21世纪高等院校基础性核心课程规划教材

应用数学基础

许克威　编著

21世纪高等院校基础性核心课程规划教材

应用数学基础

许克威 编著

上海交通大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

应用数学基础/许克威编著. —上海:上海交通大学出版社,2010

ISBN 978-7-313-06247-5

Ⅰ.①应… Ⅱ.①许… Ⅲ.①应用数学 Ⅳ.①029

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 020493 号

应用数学基础

许克威　编著

上海交通大学出版社出版发行

(上海市番禺路 951 号　邮政编码 200030)

电话：64071208　出版人：韩建民

长沙鸿发印务实业有限公司印刷　全国新华书店经销

开本：787mm×1092mm　1/16　印张：14　字数：340 千字

2010 年 2 月第 1 版　2010 年 2 月第 1 次印刷

印数：1～3000

ISBN 978-7-313-06247-5/0　定价：24.80 元

前　言

去年我校申办示范性院校成功后，进行了示范性课程开发工作，公共课部与各专业系部就公共课的地位和作用与各专业进行了广泛的沟通.大家认为高等数学课程理应为高职高专学生服务，不仅要学一元微积分，还应相应地学习概率与数理统计部分，因为会计专业、土木工程专业等学生需要这方面的知识，专业开出了药方，我们就应该为各专业抓出药来，我们当时就准备做微积分与概率统计部分的教材.

教材预计作 72 个课时，为一个学期所学的数学知识.教材除了应注重实用性，能让学生学懂，还须贯穿数学思想和数学方法，即理论与实践相结合.数学知识为专业服务，“以能力为本位，以学生为中心，以任务为驱动”的原则，将现代高职教育理念贯彻其中，以思想、方法的传授为主，以培养良好的练习格式习惯为主，以培养建立不同专业与问题模块的数学模型为主，让学生在学习中掌握知识点、掌握良好的学习方法，为以后的工作服务.

日本著名数学教育家米山国藏指出：学生进入社会后，几乎没有机会应用他们在学校所学到的数学知识，因而这种作为知识的数学，通常在学生出校门不到一两年就忘掉了.他认为学数学的意义在于：不管人们从事什么工作，那种铭刻于头脑中的数学精神和数学思想方法，却长期地在他们的生活和工作中发挥着重要作用.数学教育的意义、价值不仅在于数学知识和方法的教育，还在于通过数学知识、方法的教育促进人脑发育发展，培养人的科学文化素质，发展包括人的思维能力、创新能力在内的人的聪明智慧.数学学习能为人一生的可持续发展提供动力，原因正在于数学培养了人的这些素质.

现在数学知识已渗透于各种自然科学及许多社会科学之中，数学知识是我们学习各门科学的基础，语言、符号、图像、计算、估计、推理、建模等基本内容已渗透于我们日常生活与工作之中，数学成了我们的基本技能，数学已成为全人类皆懂的语言，数学是最完美和表达思想最准确的文学.

目　录

第 1 章　函数与极限

函数是被广泛应用在各个领域的数学概念之一，它研究各变量间的相互依赖关系. 高等数学就是用数学的思想和方法研究函数关系的一门学科，它的主要研究对象是函数，它从方法论上突出地表现了高等数学不同于初等数学的特点，本章将介绍函数和极限的基本概念，建立极限的运算法则，从而给出函数连续性的定义及性质.

§1.1　函数的概念

一、函数

1. 函数的概念

定义 1　设 D 是非空实数集，如果对于 D 中的每一个 x，按照某个对应法则 f，都有确定的 y 与之对应，则称 y 是定义在 D 上的 x 的函数，记作 $y=f(x)$. D 称为函数的定义域，x 称为自变量，y 称为因变量.

如果 x_0 是函数 $y=f(x)$ 的定义域中的一个值，则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 有定义. 函数在点 x_0 的对应值叫做函数在该点的函数值，记作 $f(x_0)$ 或 $y|_{x=x_0}$. 当自变量 x 在定义域内取每一个数值时，对应的函数值的全体称为函数的值域，记作 R.

