21世纪复旦大学研究生教学用书
复旦大学数学研究生教学用书

# 随机过程基础（第二版）

应坚刚　金蒙伟　编著

復旦大學出版社
www.fudanpress.com.cn

21世纪复旦大学研究生教学用书

# 随机过程基础

（第二版）

应坚刚　金蒙伟　编著

复旦大学出版社

**图书在版编目(CIP)数据**

随机过程基础/应坚刚,金蒙伟编著. —2 版. —上海:复旦大学出版社,2017.1
21 世纪复旦大学研究生教学用书
ISBN 978-7-309-12558-0

Ⅰ. 随… Ⅱ. ①应…②金… Ⅲ. 随机过程-研究生-教材 Ⅳ. 0211.6

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 229179 号

**随机过程基础**(第二版)
应坚刚 金蒙伟 编著
责任编辑/范仁梅 陆俊杰

复旦大学出版社有限公司出版发行
上海市国权路 579 号 邮编:200433
网址:fupnet@fudanpress.com http://www.fudanpress.com
门市零售:86-21-65642857 团体订购:86-21-65118853
外埠邮购:86-21-65109143
上海春秋印刷厂

开本 787×960 1/16 印张 18.75 字数 309 千
2017 年 1 月第 2 版第 1 次印刷

ISBN 978-7-309-12558-0/O·607
定价: 37.00 元

# 内 容 提 要

本书是研究生随机过程教材. 全书共 4 章,以公理概率论为入口,重点讲授鞅与 Markov 过程,分别介绍了条件期望、无穷维空间的测度构造、Markov 链、Poisson 测度与 Poisson 过程、Brown 运动、鞅与连续鞅的随机积分、Itô 公式、Girsanov 公式、随机微分方程,还介绍了右 Markov 过程、Feller 过程与 Lévy 过程、Brown 运动的位势理论、游离理论,和 Markov 过程的 Killing 变换与时间变换等. 本书还配备了一定数量难易不等的习题,以利读者加深理解,启发思考。

本书可作为基础数学、应用数学、计算数学、运筹学与控制论、概率论与数理统计等数学类各专业方向的研究生学位课教材,也可供理工类和金融类相关专业的研究生以及自然科学工作者、工程技术人员参考使用.

# 编辑出版说明

21 世纪，随着科学技术的突飞猛进和知识经济的迅速发展，世界将发生深刻变化，国际间的竞争日趋激烈，高层次人才的教育正面临空前的发展机遇与巨大挑战.

研究生教育是教育结构中高层次的教育，肩负着为国家现代化建设培养高素质、高层次创造性人才的重任，是我国增强综合国力、增强国际竞争力的重要支撑.为了提高研究生的培养质量和研究生教学的整体水平，必须加强研究生的教材建设，更新教学内容，把创新能力和创新精神的培养放到突出位置上，必须建立适应新的教学和科研要求的有复旦特色的研究生教学用书.

“21 世纪复旦大学研究生教学用书”正是为适应这一新形势而编辑出版的.“21 世纪复旦大学研究生教学用书”分文科、理科和医科三大类，主要出版硕士研究生学位基础课和学位专业课的教材，同时酌情出版一些使用面广、质量较高的选修课及博士研究生学位基础课教材.这些教材除可作为相关学科的研究生教学用书外，还可以供有关学者和人员参考.

收入“21 世纪复旦大学研究生教学用书”的教材，大都是作者在编写成讲义后，经过多年教学实践、反复修改后才定稿的.这些作者大都治学严谨，教学实践经验丰富，教学效果也比较显著.由于我们对编辑工作尚缺乏经验，不足之处，敬请读者指正，以便我们在将来再版时加以更正和提高.

复旦大学研究生院

# 第二版前言

本教材离第一版出版已经 10 年了, 感谢学生和读者, 在使用的过程中发现很多错误和写得不合适的地方, 我们都一一做了修改. 细心的读者可以发现, 现在的版本与第一版相比，改动的地方还是比较多的, 希望对学习随机过程的学生和其他读者有所帮助.

