

龚冬保教授考研数学

2005 版

数学 考研

典型题

数学一

龚冬保 魏战线 张永怀 魏立线



西安交通大学出版社
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY PRESS

(2005 版)

数学考研典型题

考卷分析·应试对策·全真模拟

(数学一)

龚冬保 魏战线

张永怀 魏立线



西安交通大学出版社

· 西安 ·

内 容 简 介

本书自 1999 年问世以来,2005 版是最新修订版,也是本书第 6 版.在本书问世后的 5 年中,每年均以高分覆盖考题.例如在 2000 年考研中,书中 36 道题命中考题中非客观题(大题)27 道(次)(数学一,8 题 49 分;数学二,7 题 44 分;数学三,6 题 41 分;数学四,5 题 44 分);2000 年修订后的第 2 版中相似题覆盖 2001 年考题 66 道(次)332 分(数学一 68 分,数学二 90 分,数学三 83 分,数学四 91 分);2001 年修订后的 2002 版中覆盖 2002 年考题 338 分(数学一 87 分,数学二 91 分,数学三 81 分,数学四 79 分);2002 年修订后的 2003 版中覆盖 2003 年考题 561 分(数学一 142 分,数学二 139 分,数学三 142 分,数学四 138 分).2004 年情况见本书附录.

本书由四部分组成:第一部分是考卷分析:对新“考试大纲”问世后 2002~2004 年的数学考研考卷作了列表分析,将每套考卷的内容覆盖、数学能力、认知水平及难度都量化了;第二部分是应试对策:讲的是复习备考及身临考场的策略;第三部分是典型题选讲与练习:选了 1500 余道题,其中 500 多道例题(包含了往届的考题),讲解采用分析、注释、一题多解等讲法,讲解解题的方法与技巧,所有练习题均给出了答案与提示;另外,附录中收录了 2002~2004 年考研试卷,并做了解答.

本书可供准备考研的读者使用,也可供大学数学教师参考.

图书在版编目(CIP)数据

数学考研典型题—2005 版(数学一)/龚冬保等编著.
—6 版(修订版).—西安:西安交通大学出版社,2004.4
ISBN 7-5605-1127-9

I. 数… II. 龚… III. 高等数学—研究生—入学考试—试题
IV. O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 13559 号

书 名	数学考研典型题—2005 版(数学一)
	考卷分析 应试对策 全真模拟
主 编	龚冬保
编 著	魏战线 张永怀 魏立线
出版发行	西安交通大学出版社
地 址	西安市兴庆南路 25 号(邮编:710049)
电 话	(029)82668357 82667874(发行部)
	(029)82668315 82669096(总编办)
印 刷	西安建筑科技大学印刷厂
字 数	730 千字
开 本	787mm×1092mm 1/16
印 张	25.625
版 次	2004 年 4 月第 6 版 2004 年 4 月第 1 次印刷
书 号	ISBN 7-5605-1127-9/O·144
全套定价	102.00(本册定价 39.00 元)

版权所有 侵权必究

2005 版 前 言

本书已出到了第六版,由于特点鲜明,受到广大读者一致好评.但也有不少读者建议我们将数学一、二、三、四分开出版,以使针对性更强.因此,从2005版开始,我们将本书分成三册出版:“数学一”分册,“数学二”分册,“数学三和数学四”分册.同时,我们对本书也作了较大的修改,主要是:

1. 各分册的篇幅减少了.即使是考试内容最多的数学一也不含诸如差分方程的内容,而数学二则因不考概率论与数理统计部分,篇幅减少的最多.

2. 针对性更强了.趁修改机会,我们再一次依据最新的“考试大纲”,将个别“超纲”的例题或习题删去,使各分册紧扣各自大纲要求的内容.这样,考生用起来更方便.

3. 修改了一些例题和习题.对保留的例题习题存在的错误作了进一步的订正.

4. 附加一篇分析2004年考卷的专题文章,加上第一章的“考卷分析”,本书已相当详尽地分析了近三年的考卷.对于帮助考生了解考试题的特点,因而知道如何着手复习迎考,是十分重要的.希望读者仔细阅读这些内容,认真分析近年的考卷,再结合自己的实际,制订一个复习数学课程的计划,以提高复习的效率增强复习的效果.

本书的“典型”例题与习题之所以典型,在于这些例题的内涵很丰富.所以年年的考卷与我们的题相似的题,都在80%以上(见附录E).由于各题内涵丰富,加以我们在旁注中、在解题方法上的引伸,有的读者一时难以消化.所以,我们建议读者在用本书时,一定要把我们的例题当习题,先自己做一遍,实在不会了再看解答,看懂了再把书放在一旁重新做,复习到一定时间后,再反过头来做这些题.直到能熟练做出为止.然后再做各章的一些练习题.

尽管我们对本书下了不少功夫,年年修改.但依然发现有不足之处,所以,恳切希望读者多提意见和建议.以使本书越改越好.

