

 高职高专适用教材

# 应用数理统计

YINGYONG  
SHULI  
TONGJI

林沛玉 主编

 广东高等教育出版社  
Guangdong Higher Education Press

 高职高专适用教材

# 应用数理统计

YINGYONG  
SHULI  
TONGJI

主 编 林沛玉  
副主编 傅 薇 吴志寒  
编 者 林沛玉 傅 薇 吴志寒  
黄映玲 阮丽华 黄开情

 广东高等教育出版社  
Guangdong Higher Education Press

· 广州 ·

图书在版编目 (CIP) 数据

应用数理统计/林沛玉主编. —广州: 广东高等教育出版社,  
013.8

ISBN 978 - 7 - 5361 - 4955 - 7

I. ①应… II. ①林… III. ①数理统计 - 高等职业教育 -  
教材 IV. ①O212

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2013) 第 198305 号

出版发行 广东高等教育出版社

地址: 广州市天河区林和西横路 邮政编码: 510500

电话: (020) 87553335 87551077

<http://www.gdgjs.com.cn>

印 刷 广州市穗彩彩印厂  
版 次 2013 年 8 月第 1 版  
印 次 2013 年 8 月第 1 次印刷  
开 本 787 mm × 1 092 mm 1/16  
印 张 16.25  
字 数 300 千字  
印 数 1 ~ 2 000 册  
定 价 33.00 元

## 前 言

“应用数理统计”是我院精品课程。为了满足教学和课程建设的需要，我们编写了本教材。教材主要介绍了在食品、药品、化妆品、医疗器械、管理等各类专业（如食品药品监督管理、食品营养与检测、功能性食品生产技术、药物制剂技术、化学制药技术、安全技术管理、化妆品技术与管理、药学、药物分析技术、医疗器械制造与维护专业，等等）领域实用数据资料的搜集整理、分析和解释的方法。旨在通过本课程的学习，使高职高专学生能获得适应社会生活和进一步发展所必须的数理统计的基础知识、基本技能、基本思想、基本活动经验。

为了保证本教材的教学适用性，在编写前期我们对学校各个专业在应用数理统计知识的需求方面做了大量的调查和分析。对国内近年来出版的同类教材的特点进行比较和分析，在教材体系、内容安排和例题配置上吸取了它们的优点。并根据目前教学学时数，为了保证教材难易程度适中，同时为了培养学生的应用能力，教材中安排了数学实验部分，有助于提高学生动手能力和运用 Excel 及 SPSS 等软件进行数据处理的能力。因此，本教材有以下特点：

1. 简明扼要，深入浅出，精炼严谨，必需够用。在引入概念时，注意以学生易于接受的方式叙述，给出教材中一些定理证明，同时选用专业案例作为例题说明。编写内容更加切合教学实际。本教材结构体系也更为合理完善。

2. 突出数理统计发展迅速、内容丰富、应用广泛的特点。本教材穿插了一些与食品药品等学科紧密联系的内容及实际案例。同时，每章后面介绍与其内容相关的杰出统计学家，以促进学生对相应领域数学史的了解，拓展知识面，提高学习兴趣，陶冶良好的思想品质和科学的钻研精神，激发学生学以致用的热情。

3. 针对学生专业特点和数学基础，突出教学的应用性、操作性。本教材重点增加了计算机应用的统计方法介绍，同时给出典型案例，能有效促进学生的模仿应用。

本教材共9章，参与编写工作的有广东食品药品职业学院的林沛玉老师（第三章，第四章，第九章 §9.7，附录：常用统计表的编制）、傅薇老师（第七章，第九章 §9.1 ~ §9.6、§9.8）、吴志寒老师（第五章，第八章）、

黄映玲老师（第一章）、阮丽华老师（第六章），东莞职业技术学院的黄开情老师（第二章）。全教材由林沛玉老师统稿。

本教材的编写结合了当前高职高专人才培养的需要，是一本以学生为本，具有专业特色，符合教学实际需要的应用数理统计教材，对培养高职高专学生运用数理统计的思想、观点和方法，合情推理的能力具有重要的意义。

