

曹建基◎编著

正规子群个数对 有限群的影响

The influence of the number of normal subgroup of finite group

曹建基◎编著

图 书 在 册 号 (CIP)

正 规 子 群 个 数 对 有 限 群 的 影 响

曹 建 基 著 北 京 : 经 济 日 报 出 版 社 , 2016.2

ISBN 978-7-80527-920-7

中 国 本 地 图 书 馆 CIP 数 据 核 对 (2016) 第 108459 号

正规子群个数对 有限群的影响

The influence of the number of normal subgroup of finite group

图书在版编目 (CIP) 数据

正规子群个数对有限群的影响 / 曹建基编著.

—北京: 经济日报出版社, 2016. 5

ISBN 978 - 7 - 80257 - 950 - 7

I. ①正… II. ①曹… III. ①群论 IV. ①O152

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2016) 第 108429 号

正规子群个数对有限群的影响

作 者	曹建基
责任编辑	张 丹
出版发行	经济日报出版社
地 址	北京市西城区白纸坊东街 2 号 (邮政编码: 100054)
电 话	010 - 63567691 (编辑部) 63538621 (发行部)
网 址	www. edpbook. com. cn
E - mail	edpbook@126. com
经 销	全国新华书店
印 刷	北京天正元印务有限公司
开 本	710 × 1000 毫米 1/16
印 张	6. 5
字 数	128 千字
版 次	2016 年 5 月第一版
印 次	2016 年 5 月第一次印刷
书 号	ISBN 978 - 7 - 80257 - 950 - 7
定 价	23. 00 元

版权所有 盗版必究 印装有误 负责调换

前 言

众所周知，有限群研究的根本问题是确定有限群的结构。由于子群的正规性与有限群结构有着非常紧密的联系，所以自然希望利用正规子群来研究有限群的结构。特别地，非平凡正规子群个数对有限群的结构也有很大的影响。例如：著名的有限单群分类就研究了没有非平凡正规子群的有限群。这项重大的科学成果的得来是很不容易的。如果从 1832 年 Galois 证明交错群 A_5 是单群算起，整整经历了 150 年。参加这项工作的数学家前后共达几百人。为了证明单群分类定理，即有限单群共有 18 个无限族和 26 个零散单群，人们使用了抽象群论的，表示论的，几何的以及组合论和图论的方法，在杂志上发表了数千页以至上万页的论文。这些论文的总就构成了单群分类定理的证明。另一方面早在 1897 年，R. Dedekind 就决定了所有子群都正规的有限群，这样的群被称为 Dedekind 群。上面两个问题从两个极端研究了非平凡正规子群个数对有限群结构的影响。本人一直以来都在研究非平凡正规子群较多和非平凡正规子群

较少的有限群，取得了一些结果，现在把这些结果整理出来，以专著的形式发表，希望对读者有所帮助！由于编者学识浅薄，书中难免有不足之处，敬请专家，同行和读者批评指正。

最后，我要特别感谢山西大同大学基金资助！

目 录

CONTENTS

第一章	NNU - 群	1
§ 1.1	基本结果	1
§ 1.2	NNU - 群的结构	3
第二章	$NCUP$ - 群	12
§ 2.1	预备知识	12
§ 2.2	初步结果	14
§ 2.3	超特殊 $NCUP$ - 群	16
§ 2.4	$NCUP$ - 群的进一步结果和群例	21
§ 2.5	内 $NCUP$ - 群	30
第三章	可解 NNT - 群	35
§ 3.1	预备知识	35
§ 3.2	可解 NNT - 群的主要结果	36

第四章 可解 NCM - 群	42
§ 4.1 预备知识	42
§ 4.2 可解 NCM - 群的分类	45
第五章 非可解 NCM - 群	69
§ 5.1 定义及引理	69
§ 5.2 半单 NCM - 群	72
§ 5.3 非半单 NCM - 群	79
参考文献	86