著者

2004.早春二月于交大

2004 版 前 言

这一版,与前面几版比较,变化较大,主要有:

1. 原书的第 13 章模拟题及答案去掉了,从 2002 年起,我们和《数学考研教程》一书的编者,根据当年最新的信息,有针对性地另行编写《数学考研模拟考试试卷》,于当年 11 月前后单独出版,供考生检验复习效果和考前冲刺作用。

2. 第 1 章每年根据最近的考试情况有较大的修改;

3. 其余各章又增、删了一些例题与习题。

本书自问世以来,每年一版,由于我们紧扣“考试大纲”,精选和编制了一些针对性强的典型题,而且书中旁注“画龙点睛”强调了一些重要的题型、考点及解题的思路与方法,因此本书的典型题与年年考研的题相似的很多。同时,本书前两章所讲“考卷分析”及“应试策略”也日益受到读者的关注,不少读者反映,这两章对他们考上研究生起了很大的作用。这一切都是对编者最大的鼓舞和激励,我们一定倍加努力,将此书越改越好。

此书排版差错以及编者的疏漏,年年有读者指正,在此表示衷心感谢。虽屡经修改,挂一漏万之事仍难以避免,诚恳希望读者像以往一样提出宝贵意见。

编者

2003.3 于西安交大

第 1 版 前 言

每当我们上了数学考研辅导课后,总有不少同学建议我们写一本考研辅导的书。在考生朋友不断地鼓励和期盼下,我们终于写成了此书,希望它能成为众多考生的一个好朋友,陪伴着他们去数学考场“潇洒走一回”。

通过目录,读者可以了解到本书的特点:第一部分(第 1 章)是考卷分析。新的“考试大纲”是 1997 年开始执行的,数学一是工学类代表,数学三是经济类的代表。我们对 1997 至 1999 三年的六份考卷一一作了列表分析。通过这些表格,将每套考卷的内容覆盖、数学能力、认知水平及难度都量化了。只要看看六张表格中的数字,就能知道每套考卷主要考些什么。比如在数学能力方面,计算题基本上要占 50 分以上;在认知水平上,要求“理解”水平的题在一半左右;在难易程度上,中档题占一半左右,等等。这样,您看了本书第 1 章应当对数学考试“心中有数”了。进一步,如果您借助我们设计的表格,按照自己的水平,去独立分析一两套试卷,那么就应当如何去准备这场考试了。因此,第 1 章是作复习前准备必不可少的。第二部分(第 2 章)是应试对策,讲的是复习迎考及身临考场的策略。在有一定数学水平的基础上,能不能考出理想成绩,就要看您的发挥了,如何能发挥好,应试策略是关键。而“策略”又是最容易被人们忽视的。“考试又不是打仗,讲什么策略”?岂不闻考场如战场,策略往往是成败的关键。我们写这一章也是个尝试,希望能引起考生对策略问题的重视。其实,对策是人们干什么事都应考虑的,所谓“优化运筹”不就是要寻找最优对策吗?有了好的复习迎考对策,在此基础上,订一个切实可行的计划,就可以帮助你以高效率 and 好效果较轻松地争取好成绩。第三部分(第 3~12 章)是典型题的选讲与练习,这是本书的主要部分。我们选了 1500 多道题,其中 500 道例题,采用分析、注释、一题多解等讲法,讲解解题的方法与技巧,所有练习题均给出了答案与提示。要想考个好成绩,关键是提高解题能力。我们的书主要围绕基本运算和推理能力、灵活善变的解题技巧、综合运用所学知识及提高应用意识来选题、讲题和布置练习题的。我们不主张单纯“猜题”,认为只要内容覆盖面全,主要方法都练到了,就能考好,比“猜题”更稳妥,而且有利于提高数学素养;第四部分(第 13 章)是模拟题,数学一和数学三各两套。在复习时,请先不要看模拟题,复习完临考前再用这两套题来进行两次“热身”。用三小时做一套题,看看自己究竟如何,最后找找差距。值得说明的是,本书中模拟题也有特色,它是以“从难、从严、从实战”出发设计的。每套试卷比正式考卷更难些,综合题、应用题多些,读者如能在三小时内将我们提供的每套考卷完成,并能获得 60 分以上的平均成绩,那么,上了考场,正常发挥也一定能考 60 分以上。但您如果提前看过了题目,再去做效果就不好了。

以上是我们编写本书的主要想法,但总觉得编写仓促,书中可能会有不少的问题和漏洞,恳切地希望读者多多批评指正。

感谢西安交通大学出版社的支持,使这本书能以面世,感谢关心与鼓励我们的朋友们!