同时，本教材还是下列数项科研课题的研究成果：广东省教育科学规划项目——基于数学实验平台的高职数学教学改革研究（课题批准号：2010tjk153）；广东省高等职业技术教育研究会课题——以职业能力为导向的高职数学有效教学研究（课题编号：GDGZ11Y065）；广东省高教学会 2012 年高等教育科学研究课题——高职数学课程与专业相结合的校本研究（课题批准号：11GJB125108）。

由于编写时间及编者水平所限，教材中难免有疏漏之处，恳请各位专家、读者批评指正，以便于今后进一步修改完善。

编者

2013 年 6 月 18 日

## 目 录

|                   |       |
|-------------------|-------|
| 第一章 随机事件          | (1)   |
| § 1.1 随机事件和概率     | (1)   |
| § 1.2 条件概率和事件的独立性 | (6)   |
| § 1.3 随机变量及概率分布   | (9)   |
| § 1.4 随机变量的数字特征   | (17)  |
| 第二章 数据的统计描述       | (23)  |
| § 2.1 数据的分类与整理    | (23)  |
| § 2.2 数据分布的统计特征描述 | (29)  |
| § 2.3 统计图表        | (34)  |
| 第三章 统计量与参数估计      | (44)  |
| § 3.1 统计量         | (44)  |
| § 3.2 统计推断的常用分布   | (46)  |
| § 3.3 点估计和估计量的求法  | (54)  |
| § 3.4 区间估计        | (57)  |
| 第四章 假设检验          | (68)  |
| § 4.1 假设检验概述      | (68)  |
| § 4.2 单个总体参数的假设检验 | (71)  |
| § 4.3 两个总体参数的假设检验 | (77)  |
| 第五章 抽样调查          | (87)  |
| § 5.1 抽样调查概述      | (87)  |
| § 5.2 抽样误差        | (90)  |
| § 5.3 抽样估计和抽样推断   | (97)  |
| § 5.4 抽样单位数目的确定   | (98)  |
| § 5.5 抽样调查的组织形式   | (101) |
| 第六章 方差分析          | (111) |
| § 6.1 方差分析概述      | (111) |
| § 6.2 单因素方差分析     | (114) |
| § 6.3 双因素方差分析     | (119) |
| 第七章 正交试验设计        | (130) |
| § 7.1 正交试验设计与直观分析 | (130) |

|  |       |
|--|-------|
| § 7.2 正交试验的方差分析 .....                    | (133) |
| <b>第八章 相关与回归分析</b> .....                 | (140) |
| § 8.1 相关分析 .....                         | (140) |
| § 8.2 一元线性回归 .....                       | (145) |
| § 8.3 多元线性回归 .....                       | (151) |
| <b>第九章 统计分析的 Excel 应用与 SPSS 应用</b> ..... | (158) |
| § 9.1 数据整理与统计作图 .....                    | (158) |
| § 9.2 常用分布的概率计算 .....                    | (165) |
| § 9.3 总体参数的区间估计 .....                    | (175) |
| § 9.4 假设检验 .....                         | (180) |
| § 9.5 抽样技术 .....                         | (187) |
| § 9.6 方差分析 .....                         | (189) |
| § 9.7 正交试验设计 .....                       | (195) |
| § 9.8 相关与回归分析 .....                      | (201) |
| <b>附录:常用统计表</b> .....                    | (210) |
| 附表 1 二项分布表 .....                         | (210) |
| 附表 2 泊松分布表 .....                         | (213) |
| 附表 3 标准正态分布表 .....                       | (215) |
| 附表 4 标准正态分布的上侧分位数表 .....                 | (217) |
| 附表 5 卡方分布的上侧分位数表 .....                   | (219) |
| 附表 6 $t$ 分布的上侧分位数表 .....                 | (220) |
| 附表 7 $F$ 分布的上侧分位数表 .....                 | (222) |
| 附表 8 二项分布参数 $p$ 的置信区间表 .....             | (226) |
| 附表 9 检验相关显著性的临界值表 .....                  | (232) |
| 附表 10 正交表 .....                          | (233) |
| 附表 11 概率面积、概率度对应表 .....                  | (239) |
| 习题参考答案 .....                             | (241) |
| 参考文献 .....                               | (253) |