本教材在复旦大学作为三门研究生课的教材, 第一门课是概率论与随机过程基础, 主要内容是第一章与第二章; 第二门课是随机分析引论, 主要内容包括第一章的 §1.1 最后的单调类方法, §1.3 一致可积性定义和相关定理, 再加上 §1.4 特征函数唯一性定理以及 §1.5 条件数学期望, 再有第二章 §2.5 Brown 运动, 然后讲第三章随机分析基础; 第三门课是 Markov 过程, 主要内容是第二章的 §2.2 转移半群, §2.3 Markov 链以及第四章. 每门课大概都是 50 个课时.

再次感谢复旦大学出版社范仁梅和陆俊杰编辑的帮助.

应坚刚

2016/12/1

# 第一版前言

概率论是研究机会的学科，有非常强的直观背景，它起源于人类对赌博中机会的兴趣，对它的一些问题的研究可追溯至几个世纪之前，著名数学家P.Fermat, B.Pascal，J.Bernoulli，P.S.Laplace 等都对概率论的发展作出过巨大贡献，而为这一学科建立坚实的数学基础是 20 世纪 30 年代，俄国著名数学家 A.N.Kolmogorov 将概率论的大厦建立在测度论的基石上.但我们不能忘记概率与测度不同的一面，它有着深刻的且是严格的测度论公理体系所无法体现的直观背景.

此教材重点讲述 Markov 过程与鞅论，考虑到大多数学生在本科时缺乏测度论的训练，我们在第一章简要介绍测度论与概率论的基本概念与重要结果，如 Caratheodory 扩张定理、Radon-Nikodym 定理、随机变量及其分布、条件数学期望等，要注意的是没有对这些概念的真正理解，是不可能真正理解现代随机过程理论的.在第二章中，我们将介绍 Kolmogorov 的相容性定理，以及一些常见的过程，如平稳过程、Markov 链、Markov 过程、独立增量过程、Poisson 过程、Brown 运动等.在第三章中，我们将给出鞅的定义，讨论鞅的基本性质、鞅不等式、鞅与其他随机过程的关系，以及鞅的正则化.另外我们还将证明连续鞅有有限二次变差并定义随机积分，最后介绍重要的 Itô 公式及其应用.

该教材在浙江大学和复旦大学作为数学系研究生随机过程基础课的教材已经使用多年，此次出版前增加并修订了一些内容.考虑到 Markov 过程的重要性，还增加了第四章:Markov 过程基础，讲述 Markov 过程、强 Markov 性、概率位势理论、Feller 过程和 Lévy 过程等，这部分内容对于数学系研究生基础课可能过于专门化，适合作为概率专业研究生的专业课内容讲授.

这里要感谢浙江大学的陈叔平教授，他首先提议和鼓励我们为浙大数学系研究生开设这门课程并提供方便，感谢赵敏智、方兴、张慧增、何萍博士，他们多次阅读此教材并为教材的修改提出了许多的重要意见，感谢周梦、吴小伟同学，他们在阅读过程中也指出并改正了一些错误.我们还要特别感谢汪嘉冈教授、马志明教授和李贤平教授，他们在百忙中仔细地阅读了全书并提出了许多重要的修改意见.最后还要感谢复旦大学出版社的范仁梅女士为本书顺利出版提供的帮助.教材虽经不断的修改，但错误依然难免，如果读者发现其中的错误或有建议，请直接和作者联系，非常感谢.

应坚刚 jgying@fudan.edu.cn

金蒙伟 jmw@zju.edu.cn

# 目 录

# 第一章　概率论基础

在这一章中, 我们将考察概率论的基本概念, 它们也是随机分析理论的基础. 我们将简略而又系统地介绍测度论与概率论的重要概念和定理, 为了让此书尽量自我包含, 我们将简要地给予证明. 需要强调的是, 虽然这里我们在测度论基础上建立概率的概念, 但是概率的直观思想是远非测度论所能体现的, 所以读者不能省略对于初等概率论的系统学习和理解.