编者

1999.5 于西安交大

目 录

前言

第 1 章 考卷分析

1.1	分析的必要性	(1)
1.2	微观分析举例	(1)
1.3	宏观分析	(6)
1.4	小结与预估	(9)

第 2 章 应试对策

2.1	全面复习 把书读薄	(14)
2.2	突出重点 精益求精	(16)
2.3	基本训练 反复进行	(20)
2.4	探索思路 归纳方法	(24)
2.5	制定目标 增强信心	(26)
2.6	稳扎稳打 细心应付	(27)
2.7	机动灵活 定能潇洒	(29)

第 3 章 函数 极限 连续

3.1	函数 极限	(32)
3.2	连续函数	(40)
	练习题	(42)
	答案与提示	(45)

第 4 章 一元函数微分学

	练习题	(65)
	答案与提示	(72)

第 5 章 一元函数积分学

5.1	不定积分	(76)
5.2	定积分及其计算	(82)
5.3	积分的证明及应用例题	(92)
	练习题	(103)
	答案与提示	(108)

第6章 向量代数与空间解析几何

6.1 向量代数	(112)
6.2 空间解析几何	(112)
练习题	(116)
答案与提示	(118)

第7章 多元函数微分学

7.1 极限、连续、偏导数及微分	(120)
7.2 多元函数微分法	(123)
7.3 多元函数微分应用	(131)
练习题	(139)
答案与提示	(149)

第8章 多元函数积分学

8.1 二重积分	(154)
8.2 三重积分	(165)
8.3 曲线积分	(170)
8.4 曲面积分	(179)
练习题	(189)
答案与提示	(197)

第9章 无穷级数

练习题	(209)
答案与提示	(212)

第10章 常微分方程

10.1 一阶微分方程及其应用	(214)
10.2 高阶微分方程及其应用	(224)
练习题	(235)
答案与提示	(237)

第11章 线性代数

11.1 行列式	(239)
11.2 矩阵	(247)
11.3 向量	(262)
11.4 线性方程组	(271)
11.5 特征值与特征向量	(290)
11.6 二次型	(306)
练习题	(315)
答案与提示	(322)

第 12 章 概率论与数理统计

12.1 随机事件与概率	(327)
12.2 随机变量及其概率分布	(332)
12.3 二维随机变量及其概率分布	(337)
12.4 随机变量的数字特征	(344)
12.5 大数定律和中心极限定理	(349)
12.6 数理统计的基本概念	(352)
12.7 参数估计	(356)
12.8 假设检验	(362)
练习题	(364)
答案与提示	(371)

附录A 2002~2004 年工学类数学试卷及答案

2002 年数学一试卷	(374)
2002 年数学二试卷	(376)
2003 年数学一试卷	(377)
2003 年数学二试卷	(379)
2004 年数学一试卷	(381)
2004 年数学二试卷	(383)

非客观题答案或提示

2002 年数学一	(385)
2002 年数学二	(385)
2003 年数学一	(386)
2003 年数学二	(387)
2004 年数学一	(387)
2004 年数学二	(388)

附录B 对 2001 年工学数学考研试卷的浅析

(388)

附录C 2003 年数学考研试卷分析

(390)

附录D 加强基本功训练与综合能力的训练

(396)

附录E 本书(2004 版)与 2004 年考研题的相似题对照表

(402)

第 1 章

考卷分析

本章主要对过去的一些典型试题作了深入的分析又对 2002、2003 年以及 2004 年的数学一考卷共 3 份以表格形式作了定量分析,以使考研同学较深入了解考研试卷的主要特征.



1.1 分析的必要性

为什么要分析已考过的试卷?不少考生甚至觉得刚考过的题肯定不会再考了,对分析已考过试卷的必要性持怀疑态度,因此,我们先简单说一下分析的必要性.

考试是一种心理测量,一份考卷好比一杆“秤”.比如您上集市买菜,总要先看看秤一样,您准备考研究生,就得先分析考卷,看看在考试内容、考试难度、考题份量、认知和能力层次等等在每份考卷中是如何体现的,摸一摸近几年考卷的底,然后再制订适合自己的应试策略,从而减少复习迎考的盲目性.

对于考研试卷分析的方法,我们分为“微观分析”和“宏观分析”两种.首先作“微观分析”,就是对试卷中每道试题都要认真作,边作边分析这道题的考点,解这个题的思路及主要方法是什么,这一类题在考研中的地位等等.在“微观分析”的基础上进一步作“宏观分析”,我们的做法是,给每份试卷有一个表格,将这份试卷中的每道题的属性用数量表示在相应的空格之中,一份试卷一张表,只要看到表格中的数据,不必看具体的试卷本身,就可以了解这份试卷的考点分布、题型结构及整卷难度等等.

分析好,大有益.我们在本书中对 12 份试卷的分析,不仅仅是将分析结果告诉读者,更重要是希望读者学会本书介绍的分析方法,结合自己的实际,针对性更强地去独立分析自己准备投考的那一类考卷,以便作到对数学考研“心中有数”.



1.2 微观分析举例

例 1.1 我们试比较 2004 年工学和经济学的两道相似的试题:

(1) (2004, I、II) 设 $f(x)$ 连续,且 $f'(0) > 0$,则存在 $\delta > 0$,使().

