$$\frac{\partial u}{\partial t}-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f(x,t)$$

偏微分方程

的可解性研究

金启胜 著

$$-\Delta u=f(x)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f(x,t)$$

吉林大学出版社

偏微分方程的可解性研究

金启胜 著

吉林大学出版社

内容提要

本书利用不动点定理、拓扑度理论、隐函数定理、变分法等理论，研究了偏微分方程的可解性问题。第 1 章研究了一类半线性椭圆型方程、一类拟线性椭圆型方程、一类线性椭圆型方程及一类非线性椭圆型方程的可解性问题；第 2 章研究了一维波动方程、热传导方程的分离变量问题；第 3 章研究了一维波动方程、热传导方程的 Fourier 变换问题；第 4 章研究了一维波动方程、热传导方程的 Laplace 变换问题；第 5 章研究了位势方程的可解性问题。

本书读者对象是高等学校的在校生、本科生以及高等学校的数学教师，亦可供从事自然科学研究的科技工作者参考。

图书在版编目(CIP)数据

偏微分方程的可解性研究 / 金启胜著. —长春：吉林大学出版社，2015.5

ISBN 978-7-5677-3722-8

Ⅰ.①偏…　Ⅱ.①金…　Ⅲ.①偏微分方程—可解性—研究　Ⅳ.①O175.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 111754 号

书　名：偏微分方程的可解性研究

作　者：金启胜　著

责任编辑、责任校对：王瑞金　　封面设计：右序设计

吉林大学出版社出版、发行　　绍兴虎彩激光材料科技有限公司　印刷

开本：710×1000 毫米　1/16　　2015 年 6 月　第 1 版

印张：7.25　字数：140 千字　　2015 年 6 月　第 1 次印刷

ISBN 978-7-5677-3722-8　　定价：28.00 元

社址：长春市明德路 501 号　邮编：130021

发行部电话：0431—89580028/29

网址：http://www.jlup.com.cn

E-mail：jlup@mail.jlu.edu.cn

前　　言

偏微分方程的兴起已经有两百多年的历史了。它起初研究直接来源于物理学和几何学的问题，后来发展到一门独立的数学分支。从物理学、力学、生物学、几何学、化学等学科中所产生的偏微分方程(有时也包括积分方程、微分积分方程等)反映了有关的未知量关于时间的导数和关于空间变量的导数之间的制约关系。连续介质力学、电磁学、量子力学等方面的基本方程都属于偏微分方程的范围。

微积分产生以后，人们就开始把力学中的一些问题，归结为偏微分方程进行研究。早在18世纪初，人们已将弦线振动问题归结为弦振动方程，并探讨它的解法。随后，人们又陆续了解了流体的运动、弹性体的平衡和振动、热传导、电磁相互作用、原子核和电子的相互作用、化学反应过程等自然现象的基本规律，把它们写成偏微分方程的形式，并且求出了典型问题的解。同时通过实践，验证了这些基本规律的正确性，且充分显示了偏微分方程对于认识自然界基本规律的重要性。

有了这些基本规律，人们还要利用这些基本规律来研究复杂的自然现象和解决复杂的工程技术问题，这就需要给出数学物理方程中的许多待定问题的解答。

在研究偏微分方程的同时，人们对偏微分方程的性质也了解得越来越多，越来越深入，形成了数学中的一门重要的分支——偏微分方程理论。它既有悠久的历史，又不断地更新着它的研究对象、内容和方法；它直接联系着众多的自然现象和实际问题，不断地提出或产生需要解决的新课题和新方法。它所面临的数学问题多样而复杂，不断地促进着许多相关数学分支(如泛函分析、复变函数、微分几何、计算数学等)的发展，并从它们之中引进许多有力的解决问题的工具。

目前，研究偏微分方程的可解性的主要方法有不动点定理，上、下解方法(单调性方法)，拓扑度理论，隐函数定理，变分法，椭圆正则化方法和紧微法等方法。在不动点理论中，最早的结果是Brouwer不动点定理，即E_n的闭单位球到自身的连续映射有不动点，这个结果是1910年发

表的。1922 年 J. W. Alexamder 将该定理扩张到更一般的情况，即在空间 $L^2[0,1]$ 和 $L^n[0,1]$ 中任意紧凸集上的到自身的连续映射有不动点。

