·青年学者文丛·

非线性算子的迭代算法及其应用

屈静国　张焕成　张秋娜　崔玉环　著

FEIXIANXING SUANZI DE DIEDAI SUANFA JIQI YINGYONG

知识产权出版社
全国百佳图书出版单位

青年学者文丛

非线性算子的迭代算法及其应用

屈静国　张焕成　张秋娜　崔玉环　◎著

知识产权出版社
全国百佳图书出版单位

图书在版编目（CIP）数据

非线性算子的迭代算法及其应用/屈静国等著.
—北京：知识产权出版社，2016.9
（青年学者文丛）
ISBN 978-7-5130-3232-2

Ⅰ.①非… Ⅱ.①屈… Ⅲ.①非线性算子—迭代法
Ⅳ.①O177.6

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2014）第 291851 号

内容提要

本书基于 Hibert 空间和 Banach 空间的集合理论和非线性算子理论，对满足不同条件的非线性迭代算子进行研究，得到了一些有效算法和收敛定理，并在此基础上将非线性算子理论应用到分数阶微分方程及分数阶发展方程。此外，还研究了分数阶微分方程的分解法与预估-校正法，并对低反应扩散方程的紧有限差分方法、广义的空间-时间分数阶对流-扩散方程进行了深一步研究。

本书可作为泛函数分析及相关专业学生的教材或参考书，也可作为该领域科研工作者的参考书。

责任编辑：祝元志　　**责任校对：**潘凤越
封面设计：刘　伟　　**责任出版：**卢运霞

非线性算子的迭代算法及其应用
屈静国　张焕成　张秋娜　崔玉环　著

出版发行：	知识产权出版社有限责任公司	**网　　址：**	http://www.ipph.cn
社　　址：	北京市海淀区西外太平庄 55 号	**邮　　编：**	100081
责编电话：	010－82000860 转 8513	**责编邮箱：**	13381270293@163.com
发行电话：	010－82000860 转 8101/8102	**发行传真：**	010－82005070/82000893
印　　刷：	北京中献拓方科技发展有限公司	**经　　销：**	各大网上书店、新华书店及相关专业书店
开　　本：	720mm×960mm　1/16	**印　　张：**	17.5
版　　次：	2016 年 9 月第 1 版	**印　　次：**	2016 年 9 月第 1 次印刷
字　　数：	340 千字	**定　　价：**	68.00 元

ISBN 978-7-5130-3232-2

前　言

泛函分析作为一种抽象的数学理论，具有高度的抽象性、系统性和普适性，因此成为人们研究各学科的重要工具。非线性算子不动点理论是目前正在迅速发展的非线性泛函分析理论的重要组成部分，它与近代数学的许多分支有着紧密的联系，特别是在各类微分方程、积分方程、算子方程和代数中起着重要作用。随着人们对自然界认识的不断深入，非线性科学在数学、物理学、化学、医学、经济学、控制论等领域中的重要性日益凸显。目前，非线性分析中的非线性算子理论作为非线性科学的基础理论和基本工具，已成为现代数学的一个重要分支。

本书是作者近年来科研工作的整理和总结，内容涉及不动点理论、非线性算子的迭代算法、变分不等式、均衡问题、分数阶微分方程等领域的理论及其应用。首先，介绍了非线性算子理论及迭代算法的背景、简史及迭代算法的发展情况，接着研究了多种关于非扩张映象迭代序列的收敛性方面若干性质及其强收敛结论；其次，研究了多种压缩映象不动点的迭代逼近问题；再次，对非扩张映象的变分不等式问题和广义均衡问题进行深入研究，建立了更有效的迭代格式；然后，在 Banach 空间下对有限族增生算子公共零点和多值映象公共不动点的迭代逼近构造了多种迭代格式并得到相应强收敛定理；最后，将非线性算子理论应用到分数阶微分方程及分数阶发展方程。很多成果是屈静国等学者在华北理工大学（特别是在轻工学院）多年教学和科研的心血结晶。撰写时，补充了部分基础知识，以方便读者阅读。每一个方向的成果都为非线性算子迭代算法领域做出了一些贡献，同时也反映出作者紧跟时代步伐，力争在学科前沿取得成绩的愿望。

由于时间仓促，加之作者水平所限，本书难免会有不妥之处，敬请专家、读者批评指正，我们将不胜感激。

目　　录

第 1 章　不动点理论简述 …… 1
1.1　非线性算子的不动点理论 …… 1
1.2　迭代算法 …… 4
1.3　变分不等式 …… 16
1.4　均衡问题 …… 22
第 2 章　非扩张映射的不动点迭代逼近 …… 24
2.1　一致（$L-\alpha$）-Lipschitz 渐近非扩张映象的不动点迭代问题 …… 24
2.2　渐近非扩张型映象具误差的三步迭代序列的收敛性 …… 33
2.3　Banach 空间中非扩张映象不动点的迭代逼近 …… 38
2.4　非扩张自映象的黏性迭代逼近 …… 49
2.5　非扩张自映象不动点的迭代逼近 …… 57
2.6　小结 …… 68
第 3 章　压缩映象的不动点迭代逼近 …… 69
3.1　严格伪压缩映象的不动点迭代序列的收敛性 …… 70
3.2　在 Hilbert 空间中严格渐近伪压缩映象不动点的迭代逼近 …… 75
3.3　Hilbert 空间中严格伪压缩映象不动点的迭代逼近 …… 79
3.4　Banach 空间中严格伪压缩映象不动点的迭代逼近 …… 91
3.5　迭代逼近渐近伪压缩半群的公共不动点 …… 100
3.6　小结 …… 105
第 4 章　变分不等式与均衡问题的不动点迭代逼近 …… 106
4.1　国内外研究基础 …… 106
4.2　均衡问题和不动点问题的迭代逼近 …… 115
4.3　均衡问题和优化问题的迭代逼近 …… 121
4.4　Wiener-Hopf 方程和广义变分不等式问题的迭代逼近 …… 130
4.5　广义变分不等式系统的迭代逼近 …… 135
4.6　小结 …… 141
第 5 章　有限增生算子公共零点的迭代逼近 …… 142
5.1　Banach 空间中有限族增生算子公共零点的迭代强收敛定理 …… 142

