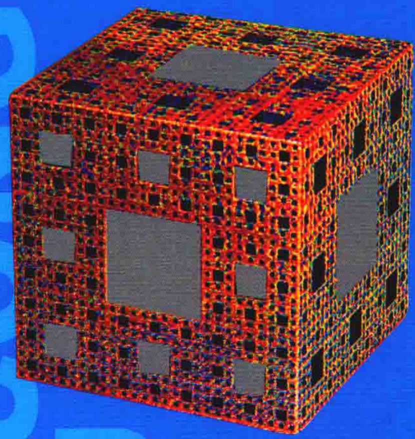
数学奥林匹克小丛书 高中卷 9

Shuxue Aolinpike XIAOCONG SHU



几何不等式

冷岗松 著

华东师范大学出版社

olinpike

数学奥林匹克小丛书 9

高中卷

几何不等式

linpike Xiao Congshu ● 冷岗松 著

G634.603
12

98/02

华东师范大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

数学奥林匹克小丛书．高中卷．几何不等式/冷岗松著．—上海：华东师范大学出版社，2005.3
ISBN 7-5617-4163-4

I.数...　II.冷...　III.数学课-高中-教学参考资料　IV.G634.603

中国版本图书馆CIP数据核字(2005)第019480号

数学奥林匹克小丛书·高中卷

几何不等式

著　　者　冷岗松
策划组稿　倪　明
责任编辑　审校部编辑工作组
特约编辑　陈信漪
封面设计　高　山
版式设计　蒋　克

出版发行　华东师范大学出版社
　　　　　市场部　电话　021-62865537
　　　　　门市(邮购)　电话　021-62869887
　　　　　门市地址　华东师大校内先锋路口
业务电话　上海地区　021-62232873
　　　　　华东　中南地区　021-62458734
　　　　　华北　东北地区　021-62571961
　　　　　西南　西北地区　021-62232893
业务传真　021-62860410　62602316
http://www.ecnupress.com.cn
社　　址　上海市中山北路3663号
　　　　　邮编　200062

印 刷 者　江苏句容市排印厂
开　　本　787x960　16开
印　　张　7
字　　数　116千字
版　　次　2005年4月第一版
印　　次　2005年4月第一次
印　　数　11 000
书　　号　ISBN 7-5617-4163-4/G·2388
定　　价　9.00元

出 版 人　朱杰人

（如发现本版图书有印订质量问题，请寄回本社市场部调换或电话021-62865537联系）

前　言

"上帝总是在做几何"(God is always doing geometry — Plato). 但几何不等式作为数学中一个独立的方向被深入研究和广泛关注却是现代的事情.

不少几何不等式既是数学审美的典范,又是应用的工具. 著名的 Brunn-Minkowski 不等式就是一个典型的例子,"它像一只大章鱼,它的触角几乎伸及数学的各领域,它不但与代数几何的 Hodge 指标定理等高深的数学相关联,也在一些应用学科如体视学、统计力学和信息理论中扮演着重要的角色".

迄今,以几何不等式为主题的著作多达数十种. 其中 Yu. D. Burago 和 V. A. Zalgaller 的"Geometric Inequalities"(Springer-Verlag 出版社,1988)是国际上被广泛引用的专著. 国内单墫先生的《几何不等式》(上海教育出版社,1980)却是一本十分优秀的入门书.

本人写作的这本小册子,主要是向参加数学奥林匹克的中学生和中学教师介绍几何不等式,选材是初等的. 在写作过程中,力求做到:第一,精选近年来研究中出现的新成果、新方法和新技巧;第二,介绍的范例应有简单而不平凡的结论、有趣而深刻的背景;第三,尽量展现学生的优秀解法. 当然,书中也融入了作者自己的一些研究成果和体会. 现惶恐着将它呈现在读者面前,祈望批评指正.

谨以此书奉献给裘宗沪先生,祝贺他的七十寿辰,并纪念他为中国数学奥林匹克事业作出的巨大贡献.

最后,我要感谢倪明先生,他的信任和耐心促成了本书的出版. 我还要感谢我的博士研究生司林,他热心地帮我打字、绘图.

作者最大的心愿就是读者喜欢他的作品.

冷岗松

2004 年 12 月于上海

目录

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

1 距离不等式中的化直法

在几何量(长度、角度、面积、体积等)的大小比较中,线段长度的比较是最基本的.我们把仅涉及到线段长度的几何不等式叫做距离不等式.