1930 年，J. Schauder 又进一步扩张了该定理，即 Banach 空间中映凸紧集到自身的连续映射有不动点。随后不动点理论通过 M. Krein，V. Smulian，G. Darbo，Sadovski 等人的工作得到不断发展，并成为研究偏微分方程与方程组可解性的一种重要理论和方法。

1972 年，D. H. Sattinger 在他的著名论文中使用上、下解方法研究了偏微分方程解的存在性问题。随后有大量数学工作者利用这种方法研究非线性偏微分方程解的存在性和唯一性问题。目前这种方法已成为非线性偏微分方程理论研究中一种重要的方法之一。

拓扑度理论是由 L. E. J. Brouwer 在 1912 年创立的。不过，他所建立的拓扑度只是针对有限维空间中的连续映射，现在称之为 Brouwer 度。后来，随着线性泛函分析理论体系的形成，到 1934 年，J. Leray 和 J. Schauder将 Brouwer 的工作推广到 Banach 空间中的全连续场，从而使拓扑度理论在偏微分方程的研究中发挥了重要的作用。

隐函数理论和变分法理论是随着 17 世纪微积分的产生而出现的解决偏微分方程问题的重要方法。很多数学研究工作者运用这些理论和方法研究偏微分方程的边值问题。

本书利用上述理论和方法研究了一类椭圆型方程的可解性（第 1 章，第 5 章），同时利用分离变量法、积分变换法对一维波动方程和热传导方程的定解问题进行了详细探讨（第 2 章，第 3 章，第 4 章）。

第 1 章利用不动点理论，上、下解方法以及变分原理等方法，研究了椭圆型方程的可解性。第 2 章阐述运用分离变量法求解一维波动方程、热传导方程时要注意的问题，并用上、下解极值原理研究了热传导方程的初边值问题。第 3 章运用 Fourier 变换法讨论了一维波动方程、热传导方程的初边值问题解法以及注意要点。第 4 章运用 Laplace 变换法讨论了一维波动方程、热传导方程的初边值问题解法以及注意要点。另外，第 3 章和第 4 章在叙述积分变换时也分析了常微分方程、积分方程的积分变换解法。第 5 章研究了位势方程（包括 Poisson 方程和 Laplace 方程）的可解性。

本书在写作过程中，得到安庆师范学院数学与计算科学学院钟金标教授和安徽大学数学科学学院周宗福教授的关心指导，他们是笔者的大学老师。同时也参考了国内外的一些科技文献和研究成果；本书在出版

过程中，得到安庆职业技术学院副院长谭维奇教授的鼎力支持；本书的出版得到安徽省教育厅项目“高职数学精品资源共享课程”（项目编号：2013gxk132）、“安庆职业技术学院开展专科类数学建模竞赛的研究”（项目编号：2013jyxm375）、“微分方程在高职数学建模中的创新型应用研究”的项目经费资助；也是“高职数学精品资源共享课程”、“微分方程在高职数学建模中的创新型应用研究”的研究成果之一。另外，安庆职业技术学院数学教研室的专家对笔者的科研工作给予了热心帮助。在此一并表示衷心的感谢！

由于作者学术水平、科研能力有限，书中就偏微分方程的可解性研究难免有不妥，或不详尽之处，衷心期望数学专家、数学同行以及读者不吝赐教，批评斧正。

金启胜

2015 年 3 月

目　　录

第 1 章　椭圆型方程的可解性研究 ……………………………… (1)

第 1 节　一类半线性椭圆型方程边值问题的可解性 ……………… (3)

参考文献 ……………………………………………………………… (6)

第 2 节　一类半线性椭圆型方程的可解性 ………………………… (7)

参考文献 ……………………………………………………………… (9)

第 3 节　一类半线性椭圆型方程在有界洞型区域内的非负解 …… (10)

参考文献 ……………………………………………………………… (11)

第 4 节　一类半线性椭圆型方程在有界洞型区域内的正解 ……… (12)

参考文献 ……………………………………………………………… (14)

第 5 节　一类拟线性椭圆型方程边值问题的可解性 ……………… (16)

参考文献 ……………………………………………………………… (19)

第 6 节　一类拟线性椭圆型方程的可解性 ………………………… (20)

参考文献 ……………………………………………………………… (23)

第 7 节　一类线性椭圆型方程的爆破解 …………………………… (24)

参考文献 ……………………………………………………………… (27)

第 8 节　一类线性椭圆型方程的弱解 ……………………………… (28)