符号表

$ G $		群 G 的阶
$\exp(G)$		群 G 的方次数
$[x, y]$		元素 x, y 的换位子 $x^{-1}y^{-1}xy$
$o(x)$		元素 x 的阶
$\langle x \rangle$		元素 x 生成的循环群
$\langle X \rangle$		集合 X 中的元素生成的群
$H \leq G$		H 是群 G 的子群
$H < G$		H 是群 G 的真子群
$M \triangleleft G$		M 是群 G 的极大子群
$H \trianglelefteq G$		H 是群 G 的正规子群
$H \text{ char } G$		H 是群 G 的特征子群
$H \simeq G$		群 H 同构于群 G
$H \lesssim G$		H 同构于群 G 的一个子群
$ G:H $		H 在群 G 中的指数
$N_G(H)$		H 在群 G 中的正规化子
$C_G(H)$		H 在群 G 中的中心化子
H^g		子群 H 在 g 下的共轭
G'		群 G 的导群

$\Phi(G)$	群 G 的 Frattini 子群
$F(G)$	群 G 的 Fitting 子群
$Aut(G)$	群 G 的自同构群
C_p	p 阶循环群
$A \times B$	群 A 与群 B 的直积
$A \rtimes B$ 或 $B \rtimes A$	正规子群 A 与子群 B 的半直积
$A \setminus B$	$\{x \mid x \in A \text{ 但 } x \notin B\}$
(m, n)	自然数 m 和 n 的最大公因子
$m \mid n$	m 整除 n
$c(G)$	群 G 的幂零类
$N \trianglelefteq G, G/N$	N 是群 G 的正规子群, G 关于 N 的商群
$A * B$	群 A 与群 B 的中心积
$H \cap N$	群 H 与群 N 的交
H^G	H 在 G 中的正规闭包
$core_G(H)$	H 在 G 中的核
$O(G)$	G 中奇数阶正规子群的乘积
$M(G)$	G 的 Schur 乘子
$H \text{wr} K$	H 和 K 的圈积
$H \text{wr}_r K$	H 和 K 的正则圈积
$H \simeq G$	H 同构于 G
D_n	n 阶二面体群
Q_n	n 阶四元数群
S_n	n 次对称群
A_n	n 次交错群

第一章

NNU -群

§ 1. 1 基本结果

利用正规子群刻画有限群的结构是有限群论中常用的方法. 特别地, 非平凡正规子群的个数对有限群有很大的影响. 如果有有限群 G 没有非平凡正规子群, 则 G 为单群, 通过数百位数学家数十年努力完成了有限单群的分类. 受上面结果的启发, 本章对非平凡正规子群唯一的有限群做了研究, 得到了这类群的结构. 为了后面讨论的方便, 我们称非平凡正规子群唯一的有限群为 NNU -群. 这一章内容主要出自于文献[64]. 本节先介绍一下本章中用到的一些预备知识.

定义 1.1.1 设 G 为有限非交换群. 如果 G 的所有真子群和真商群都交换, 则称 G 为极小非交换群. 如果有有限非幂零群 G 的所有真子群都幂零, 则称 G 为内幂零群.

定义 1.1.2 设 G 为有限群, T 为有限非交换单群, 如果 $T \leq G \leq \text{Aut}(T)$, 则称 G 为几乎单群.

定义 1.1.3 如果群 G 满足 $G' = G$, 则称 G 为完备群 (Perfect Group).

定义 1.1.4 设 G 为有限完备群, 如果 H 满足 $H/Z(H) \cong G$, 则称 H 为 G 的中心扩张. 如果 H 亦为完备群, 则称 H 为 G 的覆盖 (Covering Group).