这里要注意两点：

(1) 函数的对应原则，每一个 x 确定一个唯一的 y；

(2) 注意定义域与值域间的取值范围，确定函数的性质.

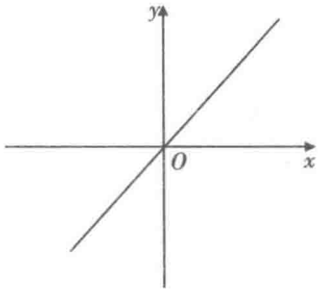


图 1－1

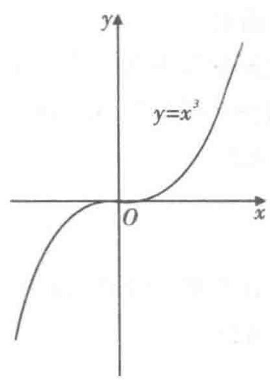


图 1－2

【例 1】　函数 $y=x$.

定义域 $D=(-\infty,+\infty)$，值域 $R=(-\infty,+\infty)$，其图形称为等轴双曲线，如图 1 - 1 所示.

【例 2】 函数 $y=x^3$.

定义域 $D=(-\infty,+\infty)$，值域 $R=(-\infty,+\infty)$，其图形为立方抛物线，如图 1 - 2 所示.

通过对函数的定义和以上各例题的分析讨论，不难发现，确定一个函数，起决定作用的因素是：

(1) 对应法则 f(即因变量 y 对于自变量 x 的依存关系)；

(2) 定义域 D(即自变量 x 的变化范围).

如果两个函数的"对应法则 f"和"定义域 D"都相同，那么这两个函数就是相同的(或称相等的)；否则就是不相同的.至于自变量和因变量用什么字母表示，则无关紧要.

【例 3】 下列各对函数是否相同？为什么？

(1) $f(x)=\lg x^2, g(x)=2\lg x$；

(2) $f(x)=x, g(x)=\sqrt{x^2}$；

(3) $f(x)=\{y=x+1\}, g(x)=\{(x,y)\,|\,y=x+1\}$；

(4) $f(x)=1-\cos^2 x, g(x)=\sin x$.

解 (1) 不相同.$D_f=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，$D_g=(0,+\infty)$，两个函数的定义域不同，因此 $f(x)$ 与 $g(x)$ 不相同.

(2) 不相同.$f(-1)=-1$，$g(-1)=1$，两个函数的对应法则不同，所以 $f(x)$ 与 $g(x)$ 不相同.

(3) 不相同.$f(x)$ 表示一条直线，$g(x)$ 表示一点集.

(4) 不相同.虽然两个函数的定义域都是 $(-\infty,+\infty)$，但其对应法则不同，$f(x)$ 的值域是 $R_f=[0,1]$，$g(x)$ 的值域是 $R_g=[-1,1]$.

2. 函数的表示方法

(1) 解析法；(2) 列表法；(3) 图像法.

三种表示法各有优缺点，在实际问题中，上述三种方法常常结合使用.

3. 分段函数

有时一个函数要用几个式子表示.这种在自变量的不同变化范围中，对应法则用不同的式子来表示的函数，称为分段函数.

【例 4】 函数

$$y=\begin{cases}10, & x\leqslant 4,\\ 10+0.8(x-4), & x>4\end{cases}$$

是海口出租车计费器的收费函数.