在本书中, 一些基本符号介绍如下. 集合 $\mathbf{R}$ 表示实数集, $\mathbf{Q}$ 表示有理数集, $\mathbf{Z}$ 表示整数集, $\mathbf{N}$ 表示自然数集, 下标 $+$ 表示非负元素全体, 如 $\mathbf{R}_+$ 表示非负实数集, 其他类似. 符号 $\wedge$ 和 $\vee$ 表示两个实数取小和取大的运算. 符号 $C$ 表示连续函数空间, $C_0$ 表示紧支撑连续函数空间, $C_\infty$ 表示无穷远处趋于零的连续函数空间, $C_b$ 表示有界连续函数空间.

让我们先承认并叙述集合论中两个等价的公理, Zorn 引理和选择公理. 在后面会用到.

**选择公理:** 任何集合族有一个选择函数, 即若 $\{A_i : i \in I\}$ 是一个集合族, 那么存在映射 $f : \{A_i : i \in I\} \longrightarrow \bigcup_{i\in I} A_i$ 使得对任何 $i \in I$, $f(A_i) \in A_i$. 也就是说, 我们可以同时从每个集合中取出一个元素组成一个集合.

注意选择公理可以推出 Banach-Tarski 定理, 即三维空间的单位球可以分为五个部分然后通过刚体变换变成为两个单位球. 这与直观矛盾, 所以一些数学家排斥选择公理. 在大多数数学家看来, 排斥选择公理的代价远远大于接受类似 Banach-Tarski 定理所导出的与直观相矛盾的事实. 但是我们在应用选择公理时还是需三思.

**Zorn 引理:** 设集合 $A$ 是一个偏序集, 如果其中的任意全序子集有上界, 那么 $A$ 有极大元, 即存在 $a \in A$ 使得 $A$ 中没有比 $a$ 更大的元素.

这里选择公理所涉及的概念只有集合和映射, 不需要太多解释. 对于 Zorn 引理, 有几个概念需要稍加解释, 偏序是数学的基础概念, 指满足传递性的一个关

系, 但集合中的元素互相之间未必可比较. 但若集合中的任何两个元素之间可比较, 那么此集合称为全序集. 一个集合的上界是指它比集合中的所有元素都要大.

## §1.1 测度与积分

对一个集合赋予一个数作为其大小, 即测度, 是法国数学家 Lebesgue 的伟大思想, 这是他在思考怎么重新构建函数积分时得到的绝妙成果. 微积分是继古希腊几何原本之后数学领域中的最伟大的成就, 其中积分的概念历经几个世纪才得以完善. 首先是 Newton 和 Leibniz 等在 17 世纪提出了积分的思想, 但直到 19 世纪才由 Riemann 给出严格的定义. Riemann 定义的积分非常自然, 他划分函数的定义域, 然后用竖的小矩形面积的和来逼近函数的面积, 以一维欧氏空间的 Riemann 积分为例,

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\Delta\to 0}\sum f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}), \tag{1.1.1}$$

其中 $\Delta = \{x_i\}$ 是区间的划分, $\xi_i$ 是小区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 上的一个点, 但这种逼近方法的缺点是几乎只有连续函数才能做到极限存在. 而 Lebesgue 的想法是通过划分函数的值域来划分定义域

$$\{x \in [a,b] : y_{i-1} \leqslant f(x) < y_i\},$$

然后一样用小矩形面积之和来逼近函数面积,

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim \sum_i y_{i-1}\cdot m(\{x \in [a,b] : y_{i-1} \leqslant f(x) < y_i\}), \tag{1.1.2}$$

其中右边的 $m$ 代表集合的 Lebesgue 测度. 这种逼近方法不仅从理论上弥补了 Riemann 积分的缺点, 其极限存在的函数要远远多于连续函数类, 同时也为积分概念从欧氏空间到一般空间的推广作了铺垫. 但它的问题是我们需要重新认识集合大小也就是测度的概念. 本节就是要弄清楚什么是测度以及怎么从理论上构造测度这些问题.