参考文献 ……………………………………………………………… (30)

第 9 节　一类非线性椭圆型方程的可解性 ………………………… (31)

参考文献 ……………………………………………………………… (34)

第 2 章　一维波动方程和热传导方程的分离变量法 ……………… (35)

第 1 节　特征值与特征函数 ………………………………………… (37)

第 2 节　分离变量法求一维波动方程和热传导方程定解问题的要点总结 ……………………………………………………………… (41)

第 3 节　热传导方程初边值问题的可解性 ………………………… (45)

第 4 节　分离变量法与 Sturme-Liouville 问题 …………………… (47)

参考文献 ……………………………………………………………… (51)

练 习 题 ……………………………………………………………… (52)

第 3 章　一维波动方程和热传导方程的 Fourier 变换 …………… (53)

第 1 节　Fourier 变换及性质 …………………………………………… (54)
第 2 节　利用 Fourier 变换求一维波动方程和热传导方程的定解问题 …………………………………………… (58)
第 3 节　利用 Fourier 变换求解微分积分方程 …………………………… (61)
第 4 节　偏微分方程与常微分方程组之间的关系 ………………………… (63)
参考文献 …………………………………………………………… (65)
练 习 题 …………………………………………………………… (66)
第 4 章　一维波动方程和热传导方程的 Laplace 变换 ………………… (67)
第 1 节　Laplace 变换及性质 ……………………………………………… (68)
第 2 节　利用 Laplace 变换求一维波动方程和热传导方程的定解问题 …………………………………………… (73)
第 3 节　利用 Laplace 变换求解微分积分方程 …………………………… (76)
第 4 节　偏微分方程与常微分方程组之间的关系推广 …………………… (78)
参考文献 …………………………………………………………… (79)
练 习 题 …………………………………………………………… (80)
第 5 章　位势方程的可解性研究 ……………………………………… (82)
第 1 节　调和方程的 Dirichlet 问题 ……………………………………… (85)
第 2 节　自共轭方程的弱解 ………………………………………………… (87)
第 3 节　算子方程边值问题的可解性 ……………………………………… (89)
第 4 节　双调和方程边值问题的可解性 …………………………………… (92)
第 5 节　Poisson 方程的边值问题 ………………………………………… (94)
参考文献 …………………………………………………………… (95)
附录Ⅰ　Fourier 变换简表 ……………………………………………… (96)
附录Ⅱ　Laplace 变换简表 ……………………………………………… (99)
附录Ⅲ　第 2 章练习题参考答案 ……………………………………… (103)
附录Ⅳ　第 3 章练习题参考答案 ……………………………………… (104)
附录Ⅴ　第 4 章练习题参考答案 ……………………………………… (105)

第 1 章　椭圆型方程的可解性研究

椭圆型方程的可解性研究的内容包括 9 个部分.

第 1 节主要利用不动点定理探讨半线性椭圆型方程

$$\begin{cases}-\Delta u=a(x)u+f(x,u),x\in\Omega\\ u=0,x\in\partial\Omega\end{cases}\tag{1.1}$$

的可解性,其中,$\Omega\subset\mathbf{R}^n$ 为有界光滑域,$a(x)\in C(\overline{\Omega})$,且 $a(x)\geqslant0$,$f(x,u)$关于各变元连续.假设存在常数 $c>0$,使得 $0\leqslant f(x,u)\leqslant c$,$\forall\,(x,u)\in\Omega\times\mathbf{R}$.

给出了方程(1.1)解存在、唯一的充分条件.

第 2 节讨论一类半线性椭圆型方程的边值问题:

$$\begin{cases}-\Delta u=\lambda u+f(u),u>0,x\in\Omega\\ u>0,x\in\Omega\\ u=0,x\in\partial\Omega\end{cases},\tag{1.2}$$

其中,$\Omega\subset\mathbf{R}^n(n\geqslant1)$是一个有界光滑域,参数 $\lambda>0$.

函数 $f(u)$满足下列条件:

(1)$f:\mathbf{R}^+\to\mathbf{R}^+$ 连续;

(2)$f(0)>0$;

(3)$\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{f(t)}{t}=0$;

(4)$\dfrac{f(t)}{t}$在$(0,+\infty)$上单调递减.