引理 1.1.1 ([71, 定理 1]) 设 G 为单群, $|G| = |M|$, M 为一已知单群, 则下述结论成立:

- (1) 若 $|M| = |A_8| = |L_3(4)|$, 则 $G \cong A_8$ 或 $L_3(4)$;
- (2) 若 $|M| = |B_n(q)| = |C_n(q)|$, $n \geq 3$, q 为奇数, 则 $G \cong B_n(q)$ 或 $C_n(q)$;
- (3) 若 $|M|$ 不为上述情形 (1), (2) 则 $G \cong M$.

引理 1.1.2 ([35, 定理 3.5.2]) 设 G 是内幂零群, 则 $|G| = p^a q^b$, $p \neq q$ 均为素数, 且适当选取符号便有 G 的 Sylow p -子群 $P \trianglelefteq G$, 而 Sylow q -子群 Q 循环, $Q \ntrianglelefteq G$, 并有 $\Phi(Q) \leq Z(G)$.

引理 1.1.3 设 $G = T_1 \times \cdots \times T_s$, 其中 $T_1, \cdots, T_s$ 为同构的有限非交换单群, 则 G 的任意非单位正规子群 K 均有形状 $T_{i_1} \times \cdots \times T_{i_t}$. ($1 \leq i_1 \leq \cdots \leq i_t \leq s$)

证明: 设 $g = g_1 g_2 \cdots g_s \in K$, 其中 $g_1 \in T_1, g_2 \in T_2, \cdots, g_s \in T_s$, 并且对某个 j 来说有 $g_j \neq 1$. 则 g 在 G 中的正规闭包 g^G 必包含 T_j 中的某一非单位元素. 这是因为对任意的 $x \in T_j$, g^G 包含元素

$$g^{-1} g^x = (g_1 g_2 \cdots g_s)^{-1} (g_1 g_2 \cdots g_s)^x = g_j^{-1} g_j^x = [g_j, x].$$

因为 T_j 是非交换单群, $Z(T_j) = 1$, 故至少有一个 $x \in T_j$ 使 $h_j = [g_i, x] \neq 1$. 再由 T_j 是单群, 有 $h_j^{T_j} = T_j$. 于是 $K \geq g^G \geq T_j$. 概括起来说, 即如果 K 中有一元素 g , 使得它在直积分解中的第 j 个分量 $g_j \neq 1$, 则必有 $K \geq T_j$. 这就立即推出 K 必有形状 $T_{i_1} \times \cdots \times T_{i_r}$, 其中 T_{i_j} 在分解式. 中出现的充要条件是 K 中有一元素, 它的第 i_j 个分量不等于 1. $\square$

引理 1.1.4 若 $H \simeq T^m$, 其中 T 为非交换单群. 则 $\text{Aut}(H) = \text{Awr}_\Gamma S_\Gamma$, 其中 $A = \text{Aut}(T)$, 而 $\Gamma = \{1, 2, \cdots, m\}$.

证明: 一方面容易证得 $\text{Awr}_\Gamma S_\Gamma \leq \text{Aut}(H)$. 另一方面任意 $\alpha \in \text{Aut}(H)$, 有 $T_i^\alpha = T_{i_\alpha}$. 又因为存在 $\sigma \in S_n$ 使得 $T_i^\sigma = T_{i_\alpha}$. 所以 $T_i^{\alpha\sigma^{-1}} = T_i$, 即 $\alpha\sigma^{-1}|_{T_i} \in \text{Aut}(T_i)$. 故 $\alpha \in (\text{Aut}(T_1) \times \text{Aut}(T_2) \times \cdots \times \text{Aut}(T_n)) \rtimes S_n$ 结论得证. $\square$

§ 1.2 NNU - 群的结构

本节我们将给出主要结果及其证明. 先给出下面定理

定理 1.2.1 有限群 G 的非平凡正规子群的阶相同当且仅当 G 为下列情形之一

- (1) G 是单群;
- (2) G 存在唯一的非平凡正规子群;
- (3) $G \simeq T \times T$, 其中 T 为有限单群;
- (4) $G \simeq A_8 \times L_3(4)$;

(5) $G \simeq B_n(q) \times C_n(q), n \geq 3, q$ 为奇数.