(A) $f(x)$ 在 $(0, \delta)$ 单调增. (B) $f(x)$ 在 $(-\delta, 0)$ 单调减.

(C) 对 $\forall x \in (0, \delta)$ 有 $f(x) > f(0)$. (D) $\forall x \in (-\delta, 0)$ 有 $f(x) > f(0)$.

(2) (2004, III、IV) 设 $f'(x)$ 在 $[a, b]$ 连续, 且 $f'(x) > 0, f'(b) < 0$, 则下列结论中错误的是 ().

- (A) 至少存在一点 $x_0 \in (a, b)$ 使 $f(x_0) > f(a)$.
 (B) 至少存在一点 $x_0 \in (a, b)$ 使 $f(x_0) > f(b)$.
 (C) 至少存在一点 $x_0 \in (a, b)$ 使 $f'(x_0) = 0$.
 (D) 至少存在一点 $x_0 \in (a, b)$ 使 $f(x_0) = 0$.

解 选(C) 由 $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} > 0$, 知存在 $\delta > 0$, 当 $0 < x < \delta$ 有 $f(x) - f(0) >$

0. 故(C) 正确.

(2) 选(D), (A)(B) 的正确性即是(1)之选项(C). 至少(C)的正确性可用连续函数的介值定理; 故只有(D)的结论是不对的, 故选(D).

比较这两道题(1)中仅有一点的导数 $f'(0) > 0$ 的假设; (2)中设 $f'(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 而(2)中的选项(A), (B)均可用到(1)的概念, 即只要对导数概念清楚就行了. 在(1)中若假设 $f'(x)$ 在 0 点连续, 那么选项(A)也是对的. 证明是这样. 由 $f'(x)$ 连续, 且 $f'(x) > 0$ 故存在 $\delta > 0$, 在 $(0, \delta)$ 上 $f'(x) > 0$, 因此 $f(x)$ 在 $(0, \delta)$ 上单调增. 因此(2)的假设太强: 用 $f'(x)$ 的连续性由 $f'(a) > 0$ 知存在 $\delta_1 > 0$, 在 $(a, a + \delta_1)$ 上 $f(x)$ 单增. 当然有 $f(x_0) > f(a)$; 由 $f'(b) < 0$ 知存在 $\delta_2 > 0$, 在 $(b - \delta_2, b)$ 上 $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调减, 有 $f(x_0) > f(b)$ 十分简单. 因此(1)题要难些, 且选项(A)有迷惑性, 作这样的题要求概念清楚, 并直接证明(C)的正确性; 而(2)较简单, 用排除法较好因为(A)、(B)(C)是正确的结论太好证明了.

顺便指出如将(2)题的假设改成 $f'(x)$ 在 $[a, b]$ 上存在. 其它不变那么选项(A)、(B)、(C)中结论的正确性正是本书例 4.34(达布中值定理)的证(1). 读者不妨查读一下, 是完全一样的.

至于(2)的选项(D)的结论未必正确可以看一个很简单的例子: 设 $f(x) = 2 - x^2$, 在 $[-1, 1]$ 上, $f'(-1) = 2 > 0, f'(1) = -2 < 0$, 但在 $[-1, 1]$ 上 $f(x) \geq 1 > 0$, 不存在 0 点.

在考场上作这两个题用不了几行, 但剖析起来, 尤其是对照剖析, 使我们对极限、导数及连续性、单调性都有更深刻的领会, 甚至变化一下(2)题, 还可引领到“达布中值定理”这就是举一反三, 触类旁通的意思, 只限于会不会做这两道题去做题, 就不会有多大的收获. 这是我们说的微观分析的方法.

例 1.2 (2001, I) 设 $f(0) = 0$, 则 $f(x)$ 在 $x = 0$ 可导的充要条件是

- (A) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^2} f(1 - \cosh h)$ 存在. (B) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} f(1 - e^h)$ 存在.
 (C) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^2} f(1 - \sinh h)$ 存在. (D) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [f(2h) - f(h)]$ 存在.

解 选(B). 本题是概念性较强的题. 只要对导数的定义有透彻理解, 就能容易用排除法排除不正确选项. 如, 由定义知 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = f'(0)$. 而选项(A)、(C)中, 相当于 x 的因式是 h^2 , 只能取正数趋于 0, 不能作导数存在充要条件; 而选项(D)中的极限存在与 $f(0)$ 的取值无关, 也不能作可导充要条件. 因而只有(B)是正确的选项. 不必举反例, 也不要会证明选项(B)的正确性.

作为平时的练习, 深入分析本题, 则可以有许多启发. 首先, 我们来举反例否定三个不正确选项. 对(A)、(C), 可用同一反例: $f(x) = |x|$, 满足 $f(0) = 0$, 且 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1 - \cosh h)}{h^2} = \frac{1}{2}$ 存在及 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h - \sinh h)}{h^2} = 0$ 存在, 但 $f(x)$ 在 0 点不可导, 说明(A)、(C)选项均不对; 对于(D), 令

$f(x) = \begin{cases} 1, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$ 也有 $f(0) = 0$, $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2h) - f(h)}{h} = 0$ 存在, 而 $f(x)$ 在 0 点间断, 故不可导.