欧氏几何中一些简单的不等公理和定理常常是解决距离不等式的出发点,其中最常用的工具有:

命题1 连接 A、B 两点的最短线是线段 AB.

这个命题的一个直接推论就是

命题2 (三角不等式)如果 A、B、C 为任意三点,则 $AB \leqslant AC + CB$,当且仅当 C 位于线段 AB 上时等号成立.

由这个命题还可产生下面一些常用的推论.

命题3 三角形中大边对大角,大角对大边.

命题4 三角形中线的长度小于夹它的两边长度之和的一半.

命题5 如果一个凸多边形位于另一个凸多边形的内部,则外面的凸多边形的周长大于里面凸多边形的周长.

命题6 凸多边形内的线段长度,或者不超过凸多边形的最大边长,或者不超过凸多边形的最大对角线长.

下面看一些例题.

例1 设 a、b、c 是 $\triangle ABC$ 的边长,求证:

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}<2.$$

证明 由三角不等式 $a<b+c$ 可得

$$\frac{a}{b+c}=\frac{2a}{2(b+c)}<\frac{2a}{a+b+c}.$$

同理

$$\frac{b}{a+c}<\frac{2b}{a+b+c},$$

$$\frac{c}{b+a}<\frac{2c}{a+b+c}.$$

将上面三个不等式相加即得所求证的不等式. □

例 2 在$\triangle ABC$中,AB是最长边,P是三角形内一点,证明:

$$PA+PB>PC.$$

证明 如图 1-1,延长CP交AB于点D,则$\angle ADC$和$\angle BDC$有一个不是锐角,不妨设$\angle ADC$不是锐角,则在$\triangle ADC$中,由命题 3 得

$$AC>CD,$$

因此

$$AB\geqslant AC>CD\geqslant PC, \quad ①$$

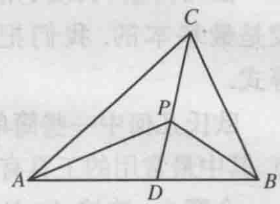


图 1-1

又在$\triangle PAB$中,由三角不等式

$$PA+PB>AB, \quad ②$$

由①、②即得求证的不等式. □

注 (1) 若去掉条件"AB是最长边",则结论不一定成立.

(2) 当P是正三角形ABC所在平面上一点,且P不在这个正三角形的外接圆上,则PA、PB、PC中任意两个之和大于第三个,即它们构成某个三角形的三边.

例 3 设一条平面闭折线的周长为 1,证明:可以用一个半径是$\frac{1}{4}$的圆完全盖住这条折线.

分析 解决问题的关键是确定一个点(圆心),使得折线上的每一点到这个点的距离不超过$\frac{1}{4}$.

证明 如图 1-2,设A为闭折线上任意取定的一点,在闭折线上取点B,使折线AB(不论哪一段)的长恰为$\frac{1}{2}$. 连接AB,取AB的中点O,则折线上任一点到O的距离不超过$\frac{1}{4}$.

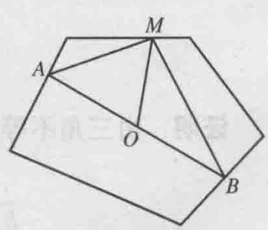


图 1-2

事实上，设 M 为折线上任一点，则由命题4可得

$$OM < \frac{1}{2}(AM+MB) \leqslant \frac{1}{2}(\text{折线 }AM + \text{折线 }BM) = \frac{1}{2}\text{折线 }AB = \frac{1}{4}.$$

现以 O 为圆心，$\frac{1}{4}$ 为半径作圆，则这个圆完全盖住了这条闭折线，证毕. □

上面几个例题的证明方法实际上都体现了一种“化直”的思想，我们称其为“化直法”. 具体地说，化直法是以命题1或它的推论为理论依据，采用把曲线段化为折线段，再把折线段化为直线段来处理的方法. 化直法是证明几何不等式，特别是距离不等式最为常用的方法之一.

下面再看几个例子.

首先，我们介绍经典的 Pólya 问题.

例4 求证：两端点在一圆周上且将此圆分成等面积的两部分的所有曲线中，以此圆的直径具有最短的长度.

证明 设 $\widehat{AB}$ 是一条满足题设条件的曲线.

如果 A、B 两点正好是某一条直径的两个端点，那么显然 $\widehat{AB}$ 的长度不会小于圆的直径.