# 第一章 随机事件

**【学习目标】** 概率是研究某个事件发生的可能性有多大。概率论 (Probability) 重点是对客观随机现象提出各种不同的理想化的数学模型, 并研究内在的性质与相互联系, 数理统计是以概率论为基础。本章重点是计算各种事件的概率, 根据实际问题确立样本空间、抽样方式和样本点的个数; 正确理解随机变量的数学期望和方差的概念; 掌握和运用随机变量是描述随机事件的方法, 明确随机变量的概率分布以及分布函数。对于离散型随机变量的二项分布、泊松 (Poisson) 分布和连续型随机变量 (Continuous random variable) 的正态分布必须要熟练掌握。

## § 1.1 随机事件和概率

### 一、随机事件

在科学研究或工程技术中, 在不变的条件下重复地进行多次试验或观测, 我们假定这种综合条件可以任意多次重复实现, 大量现象就是很多次试验的结果。

当一定综合条件实现时, 也就是在试验的结果中, 所发生的现象叫事件。如果在每次试验中, 某一事件一定发生, 则称这一事件叫必然事件 (certain event)。相反地在某事件一定不会发生, 则称这事件叫不可能事件 (impossible event)。在试验结果中, 可能发生, 也可能不发生的事件叫随机事件 (random event)。

通常我们用字母  $A, B, C, \dots$  表示随机事件, 而用字母  $\Omega$  表示必然事件, 用字母  $\phi$  表示不可能事件。

**例 1-1-1** 将一个物体往上抛, 在地心引力作用下, 它一定下落。下落就是上抛和地心引力这一条件实现下的必然结果, 因此是必然事件。例如在地心引力作用下, 上抛一物体飞到地球外面去, 这是不可能事件。例如从一批产品中抽取一件产品, “这产品是合格产品” “这产品是废品”, 这是两个随机事件; 若从这批产品中任意抽取三件产品, “三件产品全部合格” “有一件合格” “有两件合格” “至少有一件合格” “三件都不合格” 这些事件叫随机事件。



为了研究随机事件及概率,我们首先要说明事件之间的各种关系。

## 二、事件间的关系和运算

(1) 如果事件  $B$  发生,必然导致事件  $A$  的发生,则事件  $A$  包含事件  $B$ ,或者称事件  $B$  包含于事件  $A$ ,记为:  $A \supset B$  或  $B \subset A$ 。

(2) 如果两事件  $A$  与  $B$  同时发生,这一事件叫做事件  $A$  与事件  $B$  的积。记为:  $A \cap B$  或  $A \cdot B$ , 或  $AB$ 。

(3) 如果两个事件  $A$  与  $B$  中至少有一事件发生,这事件叫做事件  $A$  与事件  $B$  的和。记为  $A \cup B$  或  $A + B$ 。

(4) 如果事件  $A$  发生,而事件  $B$  不发生,则称为事件  $A$  与事件  $B$  之差,记为  $A - B$ 。

(5) 如果事件  $A$  与事件  $B$  不可能同时发生,即  $A \cap B = \phi$ ,则称事件  $A$  与事件  $B$  是互不相容的或称是互斥的。

(6) 如果事件  $A$  与事件  $B$  是互不相容的,并且它们中必有一事件发生。即一事件  $A$  与  $B$  中有且仅有一事件发生,即  $A \cup B = \Omega$  或  $A \cap B = \phi$ ,则称  $A$  与  $B$  是对立的(或互逆的),称  $B$  是  $A$  的对立事件(或逆事件)。同样,  $A$  是  $B$  的对立事件(或逆事件),记为  $\bar{A} = B$  或  $\bar{B} = A$ 。

(7) 如果事件  $B$  包含事件  $A$ ,且事件  $A$  包含事件  $B$ ,即两事件  $A$  与  $B$  中一事件发生,必然导致另一事件发生,则事件  $A$  与事件  $B$  相等,记为  $A = B$ 。事件间的关系和运算图示见图 1-1。

## 三、事件的运算性质

我们在讲事件的关系中,简单介绍了一些简单运算,如和、差、积等。现在要运用这些运算关系来得出联合运算的几个重要关系式:

(1) 交换律:  $A \cup B = B \cup A$ ,  $A \cap B = B \cap A$ 。

(2) 结合律:  $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ ,  $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ 。

(3) 分配律:  $(A \cup B) \cap C = A \cdot C \cup B \cdot C$ ,  $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$ 。