【例 5】 函数

$$y=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0\end{cases}$$

的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$，值域 $R=[0,+\infty)$，它的图形如图 1－3 所示，该函数称为绝对值函数．

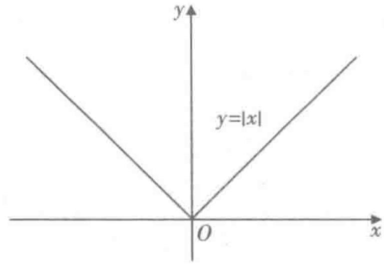


图 1－3

【例 6】 函数

$$y=f(x)=\begin{cases}2\sqrt{x}, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 1+x, & x>1,\end{cases}$$

是一个分段函数，它的定义域 $D=[0,+\infty)$．当 $x\in[0,1]$ 时，对应的函数值 $f(x)=2\sqrt{x}$；当 $x\in(1,+\infty)$ 时，对应的函数值 $f(x)=1+x$．例如 $\frac{1}{2}\in[0,1]$，所以 $f\left(\frac{1}{2}\right)=2\sqrt{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$；$1\in[0,1]$，所以 $f(1)=2\sqrt{1}=2$；$3\in(1,+\infty)$，所以 $f(3)=1+3=4$．该函数的图形如图 1－4 所示．

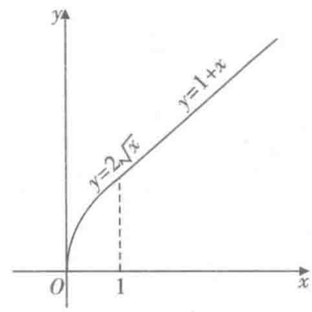


图 1－4

二、函数的几种特性

1．函数的有界性

设函数 $y=f(x)$ 定义在区间 I 上，若存在某一常数 k，对一切 $x\in I$，恒有

$$f(x)\leqslant k\quad (f(x)\geqslant k),$$

则称 $f(x)$ 在 I 上有上（下）界，数 k 为它的一个上（下）界．

若函数 $f(x)$ 在 I 上既有上界，又有下界，则称 $f(x)$ 为 I 上的有界函数．

例如，对任意 x，恒有 $|\sin x|\leqslant 1$，$|\cos x|\leqslant 1$，

所以 $y=\sin x$，$y=\cos x$ 在整个数轴上是有界的；

$y=x^3$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上无界；

$y=x^2$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有下界而无上界．

2．函数的奇偶性

设函数 $f(x)$ 的定义域 I 关于原点对称（即若 $x\in I$，则必有 $-x\in I$），如果对于任一 $x\in I$，总有 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为偶函数；若总有 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 为奇函数．不是偶函数也不是奇函数的函数，称为非奇非偶函数．

偶函数的图形关于 y 轴对称，奇函数的图形关于原点对称．

3．函数的单调性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，区间 $I\subset D$．如果对于 I 上任意两点 x_1 及 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，总有 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$（或 $f(x_1)\geqslant f(x_2)$），则称 $f(x)$ 在区间 I 上单调递增（或单调递减）．单调递增或单调递减函数统称为单调函数．

例如，函数 $y=x^3$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是递增的；

$y=x^2$ 在 $(-\infty,0)$ 上是递减的，在 $(0,+\infty)$ 上是递增的，但在整个定义域上不是单调的．

4．函数的周期性

设 x 是函数 $y=f(x)$ 的定义域内任一点，若存在一个不等于零的数 k，使得当 $x+k$ 也属于定义域时，有 $f(x+k)=f(x)$，则称 $y=f(x)$ 为周期函数，其中称 k 为函数 $f(x)$ 的

周期. 我们通常所说的周期都是指它的最小正周期.

例如,函数 $y=\sin\omega x(\omega\neq0,x\in(-\infty,+\infty))$是以 $k=\dfrac{2\pi}{|\omega|}$为周期的函数.

三、反函数

在研究两个变量的函数关系时,可以根据问题的需要选定其中一个为自变量,则另一个就是因变量. 例如,函数 $y=ax+b$ 中,x 是自变量,y 是因变量. 如果从这个函数中把 x 解出,得 $x=\dfrac{1}{a}y-\dfrac{b}{a}$,则称 $x=\dfrac{1}{a}y-\dfrac{b}{a}$是 $y=ax+b$ 的反函数. 一般地,设函数 $y=f(x)$的定义域是 D,值域是 R,如果对于 R 中的每一个值 y,都可通过关系式 $y=f(x)$确定 D 中的唯一的一个值 x 与之对应,就得到了定义在 R 上,以 y 为自变量,x 为因变量的函数 $x=\phi(y)$,称为函数 $y=f(x)$的反函数.