因此(D)也被排除. 仿此, 读者还可自己举出与上面不同的反例. 顺便提及, 本书的第4章之例4.3、4.4、4.5及其注释, 与本题的考点及分析问题方法以及在那里我们列举的反例, 均与本题是一致的. 由于导数概念的重要性, 此书的每一版都保留了这几个题. 读者可对比着看, 以加深对导数概念及其存在的充分条件、必要条件及充要条件的理解.

其次, 我们来证明选项(B)的正确性.

必要性: $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1 - e^h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1 - e^h)}{1 - e^h} \cdot \frac{1 - e^h}{h} = -f'(0)$ 存在.

充分性: 对任意 $x \rightarrow 0$, 取 $|x| < 1$, 令 $1 - e^h = x$. 或 $h = \ln(1 - x)$. 则 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1 - e^h)}{h} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} \cdot \frac{x}{\ln(1 - x)}$. 于是 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = -\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1 - e^h)}{h}$ 存在即 $f'(0)$ 存在.

细心的读者会问 由 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1 - \cosh)}{h^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1 - \cosh)}{1 - \cosh} \cdot \frac{1 - \cosh}{h^2}$ 令 $1 - \cosh = x$, 则 $x \rightarrow 0$. 不是也有 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1 - \cosh)}{h^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} \cdot \frac{1}{2}$ 存在吗. 不是同样证明了选项(A)也是正确的吗?! 问题在哪里?! 原来, 令 $1 - \cosh = x$, 由 $h \rightarrow 0$, 只能有 $x \rightarrow 0^+$. 因此, 我们知道, 选项(A)是 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处右导数存在的充要条件, 因此, 我们举反例只要举 $f(x)$ 在 $x = 0$ 点右导数存在而导数不存在的例子; 进一步看选项(C), 我们知道当 $h \rightarrow 0$ 时, $h - \sinh$ 是与 h^3 同阶的无穷小, 因而

$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h - \sinh)}{h^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h - \sinh)}{h - \sinh} \cdot \frac{h - \sinh}{h^2}$. 只要当 $h \rightarrow 0$ 时, $\frac{f(h - \sinh)}{h - \sinh}$ 的极限存在, $f'(0)$

可以是无穷大量. 于是令 $f(x) = x^{2/3}$. 显然 $f(0) = 0$, $f'(0) = \infty$ 不存在. 但 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h - \sinh)}{h^2} =$

$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(h - \sinh)^{2/3}}{h^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{h - \sinh}{h^3} \right)^{2/3} = \left(\frac{1}{6} \right)^{2/3}$ 存在.

至于选项(D), 如果我们令 $f(x) = \begin{cases} 0, & x \text{ 是有理数} \\ 1, & x \text{ 是无理数} \end{cases}$, 那么, 总有 $f(0) = 0$, $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2h) - f(h)}{h} = 0$ 存在, 但 $f(x)$ 处处间断!

像这样去分析一道题, 必定能作到举一反三、触类旁通, 做一个题胜似做一类题.

例 1.3 (2002, I) 设 $u_n \neq 0 (n = 1, 2, \dots)$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{u_n} = 1$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{1}{u_n} + \frac{1}{u_{n+1}} \right)$ ()

(A) 发散 (B) 绝对收敛 (C) 条件收敛 (D) 收敛性由所给条件不能判定.

解 选(C). 本题值得分析之处在于不少考生以为级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{1}{u_n} + \frac{1}{u_{n+1}} \right)$ 是交错级数, 且 $\frac{1}{u_n}$ 与 $\frac{1}{n}$ 是等价无穷小, 由莱布尼茨判别法它收敛, 如加绝对值则发散. 故选(C). 这是不对的, 理由

是设 $a_n = \frac{1}{u_n} + \frac{1}{u_{n+1}}$, 由已知条件, 无法证明 a_n 单调减. 而用莱布尼茨法则这一条是不可少的. 沿这个思路去想这个题, 反倒是学习好的学生会选(D), 因为他无法证明 a_n 的单调性.

其实要证明此级数收敛, 应当用部分和:

$$S_n = \left(\frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} \right) - \left(\frac{1}{u_2} + \frac{1}{u_3} \right) + \left(\frac{1}{u_3} + \frac{1}{u_4} \right) \cdots + (-1)^{n+1} \frac{1}{u_n} + \frac{(-1)^{n+1}}{u_{n+1}} = \frac{1}{u_1} + \frac{(-1)^{n+1}}{u_{n+1}}$$

故 $\lim_{h \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{u_1}$ 存在, 从而级数收敛, 且其和为 $\frac{1}{u_1}$.