证明:必要性:如果 G 没有非平凡正规子群,则 G 为单群,即为情形(1);如果 G 有非平凡正规子群且唯一,则为情形(2);如果不唯一,设 M, N 为 G 的两个阶相同的非平凡正规子群,由条件得 $M \cap N = 1, G = MN$ 且 M, N 为有限单群. 则 $G = M \times N$. 由引理 1.1.1 可得 G 为(3), (4), (5) 三种情形.

充分性:对(1), (2) 结论显然成立. 下面讨论(3). 因为 $G/T \simeq T$, 且 T 为有限单群, 故 $G > T > 1$ 为群 G 的主群列且 T 为群 G 的唯一的因子. 由 Jordan - Hölder 定理可得群 G 的非平凡正规子群均同构于 T , 进而可得群 G 的非平凡正规子群的阶相同. 同样方法对(4), (5) 也可得群 G 的非平凡正规子群阶相同. $\square$

定理 1.2.2 若 G 为有限可解 NNU -群, 则

(1) G 幂零当且仅当 G 为 p^2 阶循环群;

(2) G 可解但非幂零当且仅当 G 为极小非交换群.

证明(1) 的证明:由定义直接可得.

(2) 的证明:必要性:由 G 为非交换可解群, 可得 G' 为群 G 的非平凡正规子群. 又群 G 的非平凡正规子群唯一, 故 $G > G' > 1$ 为 G 的主群列. 因为 G 可解, 可得 G' 为素数幂阶初等交换群. 令 $|G'| = p^n, |G/G'| = q$, 其中 p, q 为素数 $p \neq q$. 故可得 $G = G' \rtimes Q$, 其中 $Q \in \text{Syl}_q(G)$. 下证 G 为极小非交换群. 因为 G' 为 G 的唯一非平凡正规子群且 G/G' 交换而群 G 非交换. 故只需要证明 G 的所有真子群交换. 设 $1 < M < G$.

分两种情况讨论.

(1) 若 $M \cap G' = 1$, 由于 $M > 1$, 所以 $|M| = q$. 进而有 M 交换.

(2) 若 $M \cap G' \neq 1$, 如果 $M \cap G' = M$, 即 $M \leq G'$, 则 M 交换. 如果 $M \cap G' \neq M$ 且 $Q < M$. 由于 $M \cap G' \trianglelefteq M$, 所以 G', Q 均正规化 $M \cap G'$, 进而有 $M \cap G' \trianglelefteq G$. 由群 G 的非平凡正规子群唯一可得 $M \cap G' = G'$, 进而有 $M = G$, 与 $M < G$ 矛盾. 如果 $M \cap G' \neq M$ 且 $M \cap Q = 1$, 则存在 $S \in \text{Syl}_q(G)$ 使得 $S < M$. 又 $G = G' \rtimes S$, 转化为讨论过的情形. 因此可得 G 为极小非交换群.

充分性: 因为 G 为极小非交换群, 而 G 非幂零, 所以 G 为内幂零群. 由引理 1.1.2 可得 $G = P \rtimes Q$, 其中 P, Q 为 G 的 Sylow 子群, P 为初等交换 p -群, Q 为循环群. 先证明 P 为 G 的唯一极小正规子群. 设 N 为 G 的极小正规子群, 因为 G 可解, 可得 N 为素数幂阶初等交换群, 很明显 $N \neq Q$, 所以 $N \leq P$. 如果 $N < P$, 则由 G/N 交换可得 $G/N = P/N \times QN/N$, 因为 $QN < G$ 所以 QN 交换故可得 $Q \text{char} QN \trianglelefteq G$, 即有 $Q \trianglelefteq G$, 矛盾. 所以 $N = P$ 为群 G 的唯一极小正规子群. 另一方面, 因为 G 为极小非交换群, 所以 Q 为 q 阶循环群. 故由 $|G/P| = q$ 得 P 为群 G 的极大正规子群. 因此 P 为群 G 的唯一非平凡正规子群. 结论得证. $\square$

定理 1.2.3 设 G 为有限非可解 NNU -群, 且设 K 为群 G 的唯一非平凡正规子群. 则

(I) K 可解.