习惯上,用 x 表示自变量,用 y 表示因变量,所以,函数 $y=f(x)$的反函数可改写为 $y=f^{-1}(x)$.

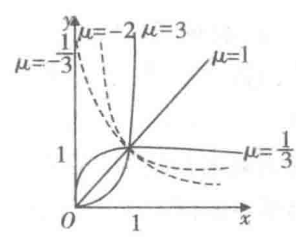
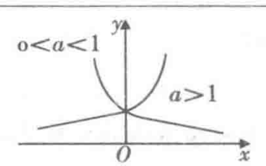
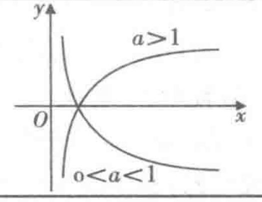
例如,$y=\sin x$,$y=a^x$ 的反函数分别为 $y=\arcsin x$,$y=\log_a x$. 当函数与其反函数均以 x 为自变量时,反函数的图像与原函数的图像关于直线 $y=x$ 对称.

四、初等函数

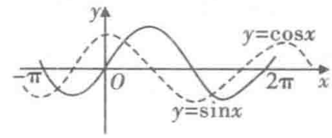
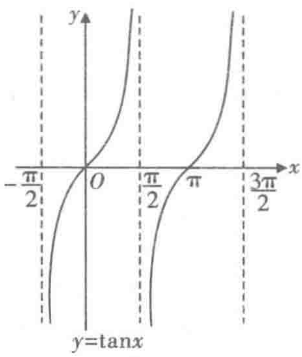
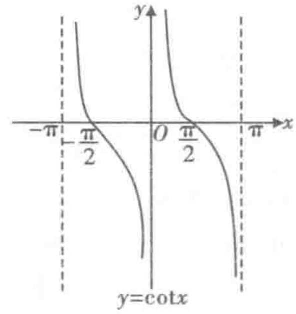
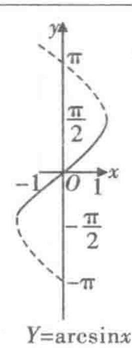
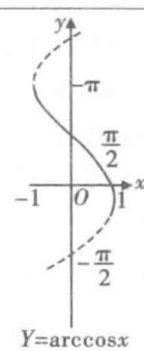
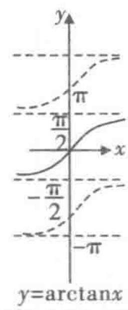
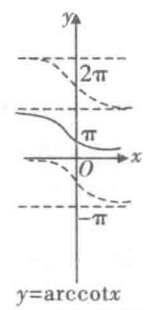
1. 基本初等函数

我们把在中学已经学过的幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数等函数统称为基本初等函数. 为复习和应用的方便,将其归纳成表 1 - 1.

表 1 - 1

类别及解析式	定义域	值　域	图　形
幂函数 $y=x^\mu$	因 μ 而异	因 μ 而异	
指数函数 $y=a^x(a>0,$ $a\neq0,a\neq1)$	$(-\infty,+\infty)$	$(0,+\infty)$	
对数函数 $y=\log_a x(a>0,a\neq1)$	$(0,+\infty)$	$(-\infty,+\infty)$	

续表

	正弦函数 $y=\sin x$	$(-\infty,+\infty)$	$[-1,1]$	
	余弦函数 $y=\cos x$	$(-\infty,+\infty)$	$[-1,1]$	
三角函数	正切函数 $y=\tan x$	$x\neq n\pi+\frac{\pi}{2}$	$(-\infty,+\infty)$	
	余切函数 $y=\cot x$	$x\neq n\pi$	$(-\infty,+\infty)$	
反三角函数	反正弦函数 $y=\arcsin x$	$[-1,1]$	$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$	
	反余弦函数 $y=\arccos x$	$[-1,1]$	$[0,\pi]$	
	反正切函数 $y=\arctan x$	$(-\infty,+\infty)$	$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$	
	反余切函数 $y=\text{arccot}\, x$	$(-\infty,+\infty)$	$(0,\pi)$	

2. 复合函数

在实际问题中，经常遇到两个变量之间的联系不是直接的，即因变量不直接依赖于自变量，而是通过另一个变量联系起来.