第 3 节考察半线性椭圆型方程在有界洞型区域内的边值问题:

$$\begin{cases}-\Delta u=f(x,u),x\in\Omega\\ u=0,x\in\Gamma_1\\ u=b,x\in\Gamma_2\end{cases},\tag{1.3}$$

其中,Γ_1,Γ_2 分别是 Ω 的外、内边界,b 是正常数.研究了方程(1.3)解的非负性、有界性.

第 4 节考察一类半线性椭圆型方程的边值问题:

$$\begin{cases}-\Delta u=\lambda_1u+\lambda_2f(u),x\in\Omega\\ u>0,x\in\Gamma_1\\ u=b,x\in\Gamma_2\end{cases}.\tag{1.4}$$

函数 $f(u)$满足下列条件:

(1) $f:\mathbf{R}^+\to\mathbf{R}^+$ 连续，且 $f(0)=0$；

(2) $f(t)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单增；

(3) $\dfrac{f(t)}{t}$ 在 $[0,+\infty)$ 上单减.

第 5 节考察一类拟线性椭圆型方程

$$\begin{cases}\Delta u+\lambda u+h(u,Du)Du=f(x),x\in\Omega\\ u=0,x\in\partial\Omega\end{cases}\tag{1.5}$$

的可解性. 其中，$\Omega\subset\mathbf{R}^n$ 是一个有界光滑域，λ 是一个实常数，Du 是 u 的梯度.

第 6 节研究一类拟线性椭圆型方程的可解性：

$$\operatorname{div}(|Du|^{p-2}Du)=f(|x|,u,|Du|),p>1,(t,u,v)\in[0,\infty)\times[0,\infty),f\geqslant 0.\tag{1.6}$$

第 7 节研究一类线性椭圆型方程

$$\Delta u=f(x)\tag{1.7}$$

爆破解和整体爆破解的存在性问题.

第 8 节研究一类线性椭圆型方程

$$-\Delta u+u=f,x\in\Omega,\frac{\partial u}{\partial n}=0\tag{1.8}$$

弱解的存在性和唯一性问题.

第 9 节研究一类非线性椭圆型方程

$$\Delta u=f(|x|,u,|Du|)\tag{1.9}$$

的可解性，其中，$x\in\mathbf{R}^n$，f 连续.

第1节 一类半线性椭圆型方程边值问题的可解性

1.1 引言

最近几年,在生物学、生态学、燃烧理论、人口动态方面出现的很多现象能够用半线性椭圆型方程描述,出现了大量的对拟线性椭圆型方程(组)特别是非线性的具有一定奇异的椭圆型方程(组)的(弱)解的存在性与不存在性、唯一性、多解性、正则性、部分正则性以及解的其他性态的研究,因而引起许多数学工作者对这类问题极大的研究兴趣.

如在文献[1]中讨论了问题$\begin{cases}-\Delta u=\lambda f(u),x\in\Omega\\u=0,x\in\partial\Omega\end{cases}$正解的存在性与不存在性.在文献[2]中研究了问题$\begin{cases}\Delta u+\lambda u+h(u,Du)Du=f(x),x\in\Omega\\u=0,x\in\partial\Omega\end{cases}$解的存在性.

结合上述文献研究,本节利用不动点理论探讨半线性椭圆方程

$$\begin{cases}-\Delta u=a(x)u+f(x,u),x\in\Omega\\u=0,x\in\partial\Omega\end{cases}\tag{1.1.1}$$

的可解性,其中 $\Omega\subset\mathbf{R}^n$ 为有界光滑域,$a(x)\in C(\overline{\Omega})$,且 $a(x)\geqslant0$,$f(x,u)$关于各变元连续.假设存在常数 $c>0$,使得 $0\leqslant f(x,u)\leqslant c$, $\forall\,(x,u)\in\Omega\times\mathbf{R}$.

1.2 主要结果及证明

引理 1(不动点定理) 设 X 是一个 Banach 空间,B 是 X 的一个闭凸子集,若 T 是 B 到 B 的一个映射,R 为一个正常数,使得满足 $\|u\|=\mathbf{R}$ 的任意 $u\in B$,有 $u\neq tT(u)$,$0\leqslant t\leqslant1$,则 T 有一个不动点 $u\in C$,且 $\|u\|\leqslant\mathbf{R}$.