5.2 Banach 空间中有限族增生算子公共零点的迭代强收敛定理 …………… 156
5.3 有限族增生算子公共零点的复合迭代算法的强收敛定理 …………… 167
5.4 关于多值映象公共不动点的强收敛定理 ………………………………… 175
5.5 Banach 空间中多值映象的新迭代 Ishikawa 算法……………………… 186
5.6 小结 …………………………………………………………………………… 193
第 6 章 与不动点性质有关的一些几何常数及其性质 ……………………… 194
6.1 Banach 空间参数 U_β -凸模 ………………………………………………… 195
6.2 常数 $E(X)$ 的几何性质 ……………………………………………………… 203
6.3 Banach 空间中的广义凸性模 ………………………………………………… 208
6.4 集值映射与不动点的性质 …………………………………………………… 214
6.5 小结 …………………………………………………………………………… 218
第 7 章 分数阶微分方程 ……………………………………………………… 219
7.1 分数阶微分方程 ……………………………………………………………… 219
7.2 分数阶发展方程 ……………………………………………………………… 222
7.3 Adomian 分解法的研究及其在分数阶微分方程中的应用 ……………… 225
7.4 求分数阶微分方程预测-校正法及应用 …………………………………… 231
7.5 低反应扩散方程的紧有限差分方法的研究及应用 ……………………… 236
7.6 广义的空间-时间分数阶对流-扩散方程的研究及在流体
力学中的应用 ………………………………………………………………… 243
7.7 基于不动点定理的分数阶微分方程的研究 ……………………………… 249
7.8 基于不动点理论的分数阶发展方程的研究 ……………………………… 256
7.9 小结 …………………………………………………………………………… 263
主要参考文献 ………………………………………………………………… 264

第1章 不动点理论简述

非线性算子的迭代算法是非线性泛函分析理论的重要组成部分，它与近代数学的许多分支有着紧密性联系，特别是在解决各类方程（其中包括各类线性或非线性的、确定或非确定性的微分方程、积分方程及各类算子方程）解的存在唯一问题中起着重要的作用。20世纪60年代，洛萨·科拉茨（L. Collatz）在他写的《应用于数值分析的泛函分析》一书的引言中写道："由于两件事使数值分析发生了革命性的变化，这两件事就是应用了电子计算机和应用了泛函分析"。20世纪，计算机科学开始建立和发展并引起了科学技术翻天覆地的变化，它在各个部门学科及其分支中的巨大影响是毋容置疑的。让人惊讶的是，鲜为人知的泛函分析对一门学科的影响竟然有着与计算机科学比肩的地位。其实让人惊讶的还远不止这些。随着对大自然认识的不断深入，人们已经逐渐认识到非线性科学在数学、物理学、化学、医学、经济学、工程学等科学领域中的重要性。

1.1 非线性算子的不动点理论

非线性分析中的非线性算子理论作为非线性科学的基础理论和基本工具，已经成为现代数学的一个重要分支，并在其他分支中发挥重要的作用，尤其在处理实际问题中出现的大量微分方程时发挥着不可替代的作用。由于大量的非线性问题都与非线性算子方程有着密切的联系，而非线性算子方程的解往往可以转化为某个非线性算子的不动点，所以研究巴拿赫（Banach）空间中非线性算子方程解的迭代算法无疑具有重要的理论意义和实际意义，比如用它解微分方程的初值问题。

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=f(x,t) \\ x\big|_{t=t_0}=x_0 \end{cases} \tag{1.01}$$

等价于求解积分方程

$$x(t)=x_0+\int_{t_0}^{t} f[x(\tau),\tau]\mathrm{d}\tau \tag{1.02}$$

如令

$$Tx(t)=x_0+\int_{t_0}^{t} f[x(\tau),\tau]\mathrm{d}\tau \tag{1.03}$$

我们可以把 T 看成是某个距离空间上的映射，于是解上述积分方程（从而解微分方程）的问题，就等价于求解空间中的满足 $Tx=x$ 的元 x，即求映射 T 的不动点问题。研究映射的不动点是一个很重要的问题。

