数学奥林匹克小丛书

高中卷 11

Shuxue Aolinpike XIAOCONGSHU

概率与期望

单墫 著

华东师范大学出版社

olinpike

数学奥林匹克小丛书

高中卷 11

概率与期望

inpike Xiao Congshu

单墫 著

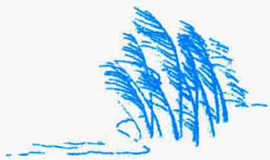
华东师范大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

数学奥林匹克小丛书．高中卷．概率与期望／单墫著.—上海：华东师范大学出版社，2005.3
ISBN 7-5617-4164-2

I.数...　II.单...　III.数学课-高中-教学参考资料　IV.G634.603

中国版本图书馆CIP数据核字(2005)第019479号



数学奥林匹克小丛书·高中卷

概率与期望

著　　者　单　墫
策划组稿　倪　明
责任编辑　审校部编辑工作组
特约编辑　李　娜
封面设计　高　山
版式设计　蒋　克

出版发行　华东师范大学出版社
　　　　　市场部 电话 021-62865537
　　　　　门市(邮购) 电话 021-62869887
　　　　　门市地址 华东师大校内先锋路口
业务电话　上海地区 021-62232873
　　　　　华东 中南地区 021-62458734
　　　　　华北 东北地区 021-62571961
　　　　　西南 西北地区 021-62232893
业务传真　021-62860410 62602316
http://www.ecnupress.com.cn
社　　址　上海市中山北路3663号
　　　　　邮编 200062

印 刷 者　江苏句容市排印厂
开　　本　787×960 16开
印　　张　11
字　　数　159千字
版　　次　2005年4月第一版
印　　次　2005年4月第一次
印　　数　11 000
书　　号　ISBN 7-5617-4164-2/G·2389
定　　价　12.00元

出 版 人　朱杰人

总序

数学竞赛像其他竞赛活动一样，是青少年学生的一种智力竞赛．在类似的以基础科学为竞赛内容的智力竞赛活动中，数学竞赛的历史最悠久、国际性强，影响也最大．我国于1956年开始举行数学竞赛，当时最有威望的著名数学家华罗庚、苏步青、江泽涵等都积极参加领导和组织竞赛活动，并组织出版了一系列青少年数学读物，激励了一大批青年学生立志从事科学事业．我国于1986年起参加国际数学奥林匹克，多次获得团体总分第一，并于1990年在北京成功地举办了第31届国际数学奥林匹克，这标志着我国数学竞赛水平在国际上居领先地位，为各国科学家与教育家所瞩目．

我国数学竞赛活动表明，凡是开展好的地区和单位，都能大大激发学生的学习数学的兴趣，有利于培养创造性思维，提高学生的学习效率．这项竞赛活动，将健康的竞争机制引进数学教学过程中，有利于选拔人才．由数学竞赛选拔的优胜者，既有踏实广泛的数学基础，又有刻苦钻研、科学的学习方法，其中的不少青年学生将来会成为出色的科学工作者．在美国，数学竞赛的优胜者中后来成名如米尔诺（J.W.Milnor）、芒福德（D.B.Mumford）、奎伦（D.Quillen）等都是菲尔兹数学奖的获得者；在波兰，著名数论专家辛哲尔（A.Schinzel）学生时代是一位数学竞赛优胜者；在匈牙利，著名数学家费叶尔（L.Fejér）、里斯（M.Riesz）、舍贵（G.Szegö）、哈尔（A.Haar）、拉多（T.Radó）等都曾是数学竞赛获奖者．匈牙利是开展数学竞赛活动最早的国家，产生了同它的人口不成比例的许多大数学家！

在开展数学竞赛的活动同时，各学校能加强联系，彼此交流数学教学经验，从这种意义上来说，数学竞赛可能成为数学课程改革的“催化剂”，成为培养优秀人才的有力措施．

不过，应当注意在数学竞赛活动中，注意普及与提高相结合，而且要以普及为主，使竞赛具有广泛的群众基础，否则难以持久．

当然，现在有些人过于关注数学竞赛的成绩，组织和参与都具有很强的功利目的，过分扩大数学竞赛的作用，这些都是不正确的，违背了开展数学竞赛活动的本意. 这些缺点有其深层次的社会原因，需要逐步加以克服，不必因为有某些缺点，就否定这项活动.

我十分高兴看到这套《数学奥林匹克小丛书》的正式出版. 这套书，规模大、专题细. 据我所知，这样的丛书还不多见. 这套书不仅对数学竞赛中出现的常用方法作了阐述，而且对竞赛题作了精到的分析解答，不少出自作者自己的研究所得，是一套很好的数学竞赛专题教程，也是中小学生和教师的参考书.