定理 1 若 $\|a(x)\|\triangleq\max\limits_{x\in\Omega}|a(x)|<\lambda_1$,则方程边值问题

$$\begin{cases}-\Delta u=ta(x)u,x\in\Omega,t\in[0,1]\\u=0,x\in\partial\Omega\end{cases}.$$

只有零解.其中 λ_1 为 Dirichlet 条件下 $-\Delta$ 算子在 Ω 里的第一特征值.

证明: 在方程两边乘上 u 后在 Ω 上积分,并利用格林第一公式推出 $\int_\Omega|Du|^2\mathrm{d}x=t\int_\Omega a(x)u^2\mathrm{d}x$.

利用 Poincare 不等式得

$$\int_\Omega|Du|^2\mathrm{d}x\leqslant t|a(x)|\int_\Omega u^2\mathrm{d}x\leqslant\frac{|a(x)|}{\lambda_1}\int_\Omega|Du|^2\mathrm{d}x.$$

因为 $|a(x)|<\lambda_1$，从上式得 $\int_\Omega |Du|^2 \mathrm{d}x=0$，

于是 $Du=0, x\in\Omega$，结合 $u|_{\partial\Omega}=0$. 所以 $u\equiv 0, x\in\Omega$.

定理 2 若 $\|a(x)\|\leqslant\lambda_1$，则问题(1.1.1)存在一个有界正解.

证明：设 $X=C(\overline{\Omega})$，X 中所有非负，且在 $\partial\Omega$ 上为零的函数构成正锥 B，且 B 为 X 的闭凸集.

作算子 $T:B\to B$，使得 $u\in B$，$Tu=L^{-1}a(x)u+L^{-1}f(x,u)$，这里 $L^{-1}=(-\Delta)^{-1}$ 为紧正算子.

从而 $T:B\to B$ 为紧正算子.

再证 T 满足引理 1 的条件. 采用反证法证明：

若 T 不满足引理 1 的条件，则存在 $\{t_n\}\subset[0,1]$，$u_n\subset B$，$\|u_n\|\to+\infty(n\to+\infty)$，使得

$$u_n=t_nT(u_n)=t_nL^{-1}a(x)u_n+t_nL^{-1}f(x,u_n). \tag{1.1.2}$$

显然 L^{-1}，$L^{-1}a(x)$ 为线性算子，取 $\omega_n=\dfrac{u_n}{\|u_n\|}$，

由式(1.1.2)得：

$$\omega_n=t_nL^{-1}a(x)\omega_n+t_nL^{-1}\frac{f(x,u_n)}{\|u_n\|}. \tag{1.1.3}$$

因为 $0\leqslant f(x,u_n)\leqslant C$，所以 $\dfrac{f(x,u_n)}{\|u_n\|}\to 0(n\to\infty)$.

又 $L^{-1}a(x)$ 为紧正线性算子，且 $\|\omega_n\|=1$，

所以 $\{L^{-1}a(x)\omega_n\}$ 为列紧集，必要的话通过取子列，可得 $t_n\to t_0\in[0,1]$，$L^{-1}a(x)\omega_n$ 收敛.

所以 $\omega_n\to\omega_0\in B$，且 $\omega_0=1$.

对式(1.1.3)两边取极限得 $\omega_0=t_0L^{-1}a(x)\omega_0$，

由定理 2 得 $\omega_0\equiv 0$，这与 $\|\omega_0\|=1$ 矛盾.

所以 T 满足引理 1 的条件，于是 T 有一个不动点 $u\in B$，且 $\|u\|\leqslant R$，R 为正常数，即 $u=L^{-1}a(x)u+L^{-1}f(x,u)$.

从而 u 为问题(1.1.1)的解，且解有界.

定理 3 若 $\|a(x)\|<\lambda_1$，且 $f(x,u)$ 关于 u 单调递减，则问题(1.1.1)的解唯一.