因此, 此题如改成下面两种题更好.

其一, 仍是选择题, 只要改为“设 $u_n \neq 0 (n = 1, 2, \dots)$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{u_n} = 1$, 则级数

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{u_n}$ ()”仍为原题的 4 个选项. 那么正确答案是(D), 而不是(C).

为了排除选项(C), 我们可令 $\frac{1}{u_n} = \frac{1}{n} + \frac{(-1)^{n+1}}{n \ln(n+3)}$, 则有 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{u_n} = 1$, 但

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{u_n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln(n+3)},$$

前一个和式收敛, 后一个和式发散, 故发散. 这样一改对学习好的学生有利. 而且选项(C)有迷惑性.

其二, “设 $u_n \neq 0 (n = 1, 2, \dots)$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{u_n} = 1$, 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{1}{u_n} + \frac{1}{u_{n+1}} \right)$ 条件收敛, 并求其和.

改为这样的非客观题, 应当是较有水平的一道好题.

顺便指出, 2002 年数学一这个题本身很好, 但出成选择题不好; 而 2002 年数学三的选择題二(2)小题则是一道出错了的题, 即 4 个选项无一是对的. 关于这两道题的详细分析可参看本书的附录 B.

例 1.4 (2002, II) 已知 A, B 为 3 阶矩阵, 且 $2A^{-1}B = B - 4E$.

(1) 证明: $A - 2E$ 可逆;

(2) 若 $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, 求 A .

解 (1) 由于逆矩阵来源于矩阵乘法的逆运算. 故求逆矩阵的一种方法是: 求 $A - 2E$ 的逆矩阵, 便设法去分解 $A - 2E$ 的因式, 于是由 $2A^{-1}B = B - 4E$, 在等式两端左乘矩阵 A , 并移项整理得

$$AB - 2B - 4A = 0$$

得 $(A - 2E)B - 4(A - 2E) = 8E$.

从而 $(A - 2E)(B - 4E) = 8E, (A - 2E)^{-1} = \frac{1}{8}(B - 4E)$.

(2) 由 $A - 2E = 8(B - 4E)^{-1}$.

$$B - 4E = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

用分块矩阵求逆得

$$8(B - 4E)^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ -1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

分析 此题使我们想到 2000 年数学二的一道填空题:

$$\text{设 } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 7 \end{pmatrix}, B = (E + A)^{-1}(E - A), \text{ 则 } (E + B)^{-1} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

这个题的考点、思路与方法与2002年的题完全相同:为求 $(E+B)^{-1}$,先从 $B = (E+A)^{-1}(E-A)$ 来分解 $B+E$ 的因式: $B+AB+A=E, \Rightarrow B+E+A(B+E)=2E$.

$$(E+A)(B+E)=2E$$

$$(B+E)^{-1} = \frac{1}{2}(E+A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 4 \end{pmatrix}.$$

再联系2001年数学一的一道填空题:

$$\text{设 } A^2 + A - 4E = 0, \text{ 则 } (A - E)^{-1} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

解 还是分解 $A-E$ 的因式. $A^2 + A - 4E = (A-E)(A+2E) - 2E = 0$. 故 $(A-E)^{-1} = \frac{1}{2}(A+2E)$.

这样分析,我们发现同样考点、思路和解法的题,连续三年分别在数学一和数学二中考到.那种认为考过的题不可能再考的说法显然是幼稚的.从表面上看,这三道题是不同的,但是经过分析,它们考点、解法思路均相同,这三道题属于“一样的”题型.再进一步想,在线性代数中,矩阵是重要的一章,而用分解因式方法求逆矩阵,几乎用遍了矩阵的代数运算及其性质,因此,这一类的题必定是考研的热点.(果然,2003年数学二之一(6)题及数学四之一(4)题又考了.见本书附录D).

我们再看几道一样题型的相同的高数题.

例 1.5 (2001, III、IV 与 1991, I、II)

(1) (2001, III) 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续,在 $(0,1)$ 内可导,且 $f(1) = k \int_0^{1/k} x e^{1-x} f(x) dx$ ($k > 1$), 证明存在 $\xi \in (0,1)$, 使 $f'(\xi) = (1 - \xi^{-1})f(\xi)$.

(2) (2001, IV) 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续,在 $(0,1)$ 内可导,且 $f(1) = 3 \int_0^{1/3} e^{1-x^2} f(x) dx$, 证明存在 $\xi \in (0,1)$ 使 $f'(\xi) = 2\xi f(\xi)$.

(3) (1991, I、II) 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续,在 $(0,1)$ 内可导,且 $3 \int_{2/3}^1 f(x) dx = f(0)$. 证明存在 $c \in (0,1)$ 使 $f'(c) = 0$.

解 这三道题从考点、思路、解法上也是一样的题.我们只要解其中一题,其余两题读者一定能做.