这套小丛书的作者都是数学竞赛教学和研究人员，不少是国家集训队的教练和国家队的领队. 他们为我国开展数学竞赛的活动和我国学生在IMO上取得成绩、为国争光作出了贡献，为这套书尽早面世付出了艰辛的劳动. 华东师大出版社在出版《奥数教程》和《走向IMO》等竞赛图书基础上，策划组织了这套丛书，花了不少心血. 我非常感谢作者们和编辑们在这方面所做的工作，并衷心祝愿我国的数学竞赛活动开展得越来越好.

王元

王元，著名数学家，中国科学院院士，曾任中国数学会理事长、中国数学奥林匹克委员会主席.

前言

概率论是一个重要的数学分支，应用也极为广泛，所以不仅高等学校理工科必须学习，而且现在它也进入了我国中学教材.

这本小册子，通过问题来阐述概率论的内容、方法与意义，着重介绍两个重要概念：概率、数学期望(简称期望). 全书共 65 节，也就是 65 个问题，此外还附有习题 107 个，习题均有解答.

这本小册子，是一本课外读物，不是教科书. 它可以作为教科书的延伸与补充，目的是为了提高学习的兴趣，开拓眼界. 有些问题的讨论稍稍深入，可作探索或研究性学习的内容. 初读时如觉得困难，可以略去.

我们假定读者具备排列与组合的知识. 如果正在学习或已经学过课本上概率部分的内容，当然更好. 不过，课本上已有的内容，我们尽量少说，以免重复.

这本小册子，能否到您手中，是一件随机事件. 我不知道它发生的概率有多大，期望它能够到您的手中，这表明您与它特别有缘.

目　录

0 基本知识

本节罗列概率论的一些术语及基本知识，以便读者查阅.

1. **样本点**：一次试验(例如掷骰子)，可能有多种结果，每个结果称为一个样本点，也称为基本事件.

2. **基本事件**：同 1.

3. **样本空间**：样本点的集合，称为样本空间，也就是基本事件的总体. 本书记为 I.

4. **随机事件**：样本空间的子集称为随机事件，简称事件.

5. **事件**：同 4.

6. **必然事件**：在试验中必然发生的事件，即样本空间 I 自身. 它的概率为 1，即 $P(I)=1$.

7. **不可能事件**：不可能发生的事件，即空集 $\varnothing$. 它发生的概率为 0，即 $P(\varnothing)=0$.

8. **互斥事件**：事件 A、B 不能同时发生，即 $A\cap B=\varnothing$，则称 A、B 为互斥事件，也称为互不相容的事件.

9. **互不相容的事件**：同 8.

10. **和事件**：$A\cup B$ 称为事件 A 与 B 的和事件.

11. **积事件**：$A\cap B$ 称为事件 A 与 B 的积事件，也简记为 AB.

12. **概率**：概率是样本空间 I 中的一种测度，即对每一个事件 A，有一个实数与它对应，记为 $P(A)$，具有以下三条性质：

(1) $P(A)\geqslant 0$ (非负性)；

(2) $P(I)=1$；

(3) 在 A、B 为互斥事件时，$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$ (可加性).

13. **频率**：在同样的条件下进行 n 次试验，如果事件 A 发生 m 次，那么就说 A 发生的频率为 $\frac{m}{n}$.

14. **古典概型**：如果试验有 n 种可能的结果，并且每一种结果发生的可能性都相等，那么这种试验称为古典概型，也称为等可能概型，其中每种结果发生的概率都等于$\frac{1}{n}$.

15. **等可能概型**：同 14.

16. **对立事件**：如果事件 A、B 满足

$$A \cap B = \varnothing, A \cup B = I,$$

那么 A、B 称为对立事件，并将 B 记为 $\overline{A}$. 我们有一个常用公式

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A).$$

17. **条件概率**：在事件 A 已经发生的条件下，事件 B 发生的概率称为条件概率，记为 $P(B|A)$. 我们有

$$P(AB) = P(A)P(B \mid A).$$

即

$$P(B \mid A) = \frac{P(AB)}{P(A)}.$$

注意 $P(B|A)$，$P(B)$，$P(A|B)$的不同. $P(B)$是事件 B 发生的概率（没有条件）；$P(B|A)$是 A 已经发生的条件下，B 发生的概率；$P(A|B)$是 B 已经发生的条件下，A 发生的概率.

18. **独立事件**：如果事件 A 是否发生，对于事件 B 的发生没有影响，即

$$P(B \mid A) = P(B),$$

那么称 A、B 为独立事件. 易知这时

$$P(AB) = P(A)P(B),$$

并且

$$P(A \mid B) = P(A),$$

即 B 是否发生，对于 A 的发生没有影响. 所以事件 A、B 是互相独立的.