不动点理论起源于求解方程的代数问题，后转化为几何理论中研究不动点的存在、个数、性质与求法的理论，成为拓扑学和泛函分析中的重要内容。较早的不动点定理是压缩映射原理，由法国数学家皮卡（Picard）于1890年提出，后来被波兰数学家巴拿赫（1922年）发展，成为许多方程的解存在性、唯一性及迭代解法的理论基础。1910年，荷兰数学家布劳威尔（Brouwer）证明了多面体的不动点定理：设 C 是欧氏空间 R^n 中的非空有界闭凸集，则 C 到自身的每个连续映射都至少有一个不动点。这个定理被称为Brouwer不动点定理。1926年，美国数学家英夫谢茨（S. Lefschetz）发展了Brouwer定理，得到不动点指数中的Lefschetz不动点定理。1913年，伯克霍夫（G. D. Birkhoff）证明了前一年法国数学家亨利·宠加莱（Henri Poincaré）关于三体问题的一个猜想，得到Poincaré-Birkhoff不动点定理。G. D. Birkhoff还与另一美国数学家凯洛格（O. D. Kellogg）于1922年共同把不动点定理推广到无穷维函数空间，并应用于证明微分方程的存在性。1930年，乌克兰数学家尚德尔（Schauder）将Brouwer不动点定理推广到线性赋泛函空间中的紧凸集、Banach空间中的紧凸集等到自身的映射上，得到Schauder不动点定理。1935年，苏联数学家吉洪诺夫（A. Tychonoff）就将Brouwer的结果推广到局部凸拓扑线性空间中紧凸集到自身的映射上，得到Tychonoff不动点定理。1941年，日本数学家角谷静夫（Kakutani）又将Brouwer的结果推广到极值映射上去。20世纪五六十年代，Brouwer、凯凡（KyFan）、撒多互斯基（Sadovskii）等数学家将上述定理做了各种形式的推广。

以上所有不动点定理的研究都是对其存在性的研究。半个多世纪来，特别是最近三十多年，由于实际需要的推动和数学工作者的努力，对不动点定理的依据研究已经出现了多元化的局面，不再局限于对存在性的研究。众所周知，Bancah压缩映象原理实际上是经典的Picard迭代法的抽象表述。学者们研究发现，根据这一定理，不仅可以判定不动点的存在性和唯一性，而且还可以构成一个迭代程序，逼近压缩映象的不动点到任意精确程度。由此非线性算子不动点迭代逼近这门学科也应运而生。目前，这门学科的理论及应用的研究也已取得重大的进展，并且日趋完善。为了逼近非线性算子不动点，历史上曾出现过多种迭代格式，如

Picard 迭代格式、正规曼（Mann）迭代格式、石川（Ishikawa）迭代格式、哈尔彭（Halpern）迭代格式、黏滞迭代法、最快下降迭代法、正规化迭代法、混杂迭代法（CQ 算法）等多种形式，迭代格式的收敛性成为非线性算子不动点理论研究中的重要课题。有关非线性算子不动点迭代逼近的研究近年来非常活跃。从具体空间（如 L^p 空间）到抽象空间［如希尔伯特（Hilbert）空间、Banach 空间、赋范线性空间］；从单值映象到集值映象；从一般意义的映象（非扩张映象、相对非扩张映象、伪压缩映象、强伪压缩映象等）到渐近意义的映象（如渐近非扩张映象、相对渐近非扩张映象、渐近伪压缩映象、渐近 k -强伪压缩映象等）；从迭代序列的构造［如 Mann 与 Ishikawa 迭代序列、具误差（或混合误差）的 Mann 与 Ishikawa 迭代序列、修正的 Mann 与 Ishikawa 迭代序列］到迭代序列的强（弱）收敛性、稳定性及非线性算子方程解的存在唯一性，可以说成果十分丰硕。关于非线性算子不动点迭代逼近问题，学者们主要是从两方面来进行进一步的研究：一方面是非线性算子的性质，包括各种算子不动点的存在性条件等；另一方面是用各种更好更有效的迭代格式逼近算子的不动点。

目前，非线性分析中的非线性算子理论作为非线性科学的理论基础和基本工具，已成为现代数学的一个基本分支，并在其分支中发挥着重要作用，尤其是在处理实际问题中出现的大量微分方程时发挥着不可替代的作用。由于大量的非线性问题都与非线性算子方程有着密切联系，而非线性算子方程的解往往可以转化为某个非线性算子的不动点问题。一个典型的例子就是凸可行问题，对 Hilbert 空间中的有限个闭凸子集 $K_1, K_2, \cdots, K_N$ 且（$\bigcap_{i=1}^{N} K_i \neq \varnothing$），寻找某个点 $x \in \bigcap_{i=1}^{N} K_i$ 。由于实 Hilbert 空间H 中任意非空闭凸子集 K_i 均可被看作 H 到 K 度量投影的不动点集，因此，凸可行问题也就转化为找一个点属于非扩张映射有限族的不动点集的交集，即寻找非扩张映射有限族的公共不动点问题。

自 20 世纪初劳威尔（Trouwer）和 Banach 提出以他们姓氏命名的 Trouwer 定理和 Banach 压缩映象原理之后，在最近的 20 世纪特别是最近 30 年，由于实际需要的推动和数学工作者的努力，这门学科已经出现了多样化的局面，Banach 压缩映象原理实际上是经典的 Picard 迭代法的抽象表述。根据这一定理，不仅可以判定不动点的存在性和唯一性，而且还可以构成一个迭代程序，逼近压缩映象的不动点到任意精确程度。因此，Banach 映象原理在近代数学的许多分支，特别是在应用数学的几乎各个分支都有广泛应用。Banach 在 20 世纪 20 年代提出这一原理后，大半个世纪来，特别是最近二十多年来，压缩映象的概念和 Banach 压缩映象原理已经从各个方面和各个不同的角度有了重要的发展。许多人提出了一系列新型的压缩映象概念和一系列新型的压缩映象的不动点定理，而且其中的某些结果已经被成功地运用于 Banach 空间中非线性沃尔泰拉（Volterra）