(4) 德·摩根(De Morgan)对偶率:  $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$ ,  $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$ 。

例 1-1-2 设  $A$ 、 $B$ 、 $C$  是三个事件,则

(1)  $A$  发生而  $B$  与  $C$  不发生,用式子表示为:

$$A\bar{B}\bar{C} = A - B - C = A - (B \cup C)$$

(2)  $A$  与  $B$  都发生,而  $C$  不发生,可表示为:

$$A \cdot B \cdot \bar{C} = AB - C = AB - ABC$$

(3)  $A$ ,  $B$ ,  $C$  三个事件恰好发生一个,可表示为:

$$\bar{A}\bar{B}C + \bar{A}B\bar{C} + A\bar{B}\bar{C}$$

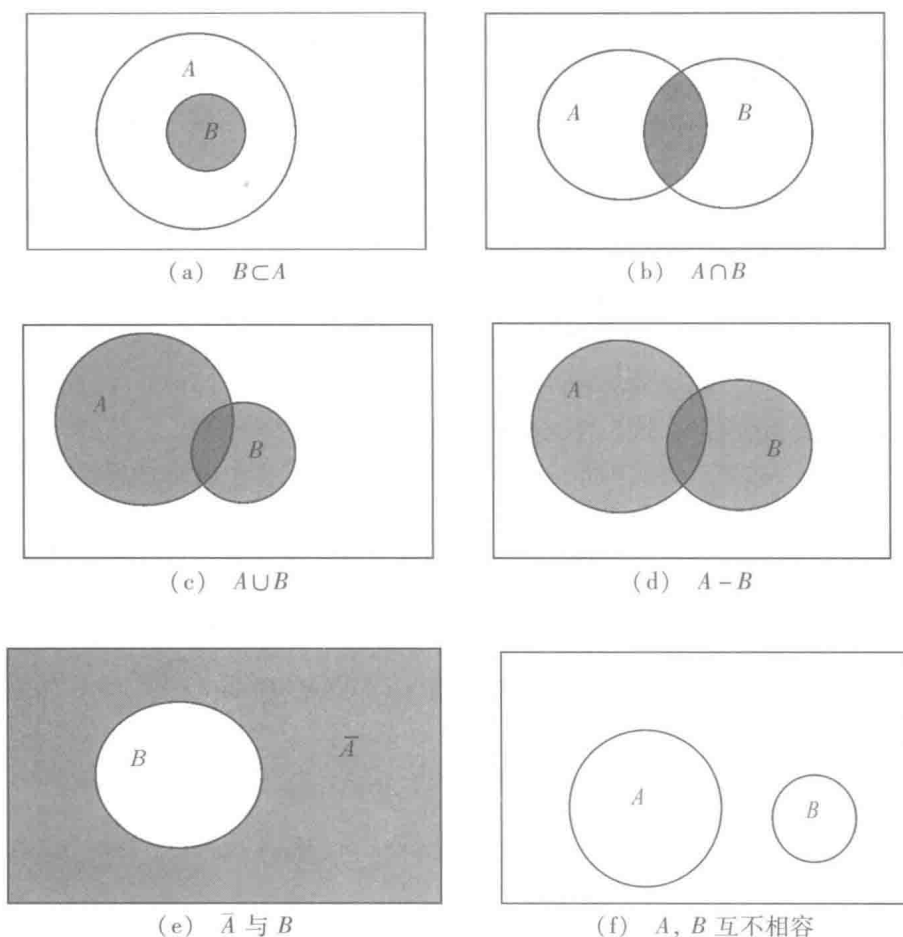


图 1-1 事件间的关系和运算图示

(4)  $A, B, C$  三个事件至少发生一个, 可表示为:

$$A \cup B \cup C = \bar{A}\bar{B}C + \bar{A}B\bar{C} + A\bar{B}\bar{C} + \bar{A}B\bar{C} + \bar{A}\bar{B}C + A\bar{B}C + A\bar{B}\bar{C} + ABC$$

#### 四、古典概率与统计概率

**定义 1-1-1 (古典概率)** 对于某个随机试验 (random experiment), 如果有且仅有  $n$  个基本事件, 而且每个基本事件是等可能的, 则当事件  $A$  中包含  $m$  个基本事件时 (或  $m$  个基本事件具有性质  $A$ ), 事件  $A$  的概率为:

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

**例 1-1-3** 某种产品 100 件，其中 90 件是合格品，10 件为不合格品。从这种产品中任取 10 件，问其中只有一件不合格的概率是多少？

**解：**设从产品 100 件中任取 10 件，其中只有一件不合格的产品为事件  $A$ 。显然， $A$  中含有  $C_{90}^9 C_{10}^1$  个基本事件，这是因为  $A$  中只含有一件不合格的产品，其他 9 件必须是合格的。这个不合格的产品应从 10 件不合格产品中任取一件，同时 9 件合格产品是从 90 件合格产品中任取 9 件，根据古典概率定义：

$$P(A) = \frac{C_{90}^9 C_{10}^1}{C_{100}^{10}} = 0.0408$$

**例 1-1-4** 箱中盛有 60 个苹果，40 个梨，从箱中任取 3 个水果。求下列两种抽样情况下，这 3 个水果是苹果的概率。

(1) 返回抽样：每次抽取一个水果看明是苹果或者是梨之后，放回箱内，然后再随机抽取一个水果。

(2) 不返回抽样：每次抽一个，取出后不放回，在剩下的水果中再随机抽取下一个。

**解：**设  $A$  表示事件从 {100 个水果中任取 3 个，这 3 个都是苹果}。

(1) 在返回抽样下，总的基本事件数  $n = (60 + 40)^3 = 100^3$ ，而  $A$  中所包含事件数  $m = 60^3$ ，所以

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{60^3}{100^3} = 0.216$$

(2) 不返回抽样条件下，总的基本事件数  $n = 100 \times 99 \times 98$ ，而  $A$  中所含基本事件数  $m = 60 \times 59 \times 58$ 。所以

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{60 \times 59 \times 58}{100 \times 99 \times 98} = 0.212$$

从这个例中可见两种抽样方式虽然不同，但就同一事件的概率而言，却是相等的，因此两种抽样方式可以互相代替。

古典概率定义虽然很简单，但它具有很大的局限性，因为它只考虑基本事件是有限的情况，而在实际中经常要考虑事件是无限的情况。

在古典概率的定义中要求事件发生的等可能性，对于一般的随机试验，不一定有这样的等可能性存在，那么，在一般情况下，是否可以用数字来度量随机事件出现的可能性大小？回答是肯定的，我们从随机事件的频率来研究。

**定义 1-1-2 (频率)** 设随机事件  $A$  在  $n$  次试验中出现  $m$  次, 则比值  $\frac{m}{n}$  称为  $n$  次试验中事件  $A$  出现的频率, 记为  $W(A)$ , 即  $W(A) = \frac{m}{n}$ 。显然, 任何随机事件  $A$  在  $n$  次试验中出现的频率介于 0 和 1 之间的一个数, 即  $0 \leq W(A) \leq 1$ 。

如果  $A$  是必然事件 (certain event), 则  $A$  在  $n$  次试验中出现的次数  $m = n$ , 所以频率为 1。如果事件  $A$  是不可能事件 (impossible event), 则有  $m = 0$ , 所以不可能事件出现的频率为 0。经验证明, 当试验重复很多次时, 事件  $A$  出现的频率具有一定的稳定性, 当试验次数充分大时, 随机事件  $A$  出现的频率在区间  $[0, 1]$  上的某个确定数字  $P$ , 这是事件  $A$  本身的一种固有的特性, 这种属性正好可以用来描述事件  $A$  出现的可能性大小, 因此, 可以将频率引进概率。

**定义 1-1-3 (统计概率)** 设  $n$  是试验次数,  $m$  是事件  $A$  出现的次数, 如果  $W(A) = \frac{m}{n}$ , 当  $n \rightarrow \infty$  时有极限, 即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} W(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m}{n} = P$$

则称  $P$  为事件  $A$  的概率。记为  $P(A) = P$ 。概率这种定义, 称为概率的统计定义, 或称概率的频率极限定义。

## 五、概率的基本性质

概率有如下基本性质:

(1) 对于事件  $A$ , 有  $0 \leq P(A) \leq 1$ 。

(2)  $P(\Omega) = 1, P(\Phi) = 0$ 。

(3) 设事件  $A_1, A_2, \dots, A_n$  两两互斥, 则有

$$P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n)。$$

(4) 如果事件  $A$  与事件  $B$  是互不相容事件, 则有  $P(A + B) = P(A) + P(B)$ 。

(5) 如果事件  $A \supset B$ , 则有  $P(A - B) = P(A) - P(B)$ 。

(6) 对于任意两个事件  $A$  和  $B$ , 则有  $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$ 。

(7) 事件  $A + \bar{A} = \Omega, P(A + \bar{A}) = P(\Omega) = 1$ 。由于  $P(A + \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A})$ , 所以

$$P(A) = 1 - P(\bar{A})$$

**例 1-1-5** 一批产品共有 150 件，其中 145 件是合格品，另 5 件是不合格品；从这批产品中任意抽取 3 件，每次抽出后不再放回，求其中有不合格品的概率。

**解法 1:** 抽出的三件产品中有不合格产品事件，可以看作三个互斥事件的和，即  $A = A_1 + A_2 + A_3$ ，其中事件  $A_i$  为 {取出三件产品中恰好有  $i$  件不合格} ( $i=1, 2, 3$ )。于是有

$$P(A_1) = \frac{C_5^1 C_{145}^2}{C_{150}^3} = 0.0947$$

$$P(A_2) = \frac{C_5^2 C_{145}^1}{C_{150}^3} = 0.0026$$

$$P(A_3) = \frac{C_5^3 C_{145}^0}{C_{150}^3} = 0.00001$$

由于  $A_1, A_2, A_3$  两两互斥，所以

$$P(A) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) = 0.09731$$

**解法 2:** 设  $A$  为事件 {三件产品中有不合格产品}，则  $\bar{A}$  就是抽出的三件产品全是合格品，则

$$P(\bar{A}) = \frac{C_{145}^3}{C_{150}^3} = 0.90269$$

所以

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 0.09731$$

## § 1.2 条件概率和事件的独立性

前面讨论的某事件  $A$  的概率，都只是在某一试验的情况下进行的，没有其他附加条件。而条件概率  $P(A|B)$  和非条件概率  $P(A)$  的区别，在于它是除了在一组确定的基本条件之外，还要加上在事件  $B$  已发生的条件。由于二者的试验条件不同，所以，它的基本事件总数也就不同，从而得到的概率也不同。

如果我们在事件  $B$  已发生的条件下，计算事件  $A$  的概率，则这种概率叫做事件  $A$  在事件  $B$  已发生的条件下的条件概率 (conditional probability)，记为  $P(A|B)$ 。

**例 1-2-1** 有两台车床，加工同一种机械零件如下表：

|          | 合格品数 | 不合格品数 | 总计  |
|----------|------|-------|-----|
| 第一台加工零件数 | 35   | 5     | 40  |
| 第二台加工零件数 | 50   | 10    | 60  |
| 总计       | 85   | 15    | 100 |

从这 100 个零件中任取一个零件，取得合格品（设为事件  $A$ ）的概率为

$$P(A) = \frac{85}{100} = 0.85$$

如果已知取出的零件是第一台车床加工的（设为事件  $B$ ），则我们有条件概率为

$$P(A|B) = \frac{35}{40} = 0.875$$

如果已知取出的零件是第二台车床加工的（设为事件  $\bar{B}$ ），则我们有条件概率为

$$P(A|\bar{B}) = \frac{50}{60} = 0.833$$

**定义 1-2-1** 设  $A, B$  是在一组基本条件实现之下的两个事件。

若  $P(B) > 0$  在事件  $B$  已发生的条件下，事件  $A$  发生的条件概率  $P(A|B)$  定义为：

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

若  $P(A) > 0$  在事件  $A$  发生的条件下，事件  $B$  发生的条件概率  $P(B|A)$  定义为：

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$$

当  $P(B) > 0$ ，我们在上述条件概率  $P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$  等式两边乘以  $P(B)$ ，有

$$P(B) \cdot P(A|B) = P(AB)$$

当  $P(A) > 0$ ，我们在条件概率  $P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$  等式两边同乘以  $P(A)$ ，有

