# 概率论与数理统计讲义

谭星熙 编

惠阳师范专科学校数学科

一九八一年 五月

# 前　言

本书是以一九八〇年高等师范院校概率论与数理统计教学大纲数学专业本科的内容为基础而编写的，内容包括概率论与数理统计两部分。概率论部分包括随机事件和概率，随机变量及其分布，随机变量的数学特征，大数定律与中心极限定理。数理统计部分包括参数估计与假设检验。

概率论部分作为基础知识，是本书的重点。本书特别注意到对概率论基本问题提供明晰的直观背景，书中列举的例题也较多。打[×]号的内容供讲授时参考。

编写本书的目的是为了着手于本校教材建设之需，借以提高业务水平和教学质量。也为业余自学者和中学教师提供参考资料。本书曾在七八级试用过（部分内容已在七七级试用）。

本书由我科谭星熙老师编写。在编写过程中，中山大学许刘俊讲师提出了许多宝贵意见，特此表示衷心感谢。

由于我们水平所限，编写工作又较匆促，书中一定会有不少错误和缺点，恳切地希望各兄弟院校及读者加以指出和提出意见。

惠阳师范专科学校数学科

一九八一年五月

# 目 录

# 绪　言

## 一．必然现象与随机现象

在自然界里，在生产实践和科学试验中，人们观察到的现象大体可以归结为两种类型。一种类型的现象是事前可以预言的，即在准确地重复某些条件下，它的结果总是肯定的，可以事前预言的；或者根据它过去的状态，在相同条件下完全可以预言将来的发展，我们把这一类型现象称之为确定性现象或必然现象。例如，"从高处让一物体自由下落时，它肯定会落到地面"；"同性的电互相排斥"；"在标准大气压下，水加热到100°C时必定沸腾"。早期的科学就是研究这一类现象的规律性。所应用到的数学工具如数学分析、几何、代数、微分方程等是大家所熟悉的。但人们逐渐发现还有另一种类型的现象，它是事前不可预言的，即在相同的条件下，重复进行试验，每次结果未必相同，或者是知道它过去的状态，在相同条件下，观察未来的发展事前却都不能完全肯定，这一类型的现象我们称之为偶然现象或随机现象。例如，我们随意地抛掷一个均匀的硬币，结果可能出现正面或反面；新生的婴儿可能是男孩，也可能是女孩；在相同海况与气象条件下，某定点海面的浪高时起时伏；当空气阻力等不能忽略时，弹道不能根据初始条件完全确定，可能向不同的方向作程度不同的偏移，事前不能肯定。类似的例子可以举出许多来。

## 二．概率论的研究对象

### 1．随机现象的统计规律性

对于自然界里存在的许多随机现象如何地进行研究？人们很自然地会提出这个问题。

必然性现象服从必然性规律的支配，这是不难被人们所理解的。这种规律性在数量上常常可以通过数学公式或方程式来表示。例如物体从高处自由落下时，在空中经过的路程可以由

公式 $S=\frac{1}{2}gt^2$ 准确地算出（在没有空气阻力的假定下）。对于随机现象，由于人们事先不能断定它将会发生什么样的结果，从表面上看好象是不可捉摸，纯粹是偶然性起支配作用而谈不上有什么规律的。

是不是这些偶然现象都没有什么规律性可寻呢？

事实上并非如此。人们通过长期的反复观察和实践，逐渐发现所谓不可预言，是对一次或少数几次观察或实践而言的，当进行大量观察时，偶然现象都呈某种规律，因而也是可以预言的。例如，根据各个国家各个时期的人口统计资料，新生婴儿男婴和女婴的比例大约总是 1:1，我国古代早在公元前2238年，根据人口普查已算出了这个结果。还有更简单的例子（大家可立即检验），均匀的硬币抛掷多次，正面和背面出现的比例总是近似1:1，而且大体上抛掷次数愈多，愈接近这个比值。历史上布封（Buffon）掷过4040次得到2048次正面；皮尔逊（Pearson）掷过24000次，得到12012次正面。

从上面的叙述中我们可以看到，自然界中存在着具有如下特征性的现象：在一定的条件组实现时，有多种可能性的结果发生，事前人们不能预言将出现那种结果，但大量重复观察时，所得的结果却呈现某种规律性，这种规律性称为随机现象的统计规律性。

2．由于随机现象具有统计规律性，概率论与数理统计就是运用数学工具研究随机现象统计规律性的一门数学学科。它是数学的一个有特色的分支。一方面，它有别开生面的研究课题，有自己独特的概念和方法，内容丰富，结果深刻；另一方面，它与其它数学分支又有紧密的联系，它是近代数学的重要组成部分。