积分方程、非线性积分-微分方程和非线性泛函微分方程解的存在性和唯一性问题，另外，压缩型映象的某些不动点定理还被成功地应用于随机算子理论和随机逼近理论。

1.2 迭代算法

1.2.1 预备知识

设 X 是一个具有范数 $\|\cdot\|$ 的 Banach 的空间，映象 $J: X\to 2^{X^*}$ 是被下式定义的正规对偶映象

$$J(x)=\{f\in X^*,(x,f)=\|x\|\,\|f\|,\|x\|=\|f\|\},\forall x\in X \quad (1.04)$$

其中，X^* 是 X 的对偶空间，和（·，·）是广义对偶对。我们也将记 J 为单值正规对偶映象，记映象 T 的不动点集为 $F(T)=\{x\in X: Tx=x\}$。

设 $\{x_n\}$ 是 X 的中的一个序列，则 $\{x_n\}$ 强收敛（或范数收敛）到 x（简记为 $x_n\to x$）是指 $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n-x\|=0$。

$\{x_n\}$ 弱收敛到 x（简记为 $x_n\rightharpoonup x$）是指 $\forall f\in X^*,\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=f(x)$。

设 $\{x_n\}$ 是 X^* 中的一个序列，则 $\{f_n\}$ 弱收敛到 f（简记为 $f_n\xrightarrow{*}f$）是指 $\forall x\in X,\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)$。

称映象 T：$X\to X$ 是非扩张的，如果对任意的 x，$y\in D(T)$，$D(T)$ 是 T 的定义域，使得

$$\|Tx-Ty\|\leqslant\|x-y\| \quad (1.05)$$

称映象 T：$X\to X$ 是压缩的，如果对任意的 x，$y\in D(T)$，存在常数 $\beta\in(0,1)$ 使得

$$\|Tx-Ty\|\leqslant\beta\|x-y\| \quad (1.06)$$

称映象 T 是增生的，如果对任意的 x，$y\in D(T)$，$j\in J(x-y)$，满足 $[Tx-Ty,j(x-y)]\geqslant 0$。

一个增生算子是 m-增生的，如果有 $R(I+\lambda T)=X$，对所有的 $\lambda\in(0,1)$。

引理 1.1（次微分不等式） 在 Banach 空间 X 中，对 $\forall x,y\in X,\forall j(x)\in J(x),j(x+y)\in J(x+y)$，有下列不等式成立

$$\|x\|^2+2[y,j(x)]\leqslant\|x+y\|^2\leqslant\|x\|^2+2[y,j(x+y)] \quad (1.07)$$

Banach 空间 X 的范数被称为加托（Gâteaux）可微的，如果对 $x,y\in S(X)$，$S(X)=\{y\in X:\|y\|=1\}$ 是 X 的单位球面，极限存在，即

$$\lim_{t\to 0}\frac{\|x+ty\|-\|x\|}{t} \quad (1.08)$$

Banach 空间 X 的范数被称为一致 Gâteaux 可微的，如果每个 $y\in S(X)$，则极限 $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\|x+ty\|-\|x\|}{t}$ 对 $x\in S(X)$ 一致地达到。

Banach 空间 X 的范数被称为弗雷歇（Fréchet）可微的，如果每个 $x\in S(X)$，则极限 $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\|x+ty\|-\|x\|}{t}$ 对 $y\in S(X)$ 一致地达到。

Banach 空间 X 的范数被称为一致 Fréchet 可微的，如果对极限 $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\|x+ty\|-\|x\|}{t}$ 对 $(x,y)\in S(X)\times S(X)$ 一致地达到。

Banach 空间 X 被称为严格凸的，如果对 $\|x\|=\|y\|=1$，$x\neq y$ 有 $\left\|\dfrac{x+y}{2}\right\|<1$。

Banach 空间 X 被称为一致凸的，如果对任意的 $\varepsilon>0$，有 $\delta_X(\varepsilon)>0$，其中 $\delta_X(\varepsilon)$ 为 X 的凸性模，被下式定义

$$\delta_X(\varepsilon)=\inf\left\{1-\frac{\|x+y\|}{2}:\|x\|\leqslant 1,\|y\|\leqslant 1,\|x-y\|\geqslant\varepsilon\right\},\varepsilon\in[0,2] \tag{1.09}$$

众所周知下列结论是成立的。

结论 1 Banach 空间 X 的范数是 Gâteaux 可微的等价于 X 是光滑的。此时，正规对偶映象 J 是单值的并且是范数-弱*连续的。

结论 2 如果 Banach 空间 X 的范数是一致 Gâteaux 可微的，则其正规对偶映象 J 是单值的且在 X 的任意有界子集上是范数-弱*一致连续的。

结论 3 Banach 空间 X 是一致光滑的等价于 Banach 空间 X 的范数一致 Fréchet 可微的。

结论 4 如果 Banach 空间 X 是一致光滑的，则有如下结论。

(1) X 一定是自反的。

(2) X 具有一致 Gâteaux 可微范数。

(3) X 上的正规对偶映象 J 是单值的。

(4) X 上的正规对偶映象 J 在 X 的任意有界子集上是范数一致连续的。

结论 5 ①每一个一致凸的 Banach 空间 E 一定是自反的与严格凸的；②严格凸 Banach 空间 X 的非空闭凸子集 C 上的非扩张自映象 T 的不动点集 $F(T)$ 是 C 的一个闭凸子集。