如果弦 AB 不是直径，如图1-3，那么令与弦 AB 平行的直径为 CD，曲线 $\widehat{AB}$ 至少与 CD 交于不同的两点，设不是圆心的那个交点为 E，则

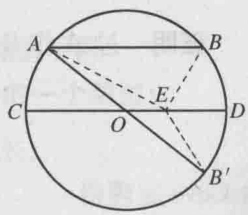


图1-3

$$\text{曲线 }\widehat{AB}\text{ 的长} = \text{曲线 }\widehat{AE}\text{ 的长} + \text{曲线 }\widehat{EB}\text{ 的长}$$
$$\geqslant AE + EB.\text{（这样将曲线化为了折线）}$$

下面再证折线 $(AE+EB) >$ 圆的直径. 为此，作 B 关于 CD 的对称点 B'，则易证 AB' 是圆的直径. 于是

$$AE + EB = AE + EB' > AB' = \text{圆的直径}.$$

综上便知所证结论成立. □

下面的例题源于我们对垂足三角形极值性质的研究.

例5 设 P 是 $\triangle ABC$ 内一点，P 在三边 BC、CA、AB 上的射影分别为 A'、B'、C'，直线 AP、BP、CP 与三条对边的交点分别为 A''、B''、C''. 已知 $\triangle A''B''C''$ 的周长 $=1$，求证：

$$\text{折线 }A'B''C'A'' + \text{折线 }A'C''B'A'' \leqslant 2.$$

证明 所求证的不等式等价于

$$A'B''+B''C'+C'A''+A'C''+C''B'+B'A''\leqslant 2. \qquad ①$$

要证①，只需证明局部不等式

$$A''B''+A''C''\geqslant A'B''+A'C''. \qquad ②$$

事实上，把②和类似的两个不等式

$$B''A''+B''C''\geqslant B'A''+B'C'',$$

$$C''A''+C''B''\geqslant C'A''+C'B'',$$

相加便得①.

下面是②的证明.

为证②，我们需要下面的引理.

引理 如图1-4，设P是$\triangle ABC$的高AD上的一点，直线BP交AC于E，直线CP交AB于F，则

$$\angle FDA=\angle EDA.$$

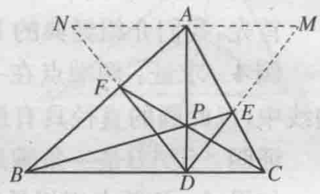


图1-4

证明 过A作BC的平行线，与直线DE、DF交于M、N，则

$$\frac{AF}{BF}=\frac{AN}{BD},\quad \frac{CE}{AE}=\frac{CD}{AM}.$$

由Ceva定理得

$$\frac{AF}{BF}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}=1,$$

即 $$AM=AN.$$

又由 $$AD\perp MN,$$

所以 $$DM=DN,$$

故 $$\angle EDA=\angle ADM=\angle ADN=\angle FDA.$$

下面回转来证明②：

(1) 若P位于$\triangle ABC$的高AD上，则$A'=A''$，②显然成立.

(2) 若P不位于$\triangle ABC$的高AD上，如图1-5，不妨设P、B位于AD同侧，连接并延长$A'P$交AB于M，连接MC交BB''于M'，则由引理知

$$\angle B''A'P > \angle M'A'P = \angle C''A'P. \quad ③$$

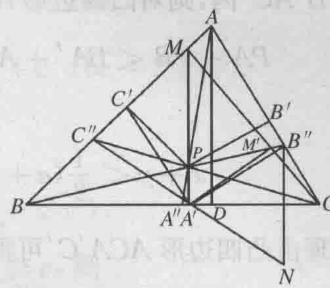


图 1-5

作 B'' 关于 BC 的对称点 N,则

$$\angle NA'C = \angle CA'B'',$$

又由③可得

$$\begin{aligned}&\angle NA'C + \angle C''A'C\\=&\angle NA'C + \angle C''A'P + \angle PA'C\\<&\angle PA'B'' + \angle PA'N\\=&\pi,\end{aligned}$$

所以 A'、A''在 $C''N$ 同侧,即 A'在$\triangle C''A''N$ 内,因此由命题 5 有

$$A''C'' + A''N > A'C'' + A'N.$$

注意到 $A''B'' = A''N$, $A'B'' = A'N$. 上式即是

$$A''B'' + A''C'' > A'B'' + A'C''.$$

②得证. □

注 (1) 本例所用的反射对称方法是一种常用的化直手段.