例如，有质量为 m 的物体，以初速度 v_0 竖直上抛，由物理学知，其动能 E 是速度 v 的函数

$$E=\frac{1}{2}mv^2.$$

而速度 v 在不计空气阻力时为 $v=v_0-gt$，g 是重力加速度，因此 E 通过 v 成为 t 的函数

$$E=\frac{1}{2}m(v_0-gt)^2.$$

它是由函数 $E=\frac{1}{2}mv^2$ 和 $v=v_0-gt$ 复合而成的复合函数.

一般地，我们有如下定义.

定义 2 设 y 是 u 的函数 $y=f(u)$，定义域为 U_1，而 u 又是 x 的函数，即 $u=\phi(x)$，值域为 U_2，其中 $U_2\subseteq U_1$，则 y 通过变量 u 成为 x 的函数，这个函数称为由函数 $y=f(u)$ 与函数 $u=\phi(x)$ 构成的复合函数，记为

$$y=f[\phi(x)].$$

其中 u 为自变量 x 的函数称为中间变量.

形成复合函数的中间变量可以是两个或更多个.

例如，由 $y=\lg u$，$u=\tan v$，$v=x^2+5$，经二次复合构成 x 的复合函数 $y=\lg\tan(x^2+5)$.

但需注意，并不是任何两个函数都可复合成一个复合函数. 例如 $y=\arccos u$，$u=2+x^2$ 就不能复合成 $y=\arccos(2+x^2)$，因为 u 总是大于 1，使 $y=\arccos u$ 没有意义.

我们不仅要学会把若干个简单的函数"复合"成一个复合函数，而且要善于把一个复合函数"分解"为若干个简单的函数. 这种分解技术在后面的微积分运算中经常要用到，应该得到足够的重视.

【例 7】 将下列函数分解为较简单的函数.

(1) $y=\sin(x^3+4)$；　(2) $y=5^{\cot\frac{1}{x}}$.

解 (1) 设 $u=x^3+4$，则 $y=\sin(x^3+4)$ 由 $y=\sin u$，$u=x^3+4$ 复合而成的.

(2) 设 $u=\cot\frac{1}{x}$，则 $y=5^u$. 设 $v=\frac{1}{x}$，则 $u=\cot v$，所以 $y=5^{\cot\frac{1}{x}}$ 可以看成是由 $y=5^u$，$u=\cot v$，$v=\frac{1}{x}$ 三个函数复合而成的.

3. 初等函数

定义 3 由常数和基本初等函数经过有限次四则运算以及有限次复合运算所构成的，能用一个式子表示的函数，称为初等函数.

例如，$y=\arcsin\frac{1}{x^2}+5$，$y=\tan t-\sqrt{t}\sin t^2$ 都是初等函数.

今后讨论的函数绝大多数是初等函数，但须注意，分段函数一般不是初等函数.

4. 建立函数关系举例

用数学方法解决实际问题时，首先要建立数学模型，即建立函数关系，为此需明确问题中的因变量与自变量，再根据题意建立等式，从而得出函数关系，再根据实际问题的要求，确定函数定义域.

【例 8】 某工厂 A 与铁路的垂直距离为 a km，它的垂足 B 到火车站 C 的铁路长为 b km，工厂的产品必须经火车站 C 方能转销外地，已知汽车运费是 m 元/吨公里，火车运费是 n 元/吨公里 $(m>n)$. 为节省运费，计划在铁路上另修一小站 M 作为转运站，那么运费的多少决定于 M 的地点，试将运费表示为距离 $|BM|$ 的函数（见图 1 - 5）.