$$P(A) \cdot P(B|A) = P(AB)$$

所谓概率乘法定理，就是交事件的概率，计算公式可由上述两个公式得到：

$$P(AB) = P(B) \cdot P(A|B) = P(A) \cdot P(B|A)$$

即两事件积的概率等于其中一事件的概率与另一事件在前一事件已发生的条件下条件概率的乘积。

**例 1-2-2** 据历年气象资料统计，某地四月份吹东风的概率为  $\frac{3}{10}$ ，既

吹东风又下雨的概率为 $\frac{4}{15}$ 。试问：吹东风与下雨之间是否有密切关系？

解：设 $B$ 表示吹东风， $A$ 表示下雨。则 $P(A|B)$ 的大小能够说明 $B$ 与 $A$ 的关系。

由题设有 $P(B) = \frac{3}{10}$ ,  $P(A \cdot B) = \frac{4}{15}$ , 所以

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{4/15}{3/10} = 0.8889$$

这说明吹东风与下雨关系密切。

**例 1-2-3** 今有 100 个圆柱形零件，其中有 95 个长度合格，有 94 个直径合格，有 92 个长度和直径都合格，从中任意抽取一个已量得长度合格。问该零件直径也合格的概率是多少？

解：设事件 $A$ 是直径合格，事件 $B$ 是长度合格，则事件 $A \cdot B$ 是零件合格。

于是有  $P(B) = \frac{95}{100}$ ,  $P(AB) = \frac{92}{100}$

所以  $P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{92/100}{95/100} = 0.9684$

**定义 1-2-2** 设 $A, B$ 是在一组基本条件实现之下的两个事件，如果事件 $A$ 的概率与事件 $B$ 的发生无关，即 $P(A|B) = P(A)$ 时，我们称事件 $A$ 对事件 $B$ 是独立的。

事件的独立性在概率论与数理统计中起着重大作用，在实际应用中通常是靠实践经验进行判断，当一个事件的发生不影响另一事件发生的概率，那么这两个事件是相互独立的，在返回抽样中多次抽查的结果，也是相互独立的，当事件 $A$ 与 $B$ 是独立的，它们的对立事件 $\bar{A}$ 与 $\bar{B}$ 也是独立的，对于有限个独立事件（independent event），积的概率等于这些事件概率的积：

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot \cdots \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \cdots \cdot P(A_n)$$

**例 1-2-4** 一批种子的发芽率为 0.9，如果播种时每穴播种 2 粒种子，求每穴有苗的概率。

解：设 $A$ 为某穴中第一粒种子发芽， $B$ 为同一穴中第二粒种子发芽，则穴中有苗的事件为 $A+B$ 。显然，事件 $A$ 与 $B$ 是相互独立的，于是有

$$\begin{aligned} P(A+B) &= P(A) + P(B) - P(A \cdot B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B) \\ &= 0.9 + 0.9 - 0.9 \times 0.9 = 0.99 \end{aligned}$$

**例 1-2-5** 加工某种零件，共需经过三道工序，设第一、第二、第三道工序的次品率分别是 2%，3%，5%。设各道工序是互不影响的，问加工

出来的零件是次品的概率是多少?

**解法 1:** 设事件  $A_1$  是第一道工序出现的次品,  $A_2$  是第二道工序出现的次品,  $A_3$  是第三道工序出现的次品。所以  $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3$ , 于是

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) \\ &= P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1 A_2) - \\ &\quad P(A_1 A_3) - P(A_2 A_3) + P(A_1 A_2 A_3) \end{aligned}$$

由于  $P(A_1) = \frac{2}{100}$ ,  $P(A_2) = \frac{3}{100}$ ,  $P(A_3) = \frac{5}{100}$ , 而且各道工序互不影响, 所以  $A_1, A_2, A_3$  都是相互独立。故有

$$P(A_1 A_2) = P(A_1) P(A_2) = \frac{2}{100} \times \frac{3}{100} = 0.0006$$

$$P(A_1 A_3) = P(A_1) P(A_3) = \frac{2}{100} \times \frac{5}{100} = 0.001$$

$$P(A_2 A_3) = P(A_2) P(A_3) = \frac{3}{100} \times \frac{5}{100} = 0.0015$$

$$P(A_1 A_2 A_3) = P(A_1) P(A_2) P(A_3) = \frac{2}{100} \times \frac{3}{100} \times \frac{5}{100} = 0.00003$$

$$\begin{aligned} \text{所以 } P(A) &= 0.02 + 0.03 + 0.05 - 0.0006 - 0.001 - 0.0015 + 0.00003 \\ &= 0.09693 \end{aligned}$$