(i) $K \leq Z(G)$ 当且仅当 G 为某个有限非交换单群的覆盖且 $Z(G) = \Phi(G) \simeq C_p$.

(ii) $K \not\cong Z(G)$, 则 $G/K \simeq D$ 是非交换单群, D 在 K 上作用不可约, 进一步我们有

(ii - a) G 是 K 被 D 的可裂扩张当且仅当 G 是仿射型本原置换群, 且点稳定子群同构于 D .

(ii - b) G 是 K 被 D 的非可裂扩张.

(II) K 非可解.

(i) 设 T 是有限非交换单群. 则 $K \simeq T$ 当且仅当 G 是基柱为 T 的几乎单群, 且 $G/T \simeq C_p$

(ii) 如果 $K = T^n$, T 是有限非交换单群, $n > 1$. 这时 $G/K \simeq D$ 是单群. 进一步有

(ii - a) 如果 D 为交换单群, 即 $D \simeq C_p$ (p 为素数), 则 $G = \langle T^p, x \rangle$ (p 为素数) 且存在 $\sigma_i \in \text{Aut}(T)$ 使对任意的 $(1, \dots, t, \dots, 1) \in T^p$ 有 $(1, \dots, t, \dots, 1)^x = (1, \dots, t^{\sigma_i}, \dots, 1) \in T^p$, 其中 t 是 T^p 的第 i 个分量, t^{σ_i} 是 T^p 的第 i^δ 个分量, $\delta = (12 \cdots p)$, $(\sigma_i \sigma_{i+1} \cdots \sigma_p \sigma_1 \cdots \sigma_{i-1})^{p^{k_i}} = 1, \sigma_i \sigma_{i+1} \cdots \sigma_p \sigma_1 \cdots \sigma_{i-1} \in \text{Inn}(T), o(x) = p^{\max\{k_i\}+1}, i = 1, 2, \dots, p, \langle x \rangle$ 在集合 $\{T_1, T_2, \dots, T_p\}$ 上作用传递. 反之亦然.

(ii - b) 如果 D 是有限非交换单群, 则 $K \simeq T^n$ 是群 G 的唯一非平凡正规子群当且仅当 D 在集合 $\{T_1, T_2, \dots, T_n\}$ 上作用传递, 其中 $T_i \simeq T, i = 1, 2, \dots, p$. 特别地, K 在 G 中有补当且仅当 $G = (T_1 \times T_2 \times \cdots \times T_n) \rtimes D$, 且 D 在集合 $\{T_1, T_2, \dots, T_n\}$ 上作用传递.

证明(I) 的证明:

下证(i) 成立.

必要性:由 $1 \neq K \leq Z(G)$ 且由假设条件可得 $K = Z(G)$ 且 $|Z(G)| = p$.

设 $G/Z(G) \simeq S$, 仍由 $Z(G)$ 为群 G 的唯一非平凡正规子群可得 S 为有限非交换单群. 我们断言 G 为完备群. 若否, 由条件得 $G' = K$, K 可解, 所以 G 可解, 矛盾. 因此 G 为非交换单群 S 的覆盖, 且此覆盖的中心为素数阶循环群. 下证 $\Phi(G) \neq 1$. 如果 $\Phi(G) = 1$, 则存在 $M \triangleleft G$ 且 $Z(G) \not\leq M$. 由于 $Z(G) \simeq C_p$, 所以 $M \cap Z(G) = 1$, 且由 $M \triangleleft G$ 得 $G = \langle M, Z(G) \rangle = MZ(G)$, 所以 $G = M \times Z(G)$, 与群 G 的非平凡正规子群唯一矛盾. 故 $\Phi(G) \neq 1$, 由群 G 的非平凡正规子群唯一可得 $Z(G) = \Phi(G) \neq C_p$.