让我们从一个非空集合开始来谈论其子集的测度. 比如对于实数这个集合, 区间长度这个概念是自然有的, 但是是不是任何子集都有一个长度呢? 显然并不是任何赋值都可以作为长度的, 因为长度需要满足最直观的可加性, 也就是说不

相交子集并的长度是这些子集长度的和. 可加性分有限可加 (有限个不相交子集) 和可列可加 (可列个不相交子集) 性, 尽管两者看起来类似, 但测度的定义要求有更强的可列可加性. 初学者很难真正理解为什么测度需要可列可加性, 只有在学习的过程中自己慢慢体会可列可加性对于整个理论体系是多么重要为了从理论上说清楚这些问题, 让我们从可测结构也就是抽象晦涩的 $\sigma$- 代数开始.

用 $\Omega$ 表示一个任意给定的非空集合, $2^{\Omega}$ 表示 $\Omega$ 的子集全体组成的集合, 称为幂集, $\Omega$ 的一个子集类是指 $2^{\Omega}$ 的一个子集. 我们说一个子集类对集合的某种运算封闭, 是指此子集类中的集合经过此种运算后得到的集合还在此子集类内. 常用的集合运算如下:

(1) 补集: $A \mapsto A^c = \Omega \setminus A$;

(2) 有限并: $(A, B) \mapsto A \cup B$; 可列并: $(\{A_n : n \in \mathbf{N}\}) \mapsto \bigcup_n A_n$; 任意并: $(\{A_\lambda : \lambda \in \Lambda\}) \mapsto \bigcup_\lambda A_\lambda$; 当上面运算中所涉及的集合不相交时, 分别称为不交有限并, 不交可列并, 不交任意并;

(3) 有限交: $(A, B) \mapsto A \cap B$; 可列交: $(\{A_n : n \in \mathbf{N}\}) \mapsto \bigcap_n A_n$; 任意交: $(\{A_\lambda : \lambda \in \Lambda\}) \mapsto \bigcap_\lambda A_\lambda$;

(4) 差: $(A, B) \mapsto A \setminus B = A \cap B^c$; 当 $A \supset B$ 时, 称为包含差;

(5) 递增列极限: $(\{A_n : n \in \mathbf{N}\}) \mapsto \bigcup_n A_n$, 其中集列 $\{A_n\}$ 递增;

(6) 递减列极限: $(\{A_n : n \in \mathbf{N}\}) \mapsto \bigcap_n A_n$, 其中集列 $\{A_n\}$ 递减.

我们期望读者已经熟悉关于集合运算的规则, 这里不一一列举.

**定义 1.1.1** $\Omega$ 的一个非空子集类 $\mathscr{F}$ 称为是 $\Omega$ 上的 $\sigma$- 代数或 $\sigma$- 域, 如果它对于补集运算和可列并运算封闭.

容易验证, $\sigma$- 代数一定包含有 $\varnothing$, $\Omega$ 为元素且对于有限交, 有限并及可列交等运算都是封闭的. 集合上的一个 $\sigma$- 代数通常看作为集合上的可测结构, $\Omega$ 及其上的一个 $\sigma$- 代数 $\mathscr{F}$ 组成的偶 $(\Omega, \mathscr{F})$ 称为是一个**可测空间**. 显然子集类 $2^{\Omega}$ 与 $\{\varnothing, \Omega\}$ 是 $\Omega$ 上的 $\sigma$- 代数, 它们是 $\Omega$ 上的平凡 $\sigma$- 代数.