19. **全概率公式**：如果样本空间 I 可以分拆为 B_1，B_2，…，B_n，即

$$B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_n = I,$$

并且

$$B_i \cap B_j = \varnothing \quad (1 \leqslant i < j \leqslant n),$$

那么事件 A 发生的概率

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A \mid B_i) P(B_i).$$

20. **贝叶斯(Bayes)公式**：设 $B_1, B_2, \cdots, B_n$ 是 I 的分拆. 在已知所有的 $P(B_i)$ 与 $P(A \mid B_i)$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ 时，可用公式

$$P(B_j \mid A) = \frac{P(AB_j)}{P(A)} = \frac{P(A \mid B_j) P(B_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(A \mid B_i) P(B_i)}$$

求出 $P(B_j \mid A) \quad (j = 1, 2, \cdots, n)$. 这个公式称为贝叶斯公式.

21. **随机变量**：随机变量 X 是样本空间 I 上的函数，即对样本空间 I 中的每一个样本点 e，有一个确定的实数 $X(e)$ 与 e 对应，$X = X(e)$ 称为随机变量.

22. **数学期望**：设 X 是随机变量，则

$$E(X) = \sum_{e \in I} X(e) P(e)$$

称为 X 的数学期望. 其中 e 跑遍样本空间 I 的所有样本点，$P(e)$ 是 e 的概率.

如果 a 是常数，那么

$$E(aX) = aE(X).$$

如果 X、Y 是两个随机变量，那么

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y).$$

1 抛硬币

2004 年欧洲杯足球赛，首场是希腊对葡萄牙. 主裁判示意两队队长走近，询问他们谁来猜结果，然后掏出一枚硬币，高高抛起，落下的是正面，正是希腊队队长猜测的结果. 于是便由希腊选择(上半场)场地. 这场比赛出人意料，希腊以 2∶1 战胜了葡萄牙.

假定硬币是均匀的，出现正面与出现反面的机会应当相等，即一半对一半，也就是说，出现正面与反面的机会都是$\frac{1}{2}$.

这里所说的机会，在数学中称为概率(也译作或然率，几率. 后一名称在分子物理学中经常采用).

如果一个试验有 n 个可能的结果，并且每个结果出现的可能性都相等，而其中有 m 个结果属于事件 A，那么我们就说事件 A 的概率是$\frac{m}{n}$，并记为 $P(A)=\frac{m}{n}$，$P(A)$表示事件 A 的概率.

例如在抛硬币时，有两个可能的结果：正面与反面，$n=2$. 用 A 表示出现正面，B 表示出现反面，那么

$$P(A)=P(B)=\frac{1}{2}.$$

现将一枚硬币抛掷 3 次. 求：

(1) 恰有一次出现正面的概率；

(2) 至少有一次出现正面的概率.

*　　*　　*　　*

(1) 抛掷 3 次，共有 $2^3=8$ 种结果，即

正正正　正反正　反正正　反反正
正正反　正反反　反正反　反反反

其中有 3 种情况恰有一次出现正面，所求概率为$\frac{3}{8}$.

一般地，抛掷 n 次，有 2^n 种情况，其中正面恰出现 k 次的情况为 C_n^k，所以正面恰出现 k 次的概率为

$$\frac{C_n^k}{2^n}.$$

(2) 在上面的 8 种结果中，只有 1 种 3 次都不出现正面，其他 7 种都有正面出现，所求概率为$\frac{7}{8}$.

一般地，抛掷 n 次，不出现正面的概率为$\frac{1}{2^n}$，至少出现一次正面的概率为$\frac{2^n-1}{2^n}$.

上面说掷一次硬币，出现正面与反面的概率都是$\frac{1}{2}$，并不是说抛一次硬币中，有$\frac{1}{2}$次是正面，$\frac{1}{2}$次是反面，次数只能是整数. 每抛一次，结果不是正面就是反面，不会有$\frac{1}{2}$的正面与$\frac{1}{2}$的反面. 但如果抛很多次，那么其中正面与反面出现的次数应当大致相等. 这件事，似乎显然，却也有不少认真的人认真地做过试验. 例如法国的文化名人蒲丰(Buffon，1707—1788)的试验结果如下：

次数	正面	频率
4 040	2 048	0.506 9

这里的(正面出现的)频率指正面出现的次数与总次数的比，即$\frac{2\,048}{4\,040}$.

另一位统计学家 K · 皮尔逊(Pearson，1857—1936)更为认真. 他做了两次试验，结果如下：

次数	正面	频率
12 000	6 019	0.501 6
24 000	12 012	0.500 5

由此可见正面出现的机会的确约占$\frac{1}{2}$(即 0.5)，而且随着抛掷次数的增加，频率趋于概率$\frac{1}{2}$.