**解法 2:** 我们用对立事件  $\bar{A}$  (即加工出来的零件是合格的) 来考虑, 有

$$\bar{A} = \overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3} = \bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot \bar{A}_3$$

$$P(\bar{A}_1) = 1 - 0.02 = 0.98$$

$$P(\bar{A}_2) = 1 - 0.03 = 0.97$$

$$P(\bar{A}_3) = 1 - 0.05 = 0.95$$

由于事件  $\bar{A}_1, \bar{A}_2, \bar{A}_3$  都是相互独立的, 于是

$$P(\bar{A}) = P(\bar{A}_1) \cdot P(\bar{A}_2) \cdot P(\bar{A}_3) = 0.98 \times 0.97 \times 0.95 = 0.90307$$

因此, 事件  $A$  所求的概率为:

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - 0.90307 = 0.09693$$

### § 1.3 随机变量及概率分布

为了从整体上把握某个随机试验总体的规律性, 必须把“变量”和“函数”的概念引入概率论, 使其能应用高等数学方法, 把每个随机事件 (random event) 与一个实数对应。这种对应方法称为随机变量 (random variable)。随机变量与一般的变量  $x, y, z, \dots$  不同, 为了区别, 我们通常用希



希腊字母  $\xi$ ,  $\eta$  等符号表示随机变量。与函数的概念相比较, 我们不难发现随机变量是一种函数, 它的定义域是样本空间  $\Omega$  中一切样本点, 而值域是实数域。由于历史的原因, 我们称这种函数为随机变量。

**例 1-3-1** 从一大堆产品中任意抽取 10 件, 其中所包含的次品个数  $\xi$  是一个随机变量:

如果 100 件产品中无次品,  $\xi$  取 0, 记为  $\xi = 0$ ;

如果 100 件产品中有一件次品,  $\xi$  取 1, 记为  $\xi = 1$ ;

.....

如果 100 件产品中有 10 件次品,  $\xi$  取 10, 记为  $\xi = 10$ ;

.....

所以随机变量  $\xi$  就取 0, 1, 2, ..., 100 中不同的值。

同一个基本事件在  $\Omega$  上可以定义不同的函数, 因此与同一个试验联系着的随机变量可以不只一个, 例如 100 件产品中所含合格产品的个数  $\eta$  又是另一个随机变量。

引入随机变量概念的目的不仅在于随机变量能取那些值、随机事件怎样用随机变量来表示, 而主要在于掌握随机变量以怎样的概率取这些值。

例如, 从甲乙两个厂分别抽取 5 件产品, 分别考查其中所含次品的个数, 显然可以设  $\xi$  表示从甲厂抽出的 5 件产品中所含次品的个数, 设  $\eta$  表示从乙厂抽出的 5 件产品中所含次品的个数, 则  $\xi$  和  $\eta$  都有取 0, 1, 2, 3, 4, 5 共 6 个值的可能性, 从比较  $\xi$  和  $\eta$  取各个值概率的大小中, 可以判断甲、乙两厂哪个厂产品质量高。也就是说, 我们要进一步掌握概率在随机变量的可能取值上的分配规律, 这种概率分配规律称为随机变量概率分布。

随机变量分为两类, 其中一类随机变量取值个数是有限个 (或称可数个), 这一类随机变量称为离散型随机变量 (discrete random variable); 另一类随机变量取值充满某个区间, 这种随机变量称为连续型随机变量 (continuous random variable)。

### 一、离散型随机变量及其分布

设  $\xi$  为随机变量, 如果它能取有限个或可数个值  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , 并且  $P(\xi = a_k) = p_k$ , 即  $\xi$  取  $a_k$  的概率为  $p_k$ , 则称  $\xi$  为离散型随机变量。

由概率定义可知,  $p_k$  满足:

$$(1) p_k \geq 0$$

$$(2) \sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1$$

我们可用列表来表示离散型随机变量的分布。