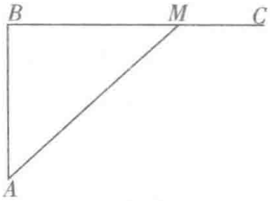


图 1 - 5

解　设 $|BM|=x$，运费为 y，

根据题意有

$$|AM|=\sqrt{a^2+x^2},\ |MC|=b-x,$$

则 $y=m\sqrt{a^2+x^2}+n(b-x)$，$x\in[a,b]$.

【例 9】 美国 1975 年至 1978 年的能源进口金额（单位：亿元）如表 1 - 2 所示：

表 1 - 2

年度	1975	1976	1977	1978
时间 t	0	1	2	3
进口金额 y	96	121	148	172

(1) 假设 y 与 t 为线性关系，试写出通过点(0,96)及(3,172)的线性方程；

(2) 利用此方程估计 1976 年及 1977 年的进口量（线性内插），并与实际进口量比较.

解　(1) 由直线的两点间方程知

$$\frac{y-96}{t-0}=\frac{172-96}{3-0},$$

即

$$y=\frac{76}{3}t+96.$$

(2) 1976 年与 1977 年对应的 t 值分别为 1 和 2，将其代入(1)中所求出的线性方程，得

$$y(1)=\frac{76}{3}\times1+96=\frac{364}{3}$$

$$y(2)=\frac{76}{3}\times2+96=\frac{440}{3}.$$

与实际进口量相比，误差不算大（相对误差不超过 10%）. 所以我们可以得出结论：美国 1975 年至 1978 年的能源进口额近似线性增长.

习题 1.1

1. 设 $f(x)=2x^2+3x-4$,求 $f(0)$,$f(\sqrt{2})$,$f(x+1)$,$f(2x)$,$\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}(h\neq0)$.

2. 求下列函数的定义域和值域:

(1) $f(x)=6-4x,-2\leqslant x\leqslant3$; (2) $f(x)=\sqrt{1-x^2}$;

(3) $f(x)=|x|+x$; (4) $f(x)=|x^2-1|$.

3. 试确定下列函数在指定区间上是有界函数还是无界函数:

(1) $f(x)=-\sin x+2,[0,100\pi]$; (2) $f(x)=x^2-x,(2,8]$;

(3) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}},(0,+\infty)$; (4) $f(x)=\tan2x,\left(0,\dfrac{\pi}{8}\right)$.

4. 试判断下列函数的奇偶性:

(1) $f(x)=x^2+x$; (2) $f(x)=x^3-x$;

(3) $f(x)=x^2(1-x^2)$; (4) $f(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$.

5. 下列函数中哪些是周期函数?对于周期函数指出它的周期(最小正周期).

(1) $f(x)=\cos(x-2)$; (2) $f(x)=x\cos x$;

(3) $f(x)=\sin^2x$.

6. 求下列函数的反函数:

(1) $f(x)=\dfrac{1+3x}{5-2x}$; (2) $f(x)=\dfrac{2^x}{2^x+1}$.

§1.2 数列的极限

在高等数学中几乎所有的概念都离不开极限,因此极限概念是高等数学中最基本的概念之一,极限方法是研究函数和解决许多问题的基本思想方法和主要工具.

一、数列的极限

数列是定义于正整数集合上的函数,它的极限只是一种特殊的函数的极限.

数列就是按一定顺序排列起来的一列数

$$x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n,\cdots.$$

第 n 项 x_n 称为数列的通项,这个数列可简记为$\{x_n\}$.有些数列有通项,而且不只一个,有些数列没有通项.我们中学所学的数列常用的有等差数列和等比数列.