三．概率论具有广泛的应用

特别在最近几十年中，概率论的方法被列入各个工程技术学科和社会学科。目前，概率论在近代物理，无线电与自动控

制，工厂产品的质量控制，农业试验，公用事业等等方面都找到了重要应用，这些实际需要也有力地推动了概率论的新发展，有些还形成了边缘学科（如信息论，排队论）。

在这个时期内，由于生物学和农业试验的推动，数理统计学也获得了很大的发展，它以概率论为理论基础又为概率论应用提供了有力的工具，两者互相推动，迅速发展。

# 第一章　随机事件和概率

## §1 随机事件的直观意义及其运算

### 1—1．随机试验与事件

基于研究随机现象的统计规律性，必须对随机现象进行观察，或进行一次科学试验。为了叙述方便，我们把对自然现象进行观察或进行一次科学试验，统称为一个试验。如果这个试验在相同条件下可以重复进行，而且每次试验的结果事前不可预言，我们称它为一个随机试验。下面，我们所说的试验都是指随机试验。

进行一个试验总有一个需要观察的目的。根据这个目的，试验被观察到有多种不同的可能结果。例如抛掷一个质地均匀的硬币，我们的目的是要观察它哪一面向上，这里只有两种不同的结果：“正面”或“背面”，至于硬币落在桌面上哪一个位置、朝哪个方向滚动等不在目的之列，我们不算结果。对于一个随机试验，我们感兴趣的是试验的结果，我们把试验可能出现的每一结果称为一个样本点，一般用$\omega$表示；样本点的全体构成样本空间，用$\Omega$表示。在具体问题中，给定样本空间是描述随机现象的第一步。

试验的每一可能结果一般又称为随机事件，简称事件，我我们用字母 A、B、C、… 表示。可见，一个事件就是由某些样本点构成的。

例1. 在0，1，2，…，9十个数字中任意选取一个，可有十种不同的结果："取得一个数是0"，…，"取得一个数是9"；但还有其它可能结果："取得一个数是单数"、"取得一个数是大于4的数"，"取得一个数是3的倍数"等等。

我们把不能再分的事件称为基本事件，如上例中，"取得一个数1"…"取得一个数9"都是基本事件。由若干个基本事件组成的事件称为复合事件。例如，上例中"取得一个数为3的倍数"是复合事件，它是由"取得一个数3"、"取得一个数6"、"取得一个数9"三个基本事件组合而成的。

一个事件是否称为基本事件，它是相对于试验的目的来说的。例如量度人的身高，一般说区间（0，4）中的任一个实数都可以是一个基本事件，这时基本事件有无穷多个。但如果量度高度是为了了解坐公共汽车是否需要买全票、半票或免票，这时就只有三个基本事件了。

## 1—2. 事件的关系和运算

进行一个试验，有这样或那样的事件发生，它们各有不同的特性，彼此之间又有一定的联系。下面我们引进事件之间的一些重要关系和运算，这将有利于今后对事件和它的概率的叙述和研究。

1. 在一定条件组下必然发生的事件称为必然事件，记作Ω。反之，在一定条件组下必然不发生的事件称为不可能事件，记作Φ。把必然事件和不可能事件也算作随机事件，这对我们讨论问题是方便的。

例如，"人的高度少于4米"是必然事件，而"人的高度大于4米"则是不可能事件。

2. 如果两个事件A与B不可能同时发生，则称事件A与

B互不相容的。例如必然事件$\Omega$与不可能事件$\phi$是互不相容的。又如例1中"取得一个数为0"和"取得一个数为1"是互不相容的。

如果$A_1, A_2, \cdots, A_n$中的任意两个事件是互不相容的，则称$A_1, A_2, \cdots, A_n$为互不相容。

3．如果事件A发生必然导致事件B发生，则称事件A含于事件B，或称事件B包含事件A。并记作$A \subset B$。如例1中令A表示"取得一个数为4的倍数"、B表示"取得一个数为偶数"，则$A \subset B$。

$A \subset B$的一个等价说法是，如果事件B不发生则事件A必然不发生。

由上述定义，立即可得：对任一事件A，$\phi \subset A \subset \Omega$。

如果$A \subset B$且$B \subset A$，则称A与B相等，记作$A = B$。

4．如C表示"事件A与B中至少有一个发生"这一事件，称为A与B的和，记作为$C = A \cup B$。如例1中，令A表示"取出一个数为偶数"（为方便起见，以后均把数0称作偶数），B表示"取得一个数大于5"，则$C = A \cup B$表示"取得一个数或者大于5，或者是偶数"。即等价于"取出的一个数为0，2，4，6，7，8，9之一数"。