1.2.2 算法的发展

假设 E 是 Banach 空间，其范数表示为 $\|\cdot\|$，E^* 为 E 的对偶空间，$\langle\cdot,\cdot\rangle$ 是 E 与 E^* 之间广义内积，C 为 E 的非空子集，T：$C\to E$ 为非线性算子，$F(T)=$

$\{p\in C,Tp=p\}$表示不动点集，$\rightarrow$表示强收敛，$\rightharpoonup$表示弱收敛。

设 C 是距离空间或者线性赋范空间 X 中的闭集，T 是一映象，称

$$(PIP)\quad \begin{cases} x_1\in C \\ x_{n+1}=Tx_n,(n\geqslant 1) \end{cases} \tag{1.10}$$

为 Picard 迭代程序，(PIP) 的另一等价形式为

$$(PIP')\quad \begin{cases} x_1\in C \\ x_{n+1}=T^n x_1,(n\geqslant 1) \end{cases} \tag{1.11}$$

1975 和 1976 年，希拉姆（Hillam）对（PIP'）分别给出了如下结论。

定理 1.1 设 f：$[a,b]\rightarrow[a,b]$ 为利普希茨（Lipschitz）连续函数（$|f(x)-f(y)|)\leqslant L|x-y|,\forall x,y\in[a,b],L>0$。

令 $\lambda=\dfrac{1}{1+L}$，定义 $F_\lambda:[a,b]\rightarrow[a,b],F_\lambda x=(1-\lambda)x+\lambda f(x),\{x_n\}$ 由

$$\begin{cases} x_1\in[a,b] \\ x_{n+1}=F_\lambda x_n=F_\lambda^n x_n,(n\geqslant 1) \end{cases} \tag{1.12}$$

所产生，则 $\{x_n\}$ 单调地收敛到 f 的一个不动点。

定理 1.2 设 $f:[0,1]\rightarrow[0,1]$ 为连续函数，则由（PIP'）所产生的数列 $\{x_n\}$ 收敛到 f 的一个不动点当且仅当$\lim\limits_{n\to\infty}|x_{n+1}-x_n|=\lim\limits_{n\to\infty}|f^{n+1}x_1-f^n x_1|=0$。

Banach 在 1992 年利用（PIP）得到了压缩映象的收敛定理，具体给出了如下定理。

定理 1.3 设（X，d）是完备度量空间，T：$X\rightarrow X$ 是压缩映象。则 T 在 X 中有唯一不动点。

1965 年，Browder 和柯克（Kirk）独立地证明了一致凸 Banach 空间中有界闭凸子集上非扩张映象具有不动点，且 $F(T)$ 闭凸。但 Banach 所用的 Picard 迭代对于非扩张映象却未必是一致收敛的，其中，T：$C\rightarrow C$ 为非扩张映象，即对任意的 $x,y\in C$，$\|Tx-Ty\|\leqslant\|x-y\|$。

例 1.1 令 $C=[0,1]$，$Tx=1-x$，则 $\|Tx-Ty\|=\|x-y\|$，且 $x^*=\dfrac{1}{2}\in F(T)$。取 $x_0=0$，$x_1=Tx_0=1$，$x_2=Tx_1=0$，$x_3=Tx_2=0$，…，则 $\{x_n\}$ 不收敛于 $x^*=\dfrac{1}{2}$。这表明对于非扩张映象，Picard 迭代程序失败。

Mann 受到了 Banach 压缩映象原理的启发，1953 年，Mann 引进了下列迭代算法

$$(GMIP)\begin{cases}x_1\in C\\ v_n=\sum_{j=1}^{n}a_{nj}x_j\\ x_{n+1}=Tv_n,(n\geqslant 1)\end{cases} \tag{1.13}$$

其中，X 是 Banach 空间，C 是 X 的凸闭子集，T：$C\to C$ 是一连续映象，$A=[a_{nj}]$ 是一无穷实矩阵满足

$$\begin{aligned}&(A_1)a_{nj}\geqslant 0,(\forall n\geqslant 1,j\geqslant 1)\\&(A_2)a_{nj}=0,(\forall j\geqslant n)\\&(A_3)\textstyle\sum_{j=1}^{n}a_{nj}=1,(\forall n\geqslant 1)\\&(A_4)\lim_{n\to\infty}a_{nj}=0,(\forall j\geqslant 0)\end{aligned} \tag{1.14}$$

Mann 给出了如下定理。

定理 1.4 设 X 是一 Banach 空间，C 是 X 的凸闭子集，T：$C\to C$ 是一连续映象，设序列 $\{x_n\}$ 是由（$GMIP$）所产生，则 $\{x_n\}$ 或者 $\{v_n\}$ 之一收敛到 $y\in C$，可推出另一序列也收敛到 y 且 $Ty=y$。