证明：设 u_1, u_2 为问题(1.1.1)的解，则有

$$\begin{cases}-\Delta u_1=a(x)u_1+f(x,u_1), x\in\Omega\\ u_1=0, x\in\partial\Omega\end{cases},$$

$$\begin{cases}-\Delta u_2=a(x)u_2+f(x,u_2), x\in\Omega\\ u_2=0, x\in\partial\Omega\end{cases},$$

将两方程相减后乘上 (u_1-u_2)，并在 Ω 上积分得：

$$\begin{aligned}&\int_{\Omega}|D(u_1-u_2)|^2\mathrm{d}x\\&=\int_{\Omega}a(x)(u_1-u_2)^2\mathrm{d}x+\int_{\Omega}[f(x,u_1)-f(x,u_2)](u_1-u_2)\mathrm{d}x.\end{aligned}\tag{1.1.4}$$

因为 $f(x,u)$ 关于 u 单调递减，所以 $[f(x,u_1)-f(x,u_2)](u_1-u_2)\leqslant 0$，于是对式(1.1.4)利用 Poincare 不等式得

$$\begin{aligned}\int_{\Omega}|D(u_1-u_2)|^2\mathrm{d}x&\leqslant\int_{\Omega}a(x)(u_1-u_2)^2\mathrm{d}x\\&\leqslant a(x)\int_{\Omega}|u_1-u_2|^2\mathrm{d}x\\&\leqslant\frac{a(x)}{\lambda_1}\int_{\Omega}|D(u_1-u_2)|^2\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

因为 $\|a(x)\|<\lambda_1$. 从上式知 $\int_{\Omega}|D(u_1-u_2)|^2\mathrm{d}x=0$，

结合 $u_1|_{\partial\Omega}=u_2|_{\partial\Omega}=0$，知 $u_1\equiv u_2$.

1.3 应用举例

例 1 考察问题 $\begin{cases}-\Delta u=t\dfrac{\lambda_1x^2}{1+x^2}u, x\in\Omega, t\in[0,1]\\u=0, x\in\partial\Omega\end{cases}$，则 $a(x)=\dfrac{\lambda_1x^2}{1+x^2}\in C(\overline{\Omega})$，$a(x)\geqslant 0$，且 $\|a(x)\|=\max\limits_{x\in\Omega}|a(x)|<\lambda_1$.

由定理 1，该问题只有零解.

例 2 若 $\begin{cases}-\Delta u=\lambda_1\mathrm{e}^{-\lambda_1x^2}u+|\sin xu|, x\in\Omega\\u=0, x\in\partial\Omega\end{cases}$，则 $a(x)=\lambda_1\mathrm{e}^{-\lambda_1x^2}\in C(\overline{\Omega})$，$a(x)\geqslant 0$，$f(x,u)=|\sin xu|$ 关于各变元连续，且 $0\leqslant f(x,u)\leqslant 1$，$\forall(x,u)\in\Omega\times\mathbf{R}$.

又因为 $\|a(x)\|=\max\limits_{x\in\Omega}|\lambda_1\mathrm{e}^{-\lambda_1x^2}|\leqslant\lambda_1$，

于是由定理 2 得知该问题存在一个有界正解.

例 3 若 $\begin{cases}-\Delta u=\lambda_1\mathrm{e}^{-\lambda_1x^2}u+\dfrac{x^2}{(1+u^2)(1+x^2)}, x\in\Omega\\u=0, x\in\partial\Omega\end{cases}$，

则 $a(x)=\lambda_1\mathrm{e}^{-\lambda_1x^2}\in C(\overline{\Omega})$，$a(x)\geqslant 0$，$f(x,u)=\dfrac{x^2}{(1+u^2)(1+x^2)}$ 关于各变元连续，且 $0\leqslant f(x,u)\leqslant 1$，$\forall(x,u)\in\Omega\times\mathbf{R}$，又 $f(x,u)$ 显然关于 u 单调递减，于是由定理 3 得知该问题的解唯一.

参考文献

[1] R Dalmass O. Existence and uniqueness of positive solutions of semilinear elliptic systems [J]. Nonlinear Analysis. 2000(39):559-568.

[2] Nurettin caliskan, Albert Kolaen Erkip, Existence of solutions of the Dirichlet problem for $\Delta u+\lambda u+h(D, Du)Du=f(x)$ [J]. Nonlinear Analysis. 2000(39): 241-245.

[3] Deimling K. Nonlinear functional analysis [M]. Springer, Berlin. 1985:123-127.

[4] Gilbarg D, Trudinger Ns. Elliptic Partial Differential Equations of second order, Ind-ed. Berlin: Springer[M]. 1983.

[5] 郭大钧. 非线性泛函分析[M]. 济南:山东科学技术出版社,2002.

[6] 张恭庆,林源渠. 泛函分析讲义[M]. 北京:北京大学出版社,1987.

[7] Vasile I. Istratesca. 不动点理论及其应用[M]. 李秉友,毛向东,译. 上海:上海科学技术文献出版社,1991.