可以说 $\sigma$- 代数是用来定义测度的那些集合的全体 (尽管它的意义不仅如此), 初学者可能会问: 为什么不能把全体子集作为定义域? 实际上, 我们后面会看到,

由于测度所要求的性质, 在很多场合之下, 我们不可能对所有子集定义测度. 另外数学的分支通常是研究集合上的某种结构, 可测结构是数学中最重要的结构之一, 其他重要的结构有代数结构, 几何结构, 拓扑结构等.

寻找 $\sigma$- 代数的一个简单方法是包含所需子集的最小 $\sigma$- 代数. 由定义不难验证 $\Omega$ 上任意多个 $\sigma$- 代数的交也是一个 $\sigma$- 代数, 设 $\mathscr{A}$ 是 $\Omega$ 上一个子集类, 用 $C(\mathscr{A})$ 表示 $\Omega$ 上包含 $\mathscr{A}$ 为子集的 $\sigma$- 代数全体, 因为 $2^\Omega \in C(\mathscr{A})$, 故 $C(\mathscr{A})$ 是非空的, 记

$$\sigma(\mathscr{A}) := \bigcap_{\mathscr{F} \in C(\mathscr{A})} \mathscr{F}.$$

(记号 := 读作*被定义为*) 不难验证 $\sigma(\mathscr{A})$ 是 $\Omega$ 上的 $\sigma$- 代数, 它是由下列两个条件所唯一确定的 $\sigma$- 代数 $\mathscr{F}$:

(1) $\mathscr{F} \supset \mathscr{A}$;

(2) 若 $\mathscr{F}'$ 是 $\sigma$- 代数且 $\mathscr{F}' \supset \mathscr{A}$, 则 $\mathscr{F}' \supset \mathscr{F}$.

因此称 $\sigma(\mathscr{A})$ 是包含 $\mathscr{A}$ 的最小 $\sigma$- 代数或由 $\mathscr{A}$ 生成的 $\sigma$- 代数. 这是生成大多数重要的 $\sigma$- 代数的常用方法.

**例 1.1.1** 如果 $\Omega$ 是一个拓扑空间, 则其所有开集组成的集类生成的 $\sigma$- 代数称为是 $\Omega$ 上的 Borel 代数, 记为 $\mathscr{B}(\Omega)$, 因为开集的补集是闭集, 故它也是全体闭集生成的 $\sigma$- 代数. 对于 Euclid 空间, 我们记 $\mathscr{B}(\mathbf{R}^n)$ 或 $\mathscr{B}^n$ 是 $n$- 维 Euclid 空间 $\mathbf{R}^n$ 上的 Borel 代数. 一个 $\sigma$- 代数 $\mathscr{A}$ 是可列生成的, 如果存在子集列 $\{A_n\}$ 使得 $\mathscr{A} = \sigma(\{A_n\})$. 那么 $\mathscr{B}(\mathbf{R}^n)$ 是可列生成的. ▮

**定义 1.1.2** 设 $(\Omega, \mathscr{F})$ 是一个可测空间, 称 $\mathscr{F}$ 上的一个非负广义实值 (可取无穷值的) 集函数 $\mu$ 为 $(\Omega, \mathscr{F})$ 上的测度, 如果

(1) $\mu(\varnothing) = 0$;

(2) 若 $\{A_n\}$ 是 $\mathscr{F}$ 中的一个互不相交的集列, 则 $\mu\left(\bigcup_n A_n\right) = \sum_n \mu(A_n)$. 这个性质称为测度的可列可加性.

这时, 称 $(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$ 是**测度空间**. 如果 $A \in \mathscr{F}, \mu(A) = 0, B \subset A$ 蕴含着 $B \in \mathscr{F}$, 则称 $(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$ 是**完备测度空间**. 当 $\mu(\Omega) < \infty$ 时, 称 $\mu$ 是**有限测度**; 当 $\mu(\Omega) = 1$ 时, 称 $\mu$ 为**概率测度**; 当存在集列 $\{A_n\} \subset \mathscr{F}$ 满足 $\bigcup_n A_n = \Omega$ 与 $\mu(A_n) < \infty$ 时,

称 $\mu$ 是$\sigma$- **有限测度**. 另外如果 $\mu$ 是拓扑空间 $\Omega$ 及其 Borel 集上的测度, 如果 $\mu$ 在任何紧集上有限, 称 $\mu$ 为**Radon 测度**.