定理 1.5 设 X 是一局部凸的豪斯多夫（Hausdorff）线性拓扑空间，C 是 X 的凸闭子集，T：$C\to C$ 是一连续映象，设序列 $\{x_n\}$ 是由（$GMIP$）所产生，则 $\{x_n\}$ 或者 $\{v_n\}$ 之一收敛到 $y\in C$，可推出另一序列也收敛到 y 且 $Ty=y$。

而近年来，大家普遍关注和研究的则是如下形式的迭代程序

$$(NMIP)\begin{cases}x_0\in C\\ x_{n+1}=(1-\alpha_n)x_n+\alpha_nTx_n,(n\geqslant 0)\end{cases} \tag{1.15}$$

其中，C 是 X 的凸闭子集$\{\alpha_n\}\subset[0,1]$，T 是一连续映象，被称之为正规 Mann 迭代。

1955 年，德罗维奇（Krasnoselskii）首次证明了如下定理。

定理 1.6 设 X 是一 Banach 空间，C 为 T 中的凸闭子集，T：$C\to C$ 是非扩张映象，且$\overline{T(C)}$紧，则

$$\begin{cases}x_1\in C\\ x_{n+1}=\dfrac{1}{2}x_n+\dfrac{1}{2}Tx_n,(n\geqslant 1)\end{cases} \tag{1.16}$$

所产生的序列 $\{x_n\}$ 强收敛到 T 的一个不动点。

Krasnoselskii 给出上述定理之后，受到大家的普遍关注，1975 年谢弗（Schaefer）在一定程度上改进了定理 1.6，把其固定的“1/2”推广为 $\lambda\in(0,1)$。之后，埃德尔斯坦（Edelstein）把空间框架从一致凸推广到严格凸，在 1971 年佩特里（Petryshy）把映象又进一步推广到了凝聚映象。直到 1976 年，Ishikawa 给出了如下非常令人感兴趣的结果。

定理 1.7　设 X 是 Banach 空间，C 是 X 的凸闭子集，$\{x_n\}$ 是由（$GMIP$）所产生，其中控制序列 $\{\alpha_n\}$ 满足 $0\leqslant\alpha_n\leqslant c<1,\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n=\infty$。若 $\{x_n\}$ 有界，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n-Tx_n\|=0$。

利用 Mann 迭代对于常见的非扩张映象我们可以得到弱收敛定理，其较为典型的是 1979 年由赖希（Reich）给出的定理。

定理 1.8　设 X 是一致凸的 Banach 空间，范数是 Frechet 可微，C 是 X 的凸闭子集，T：$C\to C$ 是具有非空不动点集的非扩张映象，序列 $\{x_n\}$ 由（$NMIP$）产生，其中控制序列 $\{\alpha_n\}$ 满足 $0\leqslant\alpha_n<1,\sum_{n=1}^{\infty}(1-\alpha_n)$，则 $\{x_n\}$ 弱收敛到 T 的一个不动点。

Mann 迭代程序对于非扩张映象要想得到强收敛定理得加上一定的紧性条件，并对连续的伪压缩映象，Mann 迭代程序也并非是收敛的。Ishikawa 于 1976 年提出了一种新的迭代程序，即 Ishikawa 迭代程序

$$(IIP)\begin{cases}x_0=C\\ y_n=(1-\beta_n)x_n+\beta_nTx_n\\ x_{n+1}=(1-\alpha_n)x_n+\alpha_nTy_n,(n\geqslant0)\end{cases}\tag{1.17}$$

其中，C 是 X 的凸闭子集，$\{\alpha_n\}$ 和$\{\beta_n\}\subset[0,1]$。同时，Ishikawa 给出了如下定理。

定理 1.9　设 C 是 Hilbert 空间 H 的紧凸子集，T：$C\to C$ 是 Ishikawa 伪压缩映象，序列 $\{x_n\}$ 由（$NMIP$）产生，则 $\{x_n\}$ 强收敛于 T 的某个不动点，其中 $\{\alpha_n\},\{\beta_n\}\subset[0,1]$ 满足下列条件的实序列

$$\begin{aligned}&(\mathrm{I})\,0\leqslant\alpha_n\leqslant\beta_n\leqslant1\\&(\mathrm{II})\lim_{n\to\infty}\beta_n=0\\&(\mathrm{III})\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\beta_n=0\end{aligned}\tag{1.18}$$

相比于 Mann 迭代程序和 Ishikawa 迭代程序，一方面 Ishikawa 程序更为一般化且包含了 Mann 迭代程序，同时在一定的条件下 Ishikawa 迭代程序可以用来逼近 Lipschitz 伪压缩映象不动点，而 Mann 迭代程序却无法收敛到它的不动点；另一方面，Mann 迭代程序比 Ishikawa 迭代程序简单，便于计算，并且一般情况下用 Mann 迭代程序收敛性可导致 Ishikawa 迭代程序的收敛性，只要参数 $\{\beta_n\}$ 满足一定条件。但在一般情况下，不论是 Mann 迭代程序还是 Ishikawa 迭代程序仅有弱收敛。雷哈（Reicha）、Tan 和 Xu 分别给出弱收敛定理。