5．如D表示"事件A与B同时发生"这一事件，称它为A与B的积，记作$D = A \cap B$。用前例，则D表示"取得一个数为6或8"。

6．如果E表示"事件A发生而事件B不发生"这一事件，则称E为A与B之差。记为$E = A - B$。同前例，$E = A - B$表示"取得一个数为0、2、4中之一数"。

7．$\Omega$与A之差$\Omega - A$这一事件称为A的逆事件。记为$\overline{A}$。它表示"A不发生"这一事件。同前例$\overline{A}$表示"取出一个数为奇数"。

事件的和与事件的积都可以推广到有限多个事件的情形，

即：

$A=\bigcup_{i=1}^{n}A_i$ 表示"$A_1, A_2, \cdots, A_n$中至少有一事件发生"这一事件。

$B=\bigcap_{i=1}^{n}B_i$ 表示"$B_1, B_2, \cdots, B_n$ 同时发生"这一事件。

我们有时需要考虑无穷多个事件，需要把事件的和与积推广到可列无穷多个的情形，即考虑

$$A=\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i \quad 与 \quad B=\bigcap_{i=1}^{\infty}B_i \quad .$$

为了说明这一需要，现举一例：某人进行科学实验，直到试验成功为止，若A表示实验成功，$A_i$表示实验在第$i$次才成功，则显然有

$$A=\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i \quad .$$

1—3．事件关系与集合关系两者的比较

1．集合的概念与表示

集合，常称为集．它是集合论中最基本的概念，不必给予精确的数学定义。

我们把为了某种目的而研究的对象的全体称为集。例如，数0和1，全体自然数，满足方程 $x^2-1=0$ 的正数，全体平面上的点，等等都是集。

集通常用A，B，…或$\Omega$等表示。今后讨论的集均认为是某一集的子集．这个最大的集往往用 $\Omega$ 表示。

集中的每一个对象称为元素或点。若$\omega$是A的元素就写为$\omega\in A$（读作$\omega$属于A）。如$x$不是集A的元素就写为$x\overline{\in} A$（读作$x$不属于A）。

不含任何元素的集，称为空集，常用$\Phi$表示。如满足方程$x^2+1=0$ 的实数的集是一空集。

有时集A的元素可以全部写出，则可将集的元素写出后外加花括号。例如 $A=\{-1, 1\}$ .

有时不能一一写出（或者即使可以一一写出）则可用文字或数学式子写出后外加花括号。例如，$A=\{$全体实数$\}$，$B=\{x: x^2-1=0\}$．（$B$ 亦可写为 $B=\{-1,+1\}$）．

2．随机事件用集合表示

设E为一个随机试验，$\omega$为试验的一个可能结果，称$\omega$为E的一个基本事件。联系于每一随机试验的每一基本事件，用一个只包含一个元素$\omega$的单点集$\{\omega\}$表示。由若干基本事件组成的复合事件，则用包含若干个元素的集合表示。显然，描述一个试验的样本空间是全体基本事件所组成的集合，而且，这是一个必然事件。记为$\Omega$．

例2．在例1中，取数的十种结果记为$\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_{10}$；$\omega_1=0$，$\omega_2=1,\cdots,\omega_{10}=9$。基本事件为$\{\omega_i\}$，$\Omega=\{0,1,\cdots,9\}$．

例3．E——掷一枚普通的硬币而观察出现的面，$\omega_1$——正面，$\omega_2$——反面，$\Omega=(\omega_1,\omega_2)$．

例4．计算某电话总机在$(0,t)$内的呼叫次数，则基本事件为 $A_0=\{\omega_0\}$，$A_1=\{\omega_1\},\cdots$，$A_n=\{\omega_n\},\cdots$，其中：$\omega_K=(K$次呼叫$)$，$K=0,1,2,\cdots$．$\Omega=\{\omega_K: K=0,1,2,\cdots\}$。

不可能事件表明了在某种条件下随机试验不可能有结果的，相当于一个没有任何元素的集合，因而不可能事件用空集$\phi$表示。

3．集合运算与事件运算

由于事件可用集合表示，我们可用集合论的观点来看待事件和事件的运算。为此，阐明集合某些运算的定义。

定义1．设有A、B两集，若集A的所有元素都是集B的元素，则称A是B的子集，又称B集包含A集或A集含于B集，写为$A\subset B$或$B\supset A$。