(2) 利用不等式②,袁俊博士证明了刘健先生提出的一个猜想:

$$\triangle A'B'C' \text{ 的周长} \leqslant \triangle A''B''C'' \text{ 的周长}.$$

下面的例题是一个很有难度的问题.

例 6 设 P 为$\triangle ABC$ 内一点,证明:

$$\sqrt{PA} + \sqrt{PB} + \sqrt{PC} < \frac{\sqrt{5}}{2}(\sqrt{BC} + \sqrt{CA} + \sqrt{AB}). \quad ①$$

证明 下面的引理可由命题 5 直接得到.

引理 设 P 是凸四边形 $ABCD$ 的一个内点,则

$$PB + PC < BA + AD + DC.$$

下面证明①.

为简单计,设 $BC = a$, $AC = b$, $BA = c$, $PA = x$, $PB = y$, $PC = z$.

如图 1-6,作出$\triangle ABC$ 三边的中点 A'、B'、C',则 P 必位于平行四边形 $A'B'AC'$、$C'B'CA'$、$B'A'BC'$某一个之中. 不妨设 P 位于平行四边形

$A'B'AC'$内，则对凸四边形 $ABA'B'$ 应用引理有

$$PA+PB<BA'+A'B'+B'A,$$

即

$$x+y<\frac{1}{2}(a+b+c). \qquad ②$$

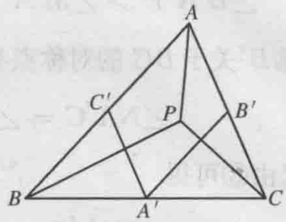


图 1－6

同理由凸四边形 $ACA'C'$ 可得

$$PA+PC<AC'+C'A'+A'C,$$

即

$$x+z<\frac{1}{2}(a+b+c). \qquad ③$$

将②、③两式相加可得

$$2x+y+z<a+b+c. \qquad ④$$

现注意到原不等式等价于

$$(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z})^2<\frac{5}{4}(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})^2,$$

即

$$x+y+z+2\sqrt{xy}+2\sqrt{xz}+2\sqrt{yz}$$
$$<\frac{5}{4}(a+b+c+2\sqrt{ab}+2\sqrt{bc}+2\sqrt{ac}). \qquad ⑤$$

因此我们仅需证明⑤.

由平均值不等式可得

$$2\sqrt{xy}\leqslant 2x+\frac{1}{2}y,$$

$$2\sqrt{xz}\leqslant 2x+\frac{1}{2}z,$$

$$2\sqrt{yz}\leqslant y+z.$$

利用这三个不等式和不等式④可得

$$⑤\text{ 的左边}\leqslant x+y+z+2x+\frac{1}{2}y+2x+\frac{1}{2}z+y+z$$

$$=\frac{5}{2}(2x+y+z)<\frac{5}{2}(a+b+c).$$

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

因此要证⑤，只需证明

$$\frac{5}{2}(a+b+c)\leqslant\frac{5}{4}(a+b+c+2\sqrt{ab}+2\sqrt{bc}+2\sqrt{ac}).\qquad ⑥$$

而式⑥化简后等价于

$$a+b+c\leqslant 2(\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ac}),\qquad ⑦$$

这是一个简单的不等式. 事实上，不妨设 $a\geqslant b\geqslant c$，则

$$⑦\text{ 的右端}\geqslant 2(b+c+c)>2\left(\frac{a}{2}+\frac{b+c}{2}+c\right)>a+b+c=⑦\text{ 的左端}.$$

综上，①被证明. □

注 (1) 不等式①右边的常数$\frac{\sqrt{5}}{2}$是最优的，这留给读者考虑.

(2) 上面漂亮的证法由朱庆三同学(原华南师大附中学生，曾获 2004 年第 45 届 IMO 金牌)给出，巧妙的划分点 P 的位置和处理好变量的非完全对称性是这个解法的关键.

当然，上面的例 6 还可用等高线方法来证明. 所谓等高线就是在讨论极值问题时引进的特殊平面曲线，如圆、椭圆等. 这里用的等高线是椭圆.

例 6 的另证

设 $BC=a$, $CA=b$, $AB=c$，且不妨设 $a\leqslant b, c$.