例

$$1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \cdots, (-1)^{n+1}\frac{1}{n}, \cdots; \tag{1}$$

$$0, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{5}{4}, \cdots, \frac{n+(-1)^n}{n}, \cdots; \tag{2}$$

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \cdots, \frac{1}{2^n}, \cdots; \tag{3}$$

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \cdots, \frac{n}{n+1}, \cdots. \tag{4}$$

都是数列的例子，它们的通项分别为

$$(-1)^{n+1}\frac{1}{n}, \frac{n+(-1)^n}{n}, \frac{1}{2^n}, \frac{n}{n+1}.$$

考察数列当 n 变化时，x_n 的变化情况，容易看出，当 n 无限增大（记作 $n\to\infty$）时，不同数列的变化情况是有所不同的，其中有的数列当 $n\to\infty$ 时，x_n 能与某一个常数 a 无限接近，如数列(1)，当 $n\to\infty$ 时，x_n 与 0 无限接近；同样，对于数列(2)，当 $n\to\infty$ 时，$\frac{n+(-1)^n}{n}$ 无限接近 1；对于数列(3)，当 $n\to\infty$ 时，$\frac{1}{2^n}$ 无限接近于 0. 而数列(4)，当 $n\to\infty$ 时，$\frac{n}{n+1}$ 无限接近于 1. 数列 (1)、(2)、(3)、(4) 反映了一类数列的某种公共特性，即对于数列 $\{x_n\}$，存在一个常数 a，随着 n 的无限增大，x_n 无限地接近于 a，这也就是说要使 x_n 与 a 的差的绝对值任意地小，只要 n 充分地大便可.

因此，给出数列极限的定义如下：

定义 1（$\varepsilon-\delta$ 定义）　若对于预先给定的任意小的正数 ε，总存在一个正整数 N，使得当 $n>N$ 时，不等式

$$|x_n-a|<\varepsilon \quad (a\text{ 是一个确定常数})$$

成立，则称 a 为数列 $\{x_n\}$ 在 $n\to\infty$ 时的极限，记为

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a_n \text{ 或 } x_n\to a_n (n\to\infty).$$

这时我们说数列是收敛的，否则数列是发散的.

【例 1】　证明数列

$$2, \frac{1}{2}, \frac{4}{3}, \frac{3}{4}, \cdots, \frac{n+(-1)^{n-1}}{n}, \cdots$$

的极限是 1.

证　$|x_n-a| = \left|\frac{n+(-1)^{n-1}}{n}-1\right| = \frac{1}{n}.$

为了使 $|x_n-a|$ 小于任意给定的正数 ε，只要

$$\frac{1}{n}<\varepsilon \text{ 即 } n>\frac{1}{\varepsilon}.$$

所以，对于任意给定的正数 ε，取正整数 $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$，则当 $n>N$ 时，

就有
$$\left|\frac{n+(-1)^{n-1}}{n}-1\right|<\varepsilon,$$

即
$$\lim_{n\to\infty}\frac{n+(-1)^n-1}{n}=1.$$

定义 2(描述性定义)　若对于数列$\{x_n\}$,当 n 无限增大时,x_n 无限接近于某一个常数 a,则称 a 为数列$\{x_n\}$当 $n\to\infty$时的极限,记为
$$\lim_{n\to\infty}x_n=a_n \text{ 或 } x_n\to a_n \quad (n\to\infty),$$
这时我们说数列是收敛的,否则数列是发散的.

注:描述定义只用于理解定义,证明数列极限只能用 $\varepsilon-\delta$ 定义.

【例 2】　用定义验证
$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{n}=2.$$

证　对于任意给定的正数 ε,欲使 $\left|\frac{2n-1}{n}-2\right|=\frac{1}{n}<\varepsilon$,
只需
$$\frac{1}{n}<\varepsilon \quad \text{即} \quad n>\frac{1}{\varepsilon}$$
即可(这说明只要 n 充分大——大于$\frac{1}{\varepsilon}$,$\left|\frac{2n-1}{n}-2\right|$就能任意小——小于 ε).因此,取正整数 $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$(其中$\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$表示不大于$\frac{1}{\varepsilon}$的最大整数),则 $n<N$ 时,恒有
$$\left|\frac{2n-1}{n}-2\right|<\varepsilon$$
成立,从而,当 $n\to\infty$时,$x_n=\frac{2n-1}{n}$以 2 为极限,即
$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{n}=2.$$

注:证明数列$\{x_n\}$以常数为极限的过程,实际上是对任意给定的正数 ε(不论其多么小),寻找正整数 N 的过程,像例 2 这样简单的情况,可通过直接解不等式来确定 N.从定义和例中可以看出,对于给定的正数 ε,一旦存在符合要求的 N,则 N 不唯一(无穷多个).