如 $N=\{$全体自然数$\}$，$R=\{$全体实数$\}$，则$N\subset R$。

下面说明“事件B包含事件A”与“集B包含集A”两概念是一致的。

假定事件B包含事件A，即事件A发生导致事件B发生。考虑含于A的一基本事件$\omega$，当$\omega$出现时，A出现。由假定这时B也出现，故此$\omega$必含于B。根据定义1，从而证明了集A含于集B。反之，设集A含于集B，即$A\subset B$。当事件A出现时，必定有A中的某基本事件$\omega$出现，既然$\omega\in A$，因而$\omega\in B$。故事件B也出现。这说明事件A的发生导致事件B的发生。由此可见，“事件B包含事件A”与“集B包含集A”两概念是一致的。

定义2．设A、B为两集，若$A\subset B$且$B\subset A$，则称A与B相等。记作 $A=B$。

例如$A=\{-1,-2\}$，$B=\{x:x^2+3x+2=0\}$，有$A=B$。

定义3．设A、B为两集，集C包含A与B中所有元素，且不包含其它元素，则称C是A与B的并（和）集。记为$C=A\cup B$ 或 $C=A+B$。

例如，$A=\{$全体正有理数$\}$，$B=\{$全体正无理数$\}$，$C=\{$全体正实数$\}$，则 $C=A\cup B$。

定义4．设A、B为两集，集D包含A与B两集的所有共同的元素，且不包含任何其它元素，则称D为集A与集B的交或积，记为 $D=A\cap B$ 或 $D=A\cdot B$。

例如，$A=\{1,2,3,4,5,6\}$，$B=\{4,5,6,7,8\}$，则$D=A\cap B=\{4,5,6\}$。

定义5．若A、B两集没有共同元素，即$A\cap B=\Phi$，则称A集与B集互斥，或互不相交。

例如．$A=\{1,2,3,4\}$，$B=\{5,6,7,8\}$，则A、B互斥。

注：集合的并、交、互斥可推广到有限个或可数无穷个的情形。

定义6．若A、B为两集，C集为包含属于B集而不属于A集的所有元素，但不包含别的元素，则称C集为集B与集A的差集，记为$C=B-A$。

特别当 $B=\Omega$ 时，记 $\overline{A}=\Omega-A$，称为A的余集或A集之逆。

由事件B包含事件A"与"集B包含集A"两概念的一致性，类似地可以看到其它相应概念的一致性：事件的相等"和""积"、"差"分别与集的"相等"、"和"、"积"、"差"一致。

