛到 u_0, 所以, 范数 $\|\cdot\|_1$ 与范数 $\|\cdot\|$ 等价.)

容易证明, x_0 是闭单位球 $B_{(X,\|\cdot\|_1)}$ 的端点. ■

由上面两个定理可知, 一个凸性较好的 Banach 空间, 可以对于任意等价范数, 它的闭单位球都有端点. 不过, 凸性再差的实 Banach 空间, 也不可能对于所有的等价范数, 它的闭单位球都没有端点.

例 1.1.8 c_0 在范数 $\|x\| = \sup|x_i|$ 下, 它的闭单位球没有端点, 若定义 $\|x\|_1 = |x_1| + \sup\{|x_i| \mid i > 1\}$, 则 $x_0 = (1, 0, \cdots, 0, \cdots)$ 是 $(c_0, \|\cdot\|_1)$ 的闭单位球的端点.

下面的问题可能是有意义的.

问题 1.1.5 若 X 是不含 c_0 的 Banach 空间, 则 X 的任意等价范数 $\|\cdot\|_1$, 其闭单位球 $B_{(X,\|\cdot\|_1)}$ 一定有端点吗?

1.1.6 线性算子对端点的保持问题

如果 X 和 Y 都是 Banach 空间, T 是 X 到 Y 的线性有界算子, C 是 X 的有界闭凸集, 那么当 x 是 C 的端点时, Tx 是否一定是 $T(C)$ 的端点呢? Wu Congxin 和 Li Yongjin 考虑了这个问题[33].

引理 1.1.1 设 C 是 Banach 空间 X 的有界闭凸集, T 是 X 到 Banach 空间 Y 的线性有界算子, 则对于 $T(C)$ 的端点 y, $x \in T^{-1}(y)$ 并且 $x \in \mathrm{ext}\, C$ 的充要条件是 $x \in \mathrm{ext}\,(T^{-1}(y)\bigcap C)$.

证明 若 $x \in \mathrm{ext}\,(T^{-1}(y)\bigcap C), x_1, x_2 \in C, x = \dfrac{x_1+x_2}{2}$, 则 $y = Tx = \dfrac{Tx_1+Tx_2}{2}$. 既然 y 是 $T(C)$ 的端点, 因而 $Tx = Tx_1 = Tx_2$, 因此 $x_1, x_2 \in T^{-1}(y)\bigcap C$, 由 $x \in \mathrm{ext}\,(T^{-1}(y)\bigcap C)$ 可知 $x = x_1 = x_2$, 故 $x \in \mathrm{ext}\, C$.

反过来, 若 $x \in \mathrm{ext}\, C$, 则明显地 $x \in \mathrm{ext}\,(T^{-1}(y)\bigcap C)$ 成立. ■

定理 1.1.13 设 C 是 Banach 空间 X 的有界闭凸集, X 具有 Krein-Milman 性质, T 是 X 到 Banach 空间 Y 的线性有界算子, 则对于 $T(C)$ 的任意端点 y, 都存在 $x \in \mathrm{ext}\, C$, 使得 $Tx = y$.

证明 对于任意的 $y \in \mathrm{ext}\, T(C)$, 由于 T 是线性有界算子, 故 $T^{-1}(y)\bigcap C$ 是有界闭凸集. 由 X 具有 Krein-Milman 性质可知存在 $x \in \mathrm{ext}\,(T^{-1}(y)\bigcap C)$. 根据上面引理可得 $x \in \mathrm{ext}\, C$, 并且明显地满足 $Tx = y$. ■

从上面定理的证明可以看出, 如果 C 是 Banach 空间 X 的紧凸集, T 是 X