因此，近年来很多专家学者致力于修正 Mann 和 Ishikawa 迭代程序，而没有对算子外加其他的限制条件，以期获得对于非扩张和任何其他更为广泛的压缩型映象的强收敛定理。中岛（Nakajo）和高桥（Takahashi）在 Hibert 空间的框架下采用度量投影法，修正了 Mann 迭代程序从而获得了强收敛定理，并给出如下定理。

定理 1.10 设集合 C 是 Hilbert 空间中的一闭凸子集，T 是具有非空不动点集的从 C 到自身的非扩张映象。设 $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$ 是属于 [0，1] 的实序列，使得对于某个 x_0，$\{x_n\}$。若由如下算法产生

$$\begin{cases} x_0 \in C \\ y_n = \alpha_n x_n + (1-\alpha_n) T x_n \\ C_n = \{z \in C: \| y_n - z \| \leqslant \| x_n - z \| \} \\ Q_n = \{z \in C: [x_0 - x_n, x_n - z] \geqslant 0\} \\ x_{n+1} = P_{C_n \cap Q_n} x_0 \end{cases} \tag{1.19}$$

那么，$\{x_n\}$ 强收敛于 $P_{F(T)} x_0$，其中 P 是从 Hilbert 空间到其子集的度量投影。

受到了 Nakajo 和 Takahashi 所做工作的启发和激励，近来金姆（Kim）和 Xu 采取同样的方法，在 Hilbert 空间的框架下修正了 Mann 迭代程序，把映象扩展到了渐近非扩张映象，并得到如下收敛定理。

定理 1.11 设集合 C 是 Hilbert 空间中的一有界闭凸子集，T 是具有系数 $\{k_n\}$ 的从 C 到自身的渐近非扩张映象，其中渐近非扩张系数 $\{k_n\} \subset [1, \infty)$，使得 $\lim\limits_{n\to\infty} k_n = 1$。设 $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$ 是属于 [0，1] 的实序列，使得 $\limsup\limits_{n\to\infty} \alpha_n < 1$。若 $\{x_n\}$ 由如下算法产生

$$\begin{cases} x_0 \in C \\ y_n = \alpha_n x_n + (1-\alpha_n) T^n z_n \\ C_n = \{z \in C: | y_n - z |^2 \leqslant | x_n - z |^2 + \theta_n\} \\ Q_n = \{z \in C: [x_0 - x_n, x_n - z] \geqslant 0\} \\ x_{n+1} = P_{C_n \cap Q_n} x_0 \end{cases} \tag{1.20}$$

其中，$\theta_n = (1-\alpha_n)(k_n^2 - 1)(\mathrm{diam} C)^2 \to 0$。那么 $\{x_n\}$ 就强收敛于 $P_{F(T)} x_0$。

最近马里诺（Marino）和 Xu 在 Hilbert 框架也借助于度量投影修正 Mann 迭代程序对于严格伪压缩映象也得到如下定理。

定理 1.12 设集合是 Hilbert 空间中的一非闭凸子集，是具有常数 k 的从 C 到自身的严格伪压缩映象，其中常数 $k \in [0, 1)$。若映象 T 的不动点集非空 $\{x_n\}$ 由如下算法产生

$$\begin{cases} x_0 \in C \\ y_n = \alpha_n x_n + (1-\alpha_n) T x_n \\ C_n = \{z \in C: \| y_n - z \|^2 \leqslant \| x_n - z \|^2 - (k - \alpha_n)(1-\alpha_n) \| x_n - T x_n \|^2\} \\ Q_n = \{z \in C: [x_0 - x_n, x_n - z] \geqslant 0\} \\ x_{n+1} = P_{C_n \cap Q_n} x_0 \end{cases}$$

(1.21)

假设控制序列 $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$ 满足条件 $0\leqslant\alpha_n<1$，那么，$\{x_n\}$ 强收敛于 $P_{F(T)}x_0$。

进一步，松下（Matsushita）和 Takahashi 借助于广义投影算子针对相对非扩张映象，修正了 Mann 迭代格式把空间架框从 Hilbert 空间推广到了 Banach 空间并证明如下定理。

定理 1.13 设集合 E 是一个一致光滑且一致凸的 Banach 空间，集合 C 是 E 的非空闭凸子集，映象 T 是一个从集合 C 到自身的相对非扩张映象。若控制序列 $\{\alpha_n\}$ 满足条件 $0\leqslant\alpha_n<1$ 且 $\limsup\limits_{n\to\infty}\alpha_n<1$。$\{x_n\}$ 由如下算法产生

$$\begin{cases}x_0=x\in C\\ y_n=J^{-1}[\alpha_nJx_n+(1-\alpha_n)JTx_n]\\ C_n=\{z\in C:\varphi(z,y_n)\leqslant\varphi(z,x_n)\}\\ Q_n=\{z\in C:[x_n-z,Jx-Jx_n]\geqslant0\}\\ x_{n+1}=\Pi_{C_n\cap Q_n}x_0\end{cases}\tag{1.22}$$

其中，J 是 E 上的对偶映象。假设映象 T 的不动点集是非空的，则 $\{x_n\}$ 强收敛于 $\Pi_{F(T)}x_0$。

最近 Kim 和 Xu 舍去了大多数人所采用的度量投影的方法，从另一个角度采用了一种较为简单的方法修正 Mann 迭代格式的强收敛定理，这种方法使得计算具体化、简单化。具体定理如下。