可测空间 $(\Omega, \mathscr{F})$ 的测度有一个偏序, 称测度 $\nu \leqslant \mu$, 如果对任何 $A \in \mathscr{F}$, $\nu(A) \leqslant \mu(A)$.

另外, 任何测度空间在下面的意义下可以完备化. 设 $(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$ 是测度空间. 记

$$\begin{aligned}
&\mathscr{N} := \{N \subset \Omega: \text{ 存在 } N' \in \mathscr{F} \text{ 使得 } N \subset N', \mu(N') = 0\}, \\
&\mathscr{F}^\mu := \sigma(\mathscr{F} \cup \mathscr{N}).
\end{aligned}$$

$\mathscr{N}$ 中的集合通常称为 $\mu$- 零测集. 那么 $\mathscr{F}^\mu = \{A \cup N : A \in \mathscr{F}, N \in \mathscr{N}\}$. 这样 $\mu$ 自动地延拓到 $\mathscr{F}^\mu$ 上: $\mu(A \cup N) := \mu(A)$. 读者需要验证定义无歧义. 不难验证 $(\Omega, \mathscr{F}^\mu, \mu)$ 是一个完备测度空间, 称为是原测度空间的完备化. 因此如有必要, 我们总可以假设测度空间是完备的.

下面有关测度的性质可由定义直接推得.

(1) (有限可加性) 若 $A_1, \cdots, A_n \in \mathscr{F}$ 且互不相交, 那么

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n \mu(A_i);$$

(2) (单调性) 若 $A, B \in \mathscr{F}$ 且 $A \subset B$, 则 $\mu(A) \leqslant \mu(B)$;

(3) (次可列可加性) 若 $\{A_n\}$ 是 $\mathscr{F}$ 中的一个集列, 那么

$$\mu\left(\bigcup_n A_n\right) \leqslant \sum_n \mu(A_n);$$

(4) (下连续性) 设 $\{A_n\}$ 是 $\mathscr{F}$ 中单调上升的集列, 则

$$\mu(\lim A_n) = \lim \mu(A_n);$$

(5) (上连续性) 设 $\{A_n\}$ 是 $\mathscr{F}$ 中单调下降的集列且存在 $k$ 使得 $\mu(A_k) < \infty$, 则

$$\mu(\lim A_n) = \lim \mu(A_n).$$

特别地, 在 $\varnothing$ 处上连续, 即若 $\{A_n\}$ 是 $\mathscr{F}$ 中单调下降交为 $\varnothing$ 的集列且存在 $k$ 使得 $\mu(A_k) < \infty$, 则 $\lim \mu(A_n) = 0$.

注意有限可加性与次可列可加性两者结合等价于可列可加性. 现在, 我们来看几个简单的常用测度. 恒等于零的测度称为是**零测度**. 在空集上等于零, 而在非空可测集上等于 $+\infty$ 的集函数也是一个测度, 称为**奇异测度**.

**例 1.1.2** 设 $\Omega$ 是非空集, 对任意 $A \subset \Omega$, 用 $\#(A)$ 表示集合 $A$ 中元素的个数, 显然 $\#$ 是 $(\Omega, 2^{\Omega})$ 上的测度, 且当 $\Omega$ 是有限集时, 它是有限测度, 当 $\Omega$ 是可列集时, 它是 $\sigma$- 有限测度, 而当 $\Omega$ 不可列时, 它不是 $\sigma$- 有限的. 测度 $\#$ 通常称为 $\Omega$ 上的**计数测度**. ▌