(1) 由 $f(1) = k \int_0^{1/k} x e^{1-x} f(x) dx$, 便知其第一步用积分中值定理.由积分中值定理得,存在 $\eta \in [0, \frac{1}{k}]$. 使 $f(1) = \eta e^{1-\eta} f(\eta)$. 再从要证明的结果知,将用罗尔定理,区间是 $[\eta, 1] \subseteq [0, 1]$, 辅助函数便是 $F(x) = x e^{1-x} f(x)$. $F(x)$ 显然在 $[\eta, 1]$ 上连续,在 $(\eta, 1)$ 可导,且 $F(1) = f(1) = F(\eta) = \eta e^{1-\eta} f(\eta)$. 故由罗尔定理知.存在 $\xi \in (\eta, 1) \subset (0, 1)$, 使 $F'(\xi) = 0$. 而

$$F'(x) = e^{1-x} f(x) - x e^{1-x} f(x) + x e^{1-x} f'(x)$$

于是 $F'(\xi) = 0$ 即 $\xi f'(\xi) - (\xi - 1)f(\xi) = 0$, 也就是

$$f'(\xi) = (1 - \xi^{-1})f(\xi).$$

1991 年的数学一、二相当于现在的数学一. 当年这套试卷的题所考的内容、思路、方法, 10 年后在考经济类的数学三、四中出现了. 可见将工学类的数学与经济类的数学截然分开是无必要的. 另外, 比较起来 2001 年经济数学的两道考题明显比工学类的“难”. 因此, 应当说, 考试大纲中“考试内容与要求”提法一样的考点, 不论是数学一、二或数学三、四的深度是相同的. 而 2003 年数学三第八题与上述例题又“一样”, 不过将连续的平均值 $\frac{1}{2} \int_0^2 f(x) dx = f(3)$, 换成离散均值: $\frac{f(0) + f(1) + f(2)}{3} = f(3)$ 而已. 值得考生高度重视!



1.3 宏观分析

我们用下面的表格, 将考卷的一些特征数量化, 通过一些数字的简单计算, 就可以了解每套考卷的特点和各套考卷的共性. 值得说明的是, 我们这种分析不是考后的统计分析, 考后的统计分析能评价试卷的“好与差”, 主要提供考试管理人员、命题教师参考, 当然, 也可以提供考生参考. 但那种分析要有足够的样本, 才可以作到分析的客观性. 我们的这种分析是根据自己的教学经验, 对考生水平的估计而作出的. 虽说主观, 却能结合考生实际, 来解释客观事实, 读者如能将这种分析和相应的统计分析参照对比, 就更完美了.

先对数据各项目作个简单说明.

各课程的章目是按考研大纲所列内容的次序排列的, 我们将章名限制在四个字以内, 有的章的内容不能用四个字概括则略写. 现在把略写的章名用括号说明如下:

函数极限(连续); (向量代数) 空间解几; 随机事件(和概率); 随机变量(概率分布); 二维(随机变量及其概率) 分布; 其余的章目估计不会引起误会, 就不作说明了. 如大数定律一章自然也包含中心极限定理等等. 读者如有不清楚的可参考“考研大纲”.

认知层次一栏中的“简用”是指简单应用, 表示能将有关知识在另一个新环境中进行应用; “应用”是指复杂应用, 表示能将有关知识在两个以上新环境中进行应用.

“期望”是指整卷的难度期望分, 其计算方法见表 1.1 后面的难度分析. 表格中的“分值”填写的是试卷中各章内容在各个类别中所占的分数.

(1) 2002 年数学一试卷

从表 1.1 可以看出:

1. 内容分布较好. 高数中一元函数微积分 22 分; 多元微积分 25 分; 级数与微分方程 13 分. 线性代数与概率统计在重点章节基本上均有题.

2. 数学能力 综合题有 27 分, 这是命题的一个走向, 但今年概念题少了一点.

3. 认知层次 缺少复杂应用和创见的题.

4. 难度 分布比较合理, 较易和中档题达 81 分. 因此题偏易了一点. 期望分这样算: 各档期望值由易到难分别为 90%、75%、65%、35% 和 20%. 因此, 2002 数学一的期望分为 $21 \times 75\% + 60 \times 65\% + 14 \times 35\% + 5 \times 20\% = 64.4$ 分. 试卷长度, 即预估会做这些题的一般考生完成答卷所需时间(以分钟计), 约有 155 分钟, 还是长点, 因此我们估计今年数学一的平均分可在 55 分左右, 录取线就要 56 分左右了!