第2节　一类半线性椭圆型方程的可解性

2.1　引言

考察一类半线性椭圆型方程的边值问题：

$$\begin{cases} -\Delta u=\lambda u+f(u), u>0, x\in\Omega \\ u>0, x\in\Omega \\ u=0, x\in\partial\Omega \end{cases}, \tag{1.2.1}$$

其中，$\Omega\subset\mathbf{R}^n(n\geqslant 1)$是一个有界光滑域，参数 $\lambda>0$.

函数 $f(u)$满足下列条件：

(1)$f:\mathbf{R}^+\to\mathbf{R}^+$ 连续；(2)$f(0)>0$；(3)$\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{f(t)}{t}=0$；(4)$\dfrac{f(t)}{t}$在$(0,+\infty)$上单减.

2.2　主要结论及证明

定理 1　若 $\lambda>\lambda_1$，则问题(1.2.1)无正解. 其中 λ_1 为 Dirichlet 条件下$-\Delta$ 算子在 Ω 里的第一特征值.

证明：$\lambda_1>0$ 时相应的第一特征函数 φ 可取 Ω 里的正函数. 将问题(1.2.1)中方程两边乘以 φ 并在 Ω 上积分得

$$-\int_\Omega \Delta u\varphi\,\mathrm{d}x=\lambda\int_\Omega u\varphi\,\mathrm{d}x+\int_\Omega f(u)\varphi\,\mathrm{d}x,$$

所以

$$\lambda_1\int_\Omega u\varphi\,\mathrm{d}x=\lambda\int_\Omega u\varphi\,\mathrm{d}x+\int_\Omega f(u)\varphi\,\mathrm{d}x,$$

所以

$$(\lambda_1-\lambda)\int_\Omega u\varphi\,\mathrm{d}x=\int_\Omega f(u)\varphi\,\mathrm{d}x,$$

又因为$\int_\Omega u\varphi\,\mathrm{d}x\geqslant 0$，$\int_\Omega f(u)\varphi\,\mathrm{d}x\geqslant 0$，从而$\lambda<\lambda_1$. 故$\lambda>\lambda_1$ 时，问题(1.2.1)无正解.

定理 2　若 $\lambda\in(0,\lambda_1)$，则问题$\begin{cases} -\Delta u=\lambda u, x\in\Omega \\ u=0, x\in\partial\Omega \end{cases}$只有零解.

证明：将问题中方程两边乘以 u 并在 Ω 上积分得

$$\int_\Omega |Du|^2\mathrm{d}x=\lambda\int_\Omega u^2\mathrm{d}x,$$

由 Poincare 不等式得

$$\int_\Omega u^2\mathrm{d}x\leqslant\int_\Omega |Du|^2\mathrm{d}x,$$

所以 $$\int_\Omega |Du|^2 \mathrm{d}x \leqslant \frac{\lambda}{\lambda_1}\int_\Omega |Du|^2 \mathrm{d}x < \int_\Omega |Du|^2 \mathrm{d}x,$$

所以 $Du=0$，结合 $u|_{\partial\Omega}=0$ 得 $u\equiv 0, x\in\Omega$.

引理（不动点定理） 设 X 是一个 Banach 空间，C 是 X 的一个闭凸子集，若 T 是 C 到 C 的一个紧映射，R 为一个正常数，使对满足 $\|u\|=R$ 的任意 $u\in C$，有 $u\neq tT(u)$，$0\leqslant t\leqslant 1$，则 T 有一个不动点 $u\in C$，且 $\|u\|\leqslant R$.

定理 3 若条件(1)、(2)、(3)成立，则问题(1.2.1)至少存在一个有界正解. 其中 $\lambda\in(0,\lambda_1)$，λ_1 为 Dirichlet 条件下 $-\Delta$ 算子在 Ω 里的第一特征值.