**例 1.1.3** 设 $(\Omega, \mathscr{F})$ 是可测空间, 介绍一个简单重要的函数: 示性函数. 对 $A \subset \Omega$, 定义 $A$ 的示性函数

$$1_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in A, \\ 0, & \omega \notin A. \end{cases}$$

示性函数虽然简单, 但非常重要, 其它的函数都可以写成为示性函数线性组合的极限. 对任意 $\omega \in \Omega$, 定义

$$\varepsilon_\omega(A) := 1_A(\omega), \ A \in \mathscr{F},$$

同样显然 $\varepsilon_\omega$ 是测度, 通常被称为 $\omega$ 处的**单点测度**或 Dirac 测度. ▌

以上的测度很容易按定义验证, 但是测度的定义并非总是如此简单, 实际上, 当集合上的可测结构较为复杂时, 像上面例中那样直接对每个可测集定义而成为测度是不可能的. 因此我们通常是在一个相对简单的集类上直接地定义一个 (预) 测度, 然后用某种方法将其延拓至该集类生成的 $\sigma$ 代数上, 这正是下面将介绍的著名的测度扩张定理的主要思想. 让我们从外测度开始, 它是构造测度的桥梁. 定义在 $\Omega$ 的全体子集 $2^{\Omega}$ 上的非负广义实值集函数 $\mu^*$ 称为是 $\Omega$ 上**外测度**, 如果

1. $\mu^*(\varnothing) = 0$;

2. (单调性) 若 $A \subset B \subset \Omega$, 则 $\mu^*(A) \leqslant \mu^*(B)$;

3. (次可列可加性) 若 $\{A_n\}$ 是 $\Omega$ 的一个子集列, 那么

$$\mu^*\left(\bigcup_n A_n\right) \leqslant \sum_n \mu^*(A_n). \tag{1.1.3}$$

有意思的是, 构造测度很不容易, 但构造一个外测度却很容易, 子集类上的几乎任何的非负集函数都可以构造一个外测度, 确切地说, 设 $\mathscr{F}_0$ 是一个含有空集的子集类, $\mu$ 是 $\mathscr{F}_0$ 上的一个满足 $\mu(\varnothing)=0$ 的非负集函数. 对 $A\subset\Omega$, 定义

$$\mu^*(A):=\inf\left\{\sum_n\mu(A_n):\ \{A_n\}\subset\mathscr{F}_0,\ \bigcup_n A_n\supset A\right\},\tag{1.1.4}$$

约定如果 $\mathscr{F}_0$ 没有可列个集合可以覆盖 $A$, 那么 $\mu^*(A)=+\infty$. 这样构造的 $\mu^*$ 是一个外测度. 需要验证的只是次可列可加性, 其他两条很简单. 对 $A_n\subset\Omega$, 不妨设

$$\sum_n\mu^*(A_n)<+\infty,$$

那么对任何 $\delta>0$, 存在 $A_n$ 的一个可列覆盖 $A_n^k\in\mathscr{F}_0$ 使得

$$\mu^*(A_n)+\delta/2^n>\sum_k\mu(A_n^k).$$

两边对 $n$ 求和, 因为 $\{A_n^k:n\geqslant 1,k\geqslant 1\}$ 是 $\bigcup A_n$ 的一个可列覆盖, 所以

$$\sum_n\mu^*(A_n)+\delta>\sum_n\sum_k\mu(A_n^k)\geqslant\mu^*(\bigcup_n A_n).$$

再由 $\delta$ 的任意性推出 $\sum_n\mu^*(A_n)\geqslant\mu^*(\cup_nA_n)$.