现过 P 点作一个以 B、C 为焦点的椭圆，与 AB、AC 分别交于 E 和 F，如图 1-7，则

$$PA\leqslant\max(EA, FA).$$

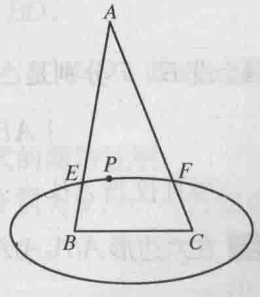


图 1-7

不妨设 $EA\geqslant FA$，则 $PA\leqslant EA$.

又

$$\sqrt{PB}+\sqrt{PC}\leqslant\sqrt{2(PB+PC)}=\sqrt{2(EB+EC)},$$

因此

$$\begin{aligned}&\sqrt{PA}+\sqrt{PB}+\sqrt{PC}\\&<\sqrt{EA}+\sqrt{2(EB+EC)}\\&\leqslant\left[5EA+\frac{5}{2}(EB+EC)\right]^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

$$=\left[5(EA+EB)+\frac{5}{2}(EC-EB)\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$<\sqrt{5}\left(c+\frac{a}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$<\frac{\sqrt{5}}{2}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right),$$

得证. □

习 题 1

1 设 A' 为 $\triangle ABC$ 的外角平分线 AT 上的任意一点,试证:

$$A'B+A'C\geqslant AB+AC.$$

2 给定边长为 $a>b>c$ 的 $\triangle ABC$ 及其任意内点 O. 设直线 AO、BO、CO 与 $\triangle ABC$ 的边交于点 P、Q、R. 证明:

$$OP+OQ+OR<a.$$

3 设点 D、E、F 分别是 $\triangle ABC$ 的边 BC、CA、AB 上的点,Δ、R 分别为 $\triangle ABC$ 的面积和外接圆半径. 求证:

$$DE+EF+FD\geqslant\frac{2\Delta}{R}.$$

4 设 E、F 分别是 $\triangle ABC$ 中以 A 为端点的射线 AC、AB 上的点,则

$$|AB-AC|+|AE-AF|\geqslant|BE-CF|,$$

当且仅当 $AB=AC$ 且 $AE=AF$ 时等号成立.

5 在六边形 $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ 内存在一点 O,使得 $\angle A_iOA_{i+1}=\frac{\pi}{3}(i=1,2,3,4,5,6)$(约定 $A_7=A_1$). 如果 $OA_1>OA_3>OA_5$, $OA_2>OA_4>OA_6$,则

$$A_1A_2+A_3A_4+A_5A_6<A_2A_3+A_4A_5+A_6A_1.$$

2 Ptolemy 不等式及其应用

著名的 Ptolemy 不等式是关于任意四边形的一个距离不等式，它可表述为

定理（Ptolemy 不等式） 在四边形 $ABCD$ 中有

$$AB \cdot CD + AD \cdot BC \geqslant AC \cdot BD,$$

等号成立当且仅当 A、B、C、D 四点共圆.

证明 如图 2-1，在四边形 $ABCD$ 内取点 E，使 $\angle BAE = \angle CAD$，$\angle ABE = \angle ACD$，则 $\triangle ABE \backsim \triangle ACD$. 因此 $AB \cdot CD = AC \cdot BE$. 又 $\angle BAC = \angle EAD$，且 $\dfrac{AB}{AE} = \dfrac{AC}{AD}$，所以 $\triangle ABC \backsim \triangle AED$，$AD \cdot BC = AC \cdot DE$. 故

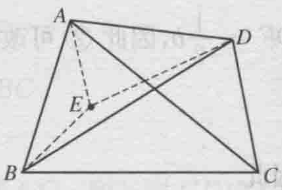


图 2-1

$$AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC(BE + DE) \geqslant AC \cdot BD,$$

等号成立当且仅当点 E 在 BD 上，此时 $\angle ABD = \angle ACD$，故四边形 $ABCD$ 内接于圆. □

应用 Ptolemy 不等式，我们可给出一些距离不等式的简洁证明.

例 1（Klamkin 对偶不等式） 设$\triangle ABC$ 的三边分别为 a、b、c，已知边 b、c 上的中线分别为 m_b、m_c，求证：

$$4m_b m_c \leqslant 2a^2 + bc. \quad ①$$

下面的证明简直无需文字说明便知其意.