二、收敛数列的性质

定理 1(极限的唯一性)　数列$\{x_n\}$不能收敛于两个不同的极限.

定理 2(收敛数列的有界性)　如果数列$\{x_n\}$收敛,那么数列$\{x_n\}$一定有界.

定理 3(收敛数列与其子数列间的关系)　如果数列$\{x_n\}$收敛于 a,那么它的任一子数列也收敛,且极限也是 a.

定理 4　单调有界数列一定收敛.

以下对定理 1 和定理 2 进行证明,其他读者可参照它们自己进行证明.

定理 1(极限的唯一性)　数列$\{x_n\}$不能收敛于两个不同的极限.

证　反证法.设数列$\{x_n\}$收敛,但极限不唯一,即$\{x_n\}$有极限 a 和 b,不妨设 $a>b$.取 $\varepsilon=\frac{a-b}{2}$.根据数列极限的定义及$\{x_n\}$以 a 为极限可知,存在正整数 N_1,当 $n>N_1$ 时,有

$$|x_n-a|<\frac{a-b}{2},$$

即

$$a-\frac{a-b}{2}<x_n<a+\frac{a-b}{2},$$

从而有

$$x_n>\frac{a+b}{2}. \tag{1}$$

又由于$\{x_n\}$以 b 为极限，对上述的 $\varepsilon=\dfrac{a-b}{2}$，存在正整数 N_2，当 $n>N_2$ 时，有

$$|x_n-b|<\frac{a-b}{2},$$

即

$$b-\frac{a-b}{2}<x_n<b+\frac{a-b}{2},$$

从而有

$$x_n<\frac{a+b}{2}. \tag{2}$$

取 $N=\max\{N_1,N_2\}$（即取 N_1,N_2 之最大数），当 $n>N$ 时，式(1)与式(2)同时成立，这显然是矛盾的. 因此，收敛数列的极限是唯一的.

定理 2（收敛数列的有界性）　如果数列$\{x_n\}$收敛，那么数列$\{x_n\}$一定有界.

证　设数列$\{x_n\}$收敛，并且以 a 为极限. 根据数列极限的定义，对于 $\varepsilon=1$，存在着正整数 N，使得当 $n>N$ 时，都有

$$|x_n-a|<1$$

成立. 于是，有

$$|x_n|=|x_n-a+a|\leqslant|x_n-a|+|a|<1+|a|.$$

取 $M=\max\{|x_1|,|x_2|,\cdots,|x_N|,1+|a|\}$，则对于一切 n 有

$$|x_n|\leqslant M.$$

这就证明了数列$\{x_n\}$是有界数列.

由定理 2 知，无界数列一定是发散的.

注意，数列有界是数列收敛的必要条件，但不是充分条件. 例如，数列$\{x_n\}=\{(-1)^{n+1}\}$是有界的，而$\{x_n\}$却是发散数列.

定理 1 表明两个收敛数列，若它们的极限不相等时，则当 n 充分大后对应的项也不相等，且与极限值有相同的大小顺序.

推论 1　若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，且 $a>b$（或 $a<b$），则存在正整数 N，当 $n>N$ 时，$x_n>b$（或 $x_n<b$）成立.

证　在定义 2.3 中取 $y_n=b$，即得推论 1.

推论 2　若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=b$，且存在正整数 N，当 $x>N$ 时，有 $x_n\geqslant y_n$，则有 $a\geqslant b$.

证　反证法. 假设. 由定义 2.3，存在正整数 N_1，当 $n>N_1$ 时，有 $x_n<y_n$. 由已知条件，取