从外测度得到测度也不难. $\Omega$ 的任意子集 $A$ 称为是 $\mu^*$- 可测的, 如果它满足 Carathéodory 条件, 即对任何 $E\subset\Omega$ 有

$$\mu^*(E)=\mu^*(A\cap E)+\mu^*(A^c\cap E).$$

由外测度的性质, 上式等价于

$$\mu^*(E)\geqslant\mu^*(A\cap E)+\mu^*(A^c\cap E).$$

记 $\mathscr{M}$ 为 $\Omega$ 的 $\mu^*$- 可测子集全体. 一个显而易见的事实是, 如果 $\mu^*(A)=0$, 那么 $A$ 必定是 $\mu^*$- 可测的.

**定理 1.1.1** (Carathéodory) $(\Omega,\mathscr{M},\mu^*)$ 是完备测度空间.

证明. 我们须证 $\mathscr{M}$ 是 $\Omega$ 上 $\sigma$- 代数且 $\mu^*$ 是 $\mathscr{M}$ 上的测度. 显然 $\varnothing,\Omega\in\mathscr{M}$ 且 $\mathscr{M}$ 对补集运算封闭, 故只须验证 $\mathscr{M}$ 对可列并运算封闭. 事实上, $\mathscr{M}$ 对有限并运算封闭, 因为若 $A,B\in\mathscr{M}$, 则对 $E\subset\Omega$,

$$\mu^*(E)=\mu^*(A\cap E)+\mu^*(A^c\cap E)$$

$$
\begin{aligned}
&= \mu^*(A\cap E)+[\mu^*(B\cap A^c\cap E)+\mu^*(B^c\cap A^c\cap E)] \\
&= [\mu^*(A\cap (A\cup B)\cap E)+\mu^*((A\cup B)\cap A^c\cap E)] \\
&\qquad + \mu^*((B\cup A)^c\cap E) \\
&= \mu^*((A\cup B)\cap E)+\mu^*((B\cup A)^c\cap E),
\end{aligned}
$$

推出 $A\cup B\in \mathscr{M}$. 那么 $\mathscr{M}$ 对有限交运算也封闭. 故我们仅须验证 $\mathscr{M}$ 对不相交集列的可列并运算封闭. 设 $\{A_n\}$ 是 $\mathscr{M}$ 中不相交集列, 令

$$
B_n := \bigcup_{i=1}^{n} A_i,\ A := \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n,
$$

由外测度的单调性得

$$
\begin{aligned}
\mu^*(E) &= \mu^*(E\cap B_n)+\mu^*(E\cap B_n^c) \\
&\geqslant \mu^*(E\cap B_n)+\mu^*(E\cap A^c) \\
&= \mu^*(E\cap B_n\cap B_{n-1})+\mu^*(E\cap B_n\cap B_{n-1}^c)+\mu^*(E\cap A^c) \\
&= \mu^*(E\cap B_{n-1})+\mu^*(E\cap A_n)+\mu^*(E\cap A^c) \\
&= \cdots = \sum_{i=1}^{n}\mu^*(E\cap A_i)+\mu^*(E\cap A^c).
\end{aligned}
$$

由 $n$ 的任意性与 $\mu^*$ 的次可列可加性推出

$$
\begin{aligned}
\mu^*(E) &\geqslant \sum_{i=1}^{\infty}\mu^*(E\cap A_i)+\mu^*(E\cap A^c) \\
&\geqslant \mu^*(E\cap A)+\mu^*(E\cap A^c),
\end{aligned}
$$

因此 $A\in\mathscr{M}$. 不仅如此, 从上面的证明过程中可以看出对任何 $E\subset\Omega$,

$$
\mu^*\left(E\cap (\bigcup_{i=1}^{n} A_i)\right)=\sum_{i=1}^{n}\mu^*(E\cap A_i),
$$

故 $\mu^*$ 有有限可加性

$$
\mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\mu^*(A_i).
$$

结合 $\mu^*$ 的次可列可加性, 推出 $\mu^*$ 在 $\mathscr{M}$ 上有可列可加性. 因此 $\mu^*$ 是 $(\Omega,\mathscr{M})$ 上的测度. 完备性由于 $\mathscr{M}$ 包含所有零外测度集的事实是显然的. □