证明：记 $X=C(\overline{\Omega})$，$K=\{u\,|\,u\in X, u\geqslant 0$，且在 $\partial\Omega$ 上 $u=0\}$，则 K 是 X 的一个闭凸子集. 定义算子 $T: K\to K$ 如下：$Tu=L^{-1}\lambda u+L^{-1}f(u)$，$u\in K$. 由定理 3 条件及 $L^{-1}=(-\Delta)^{-1}$ 是紧正算子可知：存在一个常数 $R>0$ 使对满足 $\|u\|=R$ 的任意 $u\in K$ 和 $t\in(0,1)$，有 $u\neq tT(u)$. 否则存在 $(0,1)$ 中序列 $\{t_n\}$ 和 K 中序列 $\{u_n\}$ 满足 $\|u_n\|\to+\infty$. 当 $n\to+\infty$ 时有：

$$u_n=t_nTu_n=t_nL^{-1}\lambda u_n+t_nL^{-1}f(u_n), \tag{1.2.2}$$

记 $W_n=\dfrac{u_n}{\|u_n\|}$，则 W_n 满足 $\|W_n\|=1$ 且 $W_n=t_nL^{-1}\lambda u_n+t_nL^{-1}\dfrac{f(u_n)}{\|u_n\|}$，利用 L^{-1} 的紧正性，通过取子列可得知 $L^{-1}\lambda u_n$ 收敛，显然有 $t_n\to t_0\in[0,1]$ 和 $W_n\to W_0\in K$，且 $\|W_0\|=1$. 在式(1.2.2)两边取极限得：$W_0=T_0L^{-1}\lambda W_0$，故 $W_0=0$ 与 $\|W_0\|=1$ 矛盾. 再由引理可知，T 有一个不动点 $u\in K$ 且 $\|u\|\leqslant R$，因为 $f(0)>0$，则 u 是问题(1.2.1)的有界正解. 证毕.

定理 4 若条件(4)成立，则问题(1.2.1)最多只有一个正解.

证明：设 u_1 和 u_2 为问题(1.2.1)的两个解，则

$$\begin{cases}-\Delta u_1=\lambda u_1+f(u_1), x\in\Omega, u_1|_{\partial\Omega=0}\\ -\Delta u_2=\lambda u_2+f(u_2), x\in\Omega, u_2|_{\partial\Omega=0}\end{cases}, \tag{1.2.3}$$

从而 $-\dfrac{\Delta u_1}{u_1}+\dfrac{\Delta u_2}{u_2}=\dfrac{f(u_1)}{u_1}-\dfrac{f(u_2)}{u_2}$，用 $u_1^2-u_2^2$ 乘以上式两边并在 Ω 上积分，结合

$$\begin{cases}D\left(\dfrac{u_2^2}{u_1}\right)=2\dfrac{u_2}{u_1}Du_2-\dfrac{u_2^2}{u_1^2}Du_1\\ D\left(\dfrac{u_1^2}{u_2}\right)=2\dfrac{u_1}{u_2}Du_1-\dfrac{u_1^2}{u_2^2}Du_2\end{cases}, \tag{1.2.4}$$

可得到
$$\begin{aligned}&\int_\Omega\left(-\frac{\Delta u_1}{u_1}+\frac{\Delta u_2}{u_2}\right)(u_1^2-u_2^2)\mathrm{d}x\\ =&\int_\Omega\left[\left|Du_1-\frac{u_1}{u_2}Du_2\right|^2+\left|Du_2-\frac{u_2}{u_1}Du_1\right|^2\right]\mathrm{d}x\\ =&\int_\Omega\left[\frac{f(u_1)}{u_1}-\frac{f(u_2)}{u_2}\right](u_1^2-u_2^2)\mathrm{d}x\geqslant 0.\end{aligned}$$

由条件(4)可知，$u_1=u_2$，从而问题(1.2.1)最多只有一个正解. 证毕.

参考文献

[1] Zhao Peihao, Zhong Cheng Kui. On the infinitely many positive solutions of a supercritical elliptic problem[J]. Nonlinear Analysis, 2001, 44: 123-139.

[2] Bandle C, Peletier L A. Nonlinear elliptic problems with critical exponent in shrinking annuli[J]. Math, Anu, 1998, 180: 1-19.

[3] Maya C/Shivaji R. Multiple positive solutions for a class of semilinear elliptic boundary value problems[J]. Nonlinear Analysis, 1999, 38: 479-504.

[4] Deimling K. Nonlinear functional analysis[M]. Berlin: Springer, 1985.

[5] R. Dalmass O. Existence and uniqueness of positive solutions of semilinear elliptic systems[J]. Nonlinear Analysis, 2000, 39: 559-568.

[6] Pigong Han. Multiple positive solutions of non-homogeneous elliptic systems involving critical Sovolev exponents[J]. Nonlinear Analysis, 2006, 64: 869-886.