我们应该注意的是，要学会用概率论的语言来解释这些关系及运算，并且会用这些关系来表示一些事件。

例如：若A、B、C是三个事件，则A发生而B与C都不发生可以表示为：$A\overline{B}\,\overline{C}$ 或 $A-B-C$。

4．事件关系的几何示意

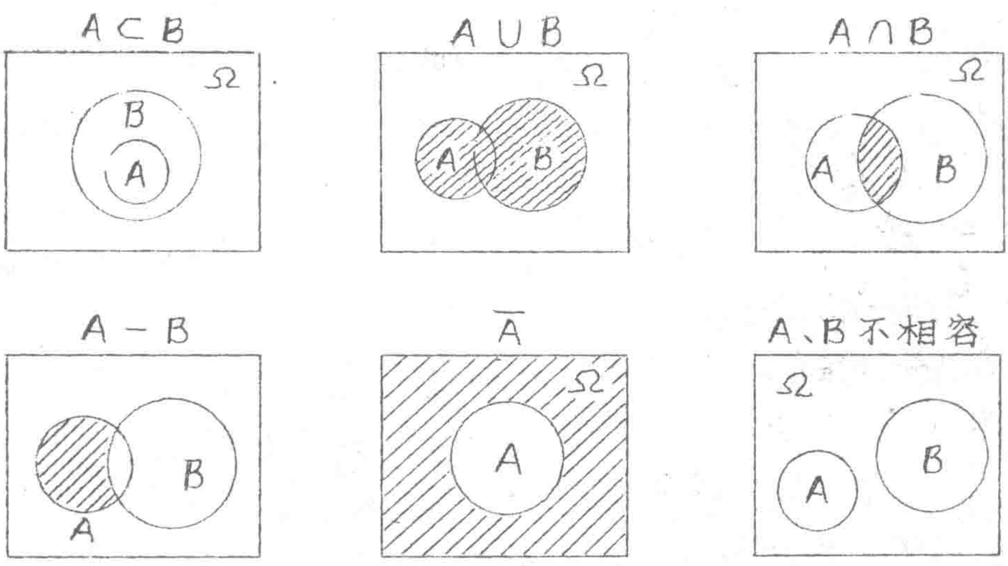


图 1—1—1

$A\cup B$、$A\cap B$，$A-B$，$\overline{A}$ 分别为图中阴影部分。

5．对于事件的运算成立下列关系式：

(i) 交换律：$A\cup B=B\cup A$，$AB=BA$；

(ii) 结合律：$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$，$(AB)C=A(BC)$；

(iii) 分配律：$(A\cup B)\cap C=A\cdot C\cup B\cdot C$，

$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$；

(iv) 德莫根(De Morgan)定理：

$\overline{A_1\cup A_2}=\overline{A_1}\cap\overline{A_2}$， $\overline{A_1\cap A_2}=\overline{A_1}\cup\overline{A_2}$．

对于$n$个事件，甚至对于可列个事件，德莫根定理也成立。

上述关系式可由集合相等的定义直接证明之，它们的证明留给读者。

## §2. 概率的直观意义及其计算

我们观察一个随机试验的各种事件，一般来说总会发现有些事件出现的可能性大些，有些事件出现的可能性小些，有些事件出现的可能性彼此大致相同。

研究随机现象不仅要知道它可能出现那些事件，更重要的是研究各种事件出现可能性大小，揭示出现这些事件的内在的统计规律。只有这样才利于我们认识世界和改造世界。例如知道了某电话总机在24小时内出现的呼叫次数的可能性大小，就可以根据要求配置一定的线路设置、管理人员等。

然而只是大概地能比较事件发生的可能性大小，并不能进行确切的推断，得出科学的精确结论。我们要求有一个刻划事件发生可能性大小的数量指标，这个数量指标至少应满足两个要求：

(i) 它应是事件本身所固有的，不随人们主观意志而改变的一种客观的量度，而且可以在相同条件下通过大量的重复试验予以识别和检验。

(ii) 它必须符合一般常情。例如，事件发生可能性大的，它的值就大，事件发生可能性小的，它的值就小；必然事件的值最大，不可能事件的值最小而等于零。

我们把刻划事件发生可能性大小的数量指标叫做事件的概率。事件A的概率以$P(A)$表示，并且规定$0 \leq P(A) \leq 1$。

从概率论历史的发展，人们曾针对不同的问题，从不同的角度给出了定义概率和计算概率的各种方法。然而所定义的概率都存在一定的缺陷，所以我们毋宁说它是一种计算概率的方法。

## 2—1. 频率

对于已给的事件A，到底应该用哪个数字来作为它的概率呢？就是说，怎样从数量上来规定P(A)呢？这决定于所研究的随机试验E及A的特殊性，不能一概而定。当然，事件A在试验前是不能预言其是否发生的。那么，一次试验的观察是不足以说明问题的。只有从大量的试验中观察其发生的规律，而每次试验皆在相同条件下重复进行，同时相互之间毫不影响。

例1．考察"抛硬币"这个随机试验，为了要知道"正面"出现的可能性的大小，我们将硬币抛$n$次，观察在$n$次试验中"正面"出现的次数。现在将硬币连抛5次，50次，500次各做了十遍，得数据如表1—2—1。表中，$n_{正面}$表示在$n$次试验中"正面"出现的次数，又称频数。比值$W=f_n(正面)=n_{正面}/n$称为在这$n$次试验中出现"正面"的频率。

表1—2—1

| 实验序号 | $n=5$ | | $n=50$ | | $n=500$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | $n_{正面}$ | $W$ | $n_{正面}$ | $W$ | $n_{正面}$ | $W$ |
| 1 | 2 | 0.4 | 22 | 0.44 | 251 | 0.502 |
| 2 | 3 | 0.6 | 25 | 0.50 | 249 | 0.498 |
| 3 | 1 | 0.2 | 21 | 0.42 | 256 | 0.512 |
| 4 | 5 | 1.0 | 25 | 0.50 | 253 | 0.506 |
| 5 | 1 | 0.2 | 24 | 0.48 | 251 | 0.502 |
| 6 | 2 | 0.4 | 21 | 0.42 | 246 | 0.492 |
| 7 | 4 | 0.8 | 18 | 0.36 | 244 | 0.488 |
| 8 | 2 | 0.4 | 24 | 0.48 | 258 | 0.516 |
| 9 | 3 | 0.6 | 27 | 0.54 | 262 | 0.524 |
| 10 | 3 | 0.6 | 31 | 0.62 | 247 | 0.494 |
| | | | | | | |

从上表可以看出，抛硬币次数较少时，"正面"出现的频率差异较大，但是，随着抛硬币次数的增多，"正面"出现的