充分性:我们只需证明 $Z(G)$ 为群 G 的唯一非平凡正规子群. 用反证法, 假设 N 为 G 的不同于 $Z(G)$ 的非平凡正规子群, 由于 G 为某个有限非交换单群的覆盖, 所以 $G/Z(G)$ 同构于某个有限非交换单群. 故 $N \cap Z(G) = 1$, $NZ(G) = G$, 进而有 $G = Z(G) \times N$. 又 $Z(G) = \Phi(G)$, 这说明 $\Phi(G)$ 在 G 中有补. 矛盾.

下证(ii) 成立.

由 K 为群 G 的唯一非平凡正规子群得 $G/K \simeq D$ 是非交换单群, D 在 K 上作用不可约.

(ii - a) 的证明:

必要性:由仿射型本原置换群的定义可直接证得.

充分性:因为 G 是仿射型本原置换群, 且点稳定子群同构于 D , 则可设 $G = M \rtimes D$, 其中 $M \simeq C_p^n$, 并且 D 在 M 上作用不可约. 我们只需证明 M 为群 G 的唯一非平凡正规子群. 假设 N 为群 G 的

平凡正规子群且 $N \neq M$. 因为 $N \cap M \trianglelefteq G$ 且 D 在 M 上作用不可约, 所以 $N \cap M = 1$ 或 $N \cap M = M$. 如果 $N \cap M = 1$, 因为 $N \simeq NM/M \trianglelefteq G/K = DM/M \simeq D$ 且 D 是单群, 所以 $N \simeq D$. 因此 $G = NM$, 进而有 $G = N \times M$. 因为 $M \simeq C_p^n$, 所以 $C_p \trianglelefteq G$. 这与 D 在 M 上作用不可约矛盾. 故 $N \cap M = M$, 即 $M \leq N$. 又由 $G/M \simeq D$ 为单群得 $N = M$, 矛盾.

所以情形(ii - a) 成立. 如果 G 是 K 被 D 的非可裂扩张, 则为情形(ii - b).

(II) 的证明:

由于 K 为群 G 的唯一非平凡正规子群, 所以 K 为特征单群. 又由 K 非可解, 故 $K \simeq T^n$, 其中 T 为有限非交换单群.

下证(i) 成立.

必要性: 若 $K = T$, 因为 $C_G(T) \trianglelefteq G$, 所以 $C_G(T) = 1$. 否则可得 T 为交换群, 矛盾. 对 T 用 N/C 定理得 $T \leq G \leq \text{Aut}(T)$, 所以 G 为几乎单群. 因为 $G/T \leq \text{Aut}(T)/T \simeq \text{Out}(T)$, 所以由 $\text{Out}(T)$ 可解, G/T 可解. T 为群 G 的唯一非平凡正规子群, 故 G/T 为单群, 进而可得 G/T 为素数阶循环群.

充分性: 由条件可得 T 为群 G 的非平凡正规子群, 我们只需证明 T 为群 G 的唯一非平凡正规子群. 用反证法, 假设 N 为群 G 的不同于 T 的非平凡正规子群. 因为 $N \cap T \trianglelefteq T$, 所以由 T 为单群可得 $N \cap T = 1$ 或 $N \cap T = T$. 若 $N \cap T = T$, 则 $N = G$, 矛盾; 若 $N \cap T = 1$, 则 $G = NT = N \times T$. 又可得 $N \leq C_{\text{Aut}(T)}(\text{Inn}(T)) = 1$. 故 $N = 1$, 矛盾.