定理 1.14 设集合 C 是一致光滑 Banach 空间的闭凸子集，T 是一具有非空不动点集的从 C 到自身的非扩张映象。点和序列 $\{\alpha_n\}$、$\{\beta_n\}$ 属于 (0, 1) 是给定的，如果满足

$$\begin{aligned}&(\mathrm{I})\ \alpha_n\to0,\beta_n\to0\\ &(\mathrm{II})\ \textstyle\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n=\infty,\sum_{n=0}^{\infty}\beta_n=\infty\\ &(\mathrm{III})\ \textstyle\sum_{n=0}^{\infty}|\alpha_{n+1}-\alpha_n|<\infty,\sum_{n=0}^{\infty}|\beta_{n+1}-\beta_n|<\infty\end{aligned}\tag{1.23}$$

序列 $\{x_n\}$ 由如下迭代格式产生

$$\begin{cases}x_0=x\in C\\ y_n=\alpha_nx_n+(1-\alpha_n)Tx_n\\ x_{n+1}=\beta_nu+(1-\beta_n)y_n\end{cases}\tag{1.24}$$

那么，$\{x_n\}$ 强收敛于算子 T 的不动点。

渐近半相对非扩张映象（也被称为拟 φ 渐近非扩张映象）和半相对非扩张映象（也被称为拟 φ 非扩张映象）是非扩张映象的推广，那么，有一个很自然的问题就是，正规、修正 Mann 迭代格式，以及正规、修正 Ishikawa 迭代格式，对于半相对扩张映象和渐近半相对非扩张映象是否成立。

2009 年，Zhou、Gao 和 Tan 在一致凸一致光滑的 Banach 空间框架下对于渐近半相对扩张映象，采用新的混杂算法修正 Mann 迭代程序，并得到强收敛定理。

定理 1.15 设 E 是一致光滑且一致凸的 Banach 空间，集合 C 是 E 的非空有界闭凸子集，映象 $\{T_i\}_{i\in I}$：$C\to C$ 是一族闭拟 φ 渐近非扩张映象满足 $F=\bigcap_{i\in I}F(T_i)\neq\varnothing$。假设每一个 T_i（$i\in I$）在 C 上渐近正则。若控制序列 $\{\alpha_n\}\subset[0,1)$ 满足条件 $\limsup\limits_{n\to\infty}\alpha_n<1$。序列 $\{x_n\}$ 由如下算法产生

$$\begin{cases}x_0\in C\\ y_{n,i}=J^{-1}[\alpha_nJx_n+(1-\alpha_n)JT_i^nx_n]\\ C_{n,i}=\{z\in C:\varphi(z,y_{n,i})\leqslant\varphi(z,x_n)+\zeta_{n,i}\}\\ C_n=\bigcap_{i\in I}C_{n,i}\\ Q_0=C\\ Q_n=\{z\in Q_{n-1}:[x_n-z,Jx_0-Jx_n]\geqslant 0\}\\ x_{n+1}=\Pi_{C_n\cap Q_n}x_n\end{cases}\tag{1.25}$$

其中，$\zeta_{n,i}=(1-\alpha_n)(k_{n,i}-1)M$，对任意的 $z\in F,x_n\in C,M\geqslant\varphi(z,x_n)$ 和 ΠF 是从 C 到 F 上的广义度量投影，则 $\{x_n\}$ 强收敛于 ΠFx_0。

与此同时，很多数学工作者也致力于 Ishikawa 迭代程序的研究。受到了 Nakajo 和 Takahashi 所做工作的启发，近来马丁内斯严（Martinez-Yanes）和 Xu 在 Hilbert 框架下借助于度量投影，针对非扩张应当向修正 Ishikawa 迭代程序获得了如下结果。

定理 1.16 设集合 C 是 Hilbert 空间 H 中的一非空闭凸子集，T 是具有非空不动点集的从 C 到自身的非扩张映象。设 $\{\alpha_n\}$ 和 $\{\beta_n\}$ 是属于 $[0,1]$ 的实序列，使得 $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n\leqslant 1-\delta$ 对于某个 $\delta\in(0,1]$ 并且 $\lim\limits_{n\to\infty}\beta_n=1$。

若 $\{x_n\}$ 由如下算法产生

$$\begin{cases}x_0\in C\\ z_n=\beta_nx_n+(1-\beta_n)Tx_n\\ y_n=\alpha_nx_n+(1-\alpha_n)Tz_n\\ C_n=\{z\in C:\|y_n-v\|^2\leqslant\|x_n-v\|^2+(1-\alpha_n)[\|z_n\|^2-\|x_n\|^2+2(x_n-z_n,v)]\}\\ Q_n=\{z\in C:[x_0-x_n,x_n-z]\geqslant 0\}\\ x_{n+1}=P_{C_n\cap Q_n}x_0\end{cases}\tag{1.26}$$

那么，$\{x_n\}$ 就强收敛于 $P_{F(T)}x_0$。

2008 年年初，Takahashi 等人引进了另一种修正方法，即新的混杂迭代方法。

定理 1.17 设 C 是实 Hilbert 空间 H 的非空闭凸子集，$\{T_n\}$ 与 τ 为 C 到 C 上的非扩张映象，使得 $\bigcap_{n=1}^{\infty}F(T_n)=F(\tau)\neq\varnothing$。令 $x_0\in H,C_1=C,u_1=P_{C_1}x_0$。