2 名将狄青

北宋名将狄青率兵去打侬智高. 出战之前, 他召集将士说:"这里有 100 枚铜币, 我要将它们抛在地上, 如果全部正面朝上, 那么表明天助我们, 这一仗必胜无疑."说罢便将钱抛出, 居然 100 枚铜币个个正面朝上!

于是将士们欢声如雷. 狄青也大为高兴, 说:"且将这 100 枚铜币钉在地上, 待我们凯旋时再到这里庆贺一番."

掷 100 枚铜币, 全部正面朝上, 概率当然很小. 请算一下这件事发生的概率是多少?

* * * *

共有 2^{100} 种可能结果, 而全部正面朝上仅有惟一的 1 种.

所求概率为

$$\frac{1}{2^{100}}=\left(\frac{1}{2}\right)^{100}=7.88\cdots\times10^{-31}.$$

粗糙的估计可用 $2^{10}=1\,024\approx10^3$, 所以

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{100}\approx10^{-30}.$$

即小数点后 29 个 0, 然后 1 个 1.

概率这样小的事, 竟然发生, 无怪将士们以为这是"天意".

狄青果然获胜回来, 吩咐士兵将铜币全部起起来, 大家才发现铜币是特制的, 两面一样, 都是"正面", 所以狄青一掷, 铜币全是正面. 这本是概率为 1 的必然事件. 狄青利用迷信, 以神道设教, 建立了将士们的信心.

即使只有一半铜币正面朝上, 概率也只有

$$\frac{C_{100}^{50}}{2^{100}}\approx0.08.$$

还不到 $\frac{1}{10}$. 所以不作弊，要使一半铜币正面朝上也不是一件容易办到的事情.

当然，小概率事件（概率很小的事件）并非是不可能发生的. 在一些重要的试验中，例如航天飞机的飞行，即使发生意外的概率很小，也必须反复检查，注意排除隐患. 美国哥伦比亚航天飞机就是在第 28 次飞行中，因为一片石棉瓦的脱落，造成 7 名宇航员全部遇难的悲剧.

小概率事件即生活中常说的巧事. 有一次在 NBA 比赛中，一名球员在终场哨吹响前 1 秒抢得篮板球，背对球场，将球用力向后一抛，竟然投入对方篮圈. 据说发生这种事的概率连百万分之一也不到，却实实在在地发生了.

以"小心地求证"著称的胡适先生，在他的《红楼梦考证》中断言红楼梦后四十回是高鹗作的. 其主要理由是"程序说先得二十余卷，后又在鼓担上得十余卷. 此话便是作伪的铁证，因为世间没有这样奇巧的事".

胡适的理由实在不够充分，因为世间常有奇巧的事. 胡适先生自己在《红楼梦考证》的附录中承认，他在各处搜求《四松堂集》近一年多了都没有结果，"忽然三日之内两个本子一齐到我手里！ 这真是'踏破铁鞋无觅处，得来全不费工夫'了".

胡先生既然亲身遇到过这样奇巧的事，说别人的话是"作伪的铁证"，便显得非常武断了.

将来我们还会见到概率为 0 的事件也会发生（例如第 43 节）.

3 掷骰子

骰子是一个立方体，6 个面上分别刻有 1、2、3、4、5、6 点. 我们假定骰子是均匀的(没有灌上铅或水银)，那么掷一次骰子，出现的 6 种结果是等可能的，即出现 1～6 点的概率都是$\frac{1}{6}$.

如果掷 2 只骰子，那么结果就有 $6\times6=36$ 种. 掷 3 只骰子，结果有 $6\times6\times6=216$ 种.

求以下事件的概率：

(1) 掷 1 只骰子，出现的点数大于 4.

(2) 掷 2 只骰子，至少出现 1 个么(么就是 1).

(3) 掷 3 只骰子，3 只骰子上出现的点数的和大于 15.

*　*　*　*

(1) 出现的点数大于 4，即点数为 5 或 6，有 2 种情况，所求概率为

$$\frac{2}{6}=\frac{1}{3}.$$

(2) 至少出现一个么，有 11 种情况. 即第 1 只骰子出现么，第二只骰子出现 1～6，有 6 种；第二只骰子出现么，第一只骰子出现 1～6，也是 6 种. 其中两只骰子都是么被重复计算 1 次. 所以共有

$$2\times6-1=11$$

种. 所求概率为$\frac{11}{36}$.

(3) 点数和大于 15，即点数和为 16、17 或 18.

点数为 18，只有 1 种，即 3 只骰子都是 6.

点数为 17，即 3 只骰子分别为 6, 6, 5，有 3 种(每个骰子都可以为 5，另两个为 6).