表 1.1 2002 年数学一分析统计表

课 程	分 值 类 别 章 目	数学能力					认知层次					难 度					合 计	
		概念	计算	推理	综合	应用	识记	理解	简用	应用	创见	易	较易	中	较难	难		
高等 数 学	函数极限																	
	一元微分	3	3		10			16					3	13				16
	一元积分		3		3			6					3	3				6
	空间解几																	
	多元微分	3				5		3	5				3			5		8
	多元积分	7	7	8		2		17						10	7			17
	无穷级数	3			3			3	3				3		3			6
	微分方程	3	3		4			3	4					3	4			7
线 性 代 数	行列式																	
	矩 阵																	
	向 量			3				3						3				3
	方程组	3	3					3	3					6				6
	特征向量			8				8						8				8
	二次型		3				3						3					3
概 率 统 计	随机事件																	
	随机变量		3	3				3	3				6					6
	二维分布																	
	数字特征				7				7					7				7
	大数定律																	
	统计概念																	
	参数估计		7		7				7					7				7
	假设检验																	
	合 计	12	32	22	27	7	3	65	32				21	60	14	5	期望	64.4

(2) 2003 年数学一试卷

从表 1.2 可以看出:

1. 内容覆盖全 表面看无穷级数占分比多元积分还多,实质上多元积分是一道综合题,综合了一元微积分的内容。

2. 数学能力 综合题有 44 分,接近整卷 $1/3$ 的分数,而且不少概念题也具有综合性,因此,统计中概念题占分少了些。

3. 认知层次 复杂应用题少了点。

4. 难度 分布较合理,无难题,还是用表 1.1 后的公式计算,期望分是 88.5(总分 150 分)。这个期望分不错,但由于这套试卷计算量偏大,综合题多,每道题均有丢分之处。因此,估计今年试卷改出后的平均分在 67 分左右($88.5\% \times 75\%$)。

表 1.2 2003 年数学一分析统计表

课 程	分 值 类 别 章 目	数学能力					认知层次					难 度					合 计	
		概念	计算	推理	综合	应用	识记	理解	简用	应用	创见	易	较易	中	较难	难		
高 等 数 学	函数极限	4	4					8				4	4				8	
	一元微分				14	3		10	7				3		14		17	
	一元积分				4	17		4	17				7		14		21	
	空间几何																	
	多元微分	4				4		4	4				4	4			8	
	多元积分			10	4			10	4					10	4		14	
	无穷级数		16					16				4		12			16	
	微分方程				6			6						6			6	
线 性 代 数	行列式																	
	矩 阵																	
	向 量		4	4			4	4					4	4			8	
	方程组			4	8			12						4	8		12	
	特征向量		10					10						10			10	
	二次型																	
概 率 统 计	随机事件																	
	随机变量																	
	二维分布		4						4				4				4	
	数字特征		10						10					10			10	
	大数定律																	
	统计概念		4					4					4				4	
	参数估计		4		8				4	8			4		8		12	
	价 格																	
	合 计	8	56	18	44	24	4	88	50	8		8	34	60	48		期望88.5	

(3) 2004 年数学一试卷

从表 1.3 看 2004 年数学一的试卷

1. 内容分布 尚好,只是一元函数积分学的题太少.
2. 数学能力 综合题明显增加,这是考研试题的一种倾向,值得注意.但计算题占 59 分,还是计算基本功重要.
3. 认知层次 不理想,但增加了简单应用这个层次的题,有利于测试考生的应用能力.
4. 难度 期望分 88.1,加上试卷长度比往年好一些,估计考生平均成绩在 76 分左右,说明难易适中.

表 1.3 2004 年数学一分析统计表

课 程	分 值 类 别 章 目	数学能力					认知层次					难 度					合 计
		概念	计算	推理	综合	应用	识记	理解	简用	应用	创见	易	较易	中	较难	难	
高等数学	函数极限				4			2	2					4			4
	一元微分	4		12	8	4		10	18				4	2	10	12	28
	一元积分				4			2	2					2	2		4
	空间解几																
	多元微分					12			12					12			12
	多元积分		16		2			16	2			4		12	2		18
	无穷级数	4			5			9						4	5		9
	微分方程		4			11		4	11					15			15
线性代数	行列式																
	矩 阵	4	4		2		4	4		2		4	4		2		10
	向 量				2					2					2		2
	方程组		9					9						9			9
	特征向量			9					9						9		9
	二次型																
概率统计	随机事件																
	随机变量		4						4					4			4
	二维分布		6					6						6			6
	数字特征		7						7					7			7
	大数定律																
	统计概念	4						4					4				4
	参数估计		9							9				9			9
	假设检验																
合 计		16	59	21	27	27	4	66	67	13		8	12	86	32	12	期望88.1

1.4 小结与预估

上面 3 张统计表,把 3 年试卷的考试内容、考核的能力、认知层次及难度等,都数量化了.这些数据不但清楚地告诉我们近年来数学考研试卷的结构,而且,如果我们进一步分析这些数据,还可以获得更多的有益信息,预测数学考研题的走向,对准备未来的考试心中有数.下面是我们的简单小结与预估.

1. 考试内容

各考卷最大共同点是内容覆盖面大.当然,总有些内容是年年都能考到的,也有些是偶尔考到的,比如高等数学中的定积分在力学、物理学方面的应用,实际的极值问题,多元函数积分学中的求