证明 如图 2-2，作平行四边形 $ABCD$ 和平行四边形 $ACBE$，连接 BD、CE. 注意到 $DE = 2a$，$BD = 2m_b$，$CE = 2m_c$，对四边形 $BCDE$ 应用 Ptolemy 不等式立得

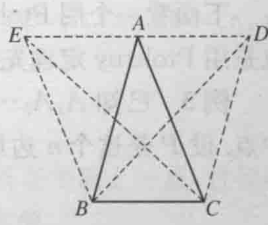


图 2-2

$$BC \cdot DE + BE \cdot CD \geqslant BD \cdot EC,$$

这就是①. □

例 2 设$\triangle ABC$的三边分别为a、b、c,三边上的中线分别为m_a、m_b、m_c,求证:

$$m_a(bc-a^2)+m_b(ac-b^2)+m_c(ab-c^2)\geqslant 0. \quad ①$$

下面的证法的关键在于寻找一个特殊的四边形.

证明 如图 2-3,设$\triangle ABC$的三条中线分别为AD、BE、CF,重心为G.

现对四边形 $BDGF$ 应用 Ptolemy 不等式可得

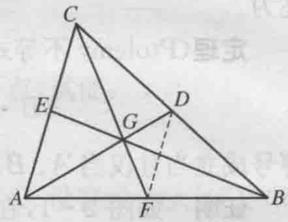


图 2-3

$$BG \cdot DF \leqslant GF \cdot DB + DG \cdot BF. \quad ②$$

注意到$BG=\frac{2}{3}m_b$, $DG=\frac{1}{3}m_a$, $GF=\frac{1}{3}m_c$及$DF=\frac{1}{2}b$,因此②可改写为

$$2bm_b \leqslant am_c + cm_a.$$

因此
$$2b^2m_b \leqslant abm_c + cbm_a. \quad ③$$

同理有
$$2c^2m_c \leqslant acm_b + bcm_a, \quad ④$$

$$2a^2m_a \leqslant abm_c + acm_b. \quad ⑤$$

③、④、⑤相加可得

$$2(m_abc+m_bca+m_cab)\geqslant 2(m_aa^2+m_bb^2+m_cc^2),$$

整理就得①. □

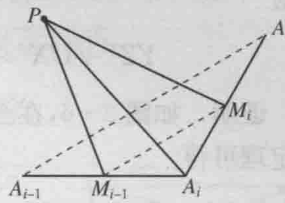
下面看一个用 Ptolemy 定理产生几何线性不等式的例子. 实际上,上例也是用 Ptolemy 定理先得到线性不等式.

例 3 已知$A_1A_2\cdots A_n$是一个正n边形,M_1,M_2,$\cdots$,M_n是相应边的中点. 设P是这个n边形所在平面上的任意一点. 求证:

$$\sum_{i=1}^{n}PM_i \geqslant \left(\cos\frac{\pi}{n}\right)\sum_{i=1}^{n}PA_i. \quad ①$$

证明 如图 2-4,M_{i-1}、M_i分别是这个正n边形第$i-1$条边和第i条

边的中点. 对四边形 $PM_{i-1}A_iM_i$ 应用 Ptolemy 不等式可得局部不等式



$$A_iM_{i-1}\cdot PM_i+PM_{i-1}\cdot A_iM_i\geqslant PA_i\cdot M_{i-1}M_i,$$

由此可得

$$PM_i+PM_{i-1}\geqslant 2\left(\cos\frac{\pi}{n}\right)\cdot PA_i, \qquad ②$$

图 2-4

这里 $i=1,2,\cdots,n$,并约定 $A_0=A_n$, $M_0=M_n$.

现对②求和可得

$$\sum_{i=1}^{n}(PM_i+PM_{i-1})\geqslant 2\left(\cos\frac{\pi}{n}\right)\cdot\sum_{i=1}^{n}PA_i,$$

这就是①. □

下面两例分别介绍利用 Ptolemy 定理处理有关四边形和三角形内(或所在平面上的)动点的不等式的基本构形技巧.

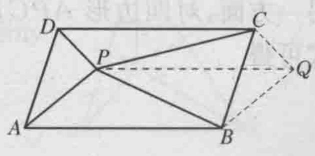
例 4 设 P 为平行四边形 $ABCD$ 内一点,求证:

$$PA\cdot PC+PB\cdot PD\geqslant AB\cdot BC, \qquad ①$$

并指出等号成立的条件.

证明 如图 2-5,作 PQ 平行并等于 CD,连接 CQ、BQ,则 $CDPQ$ 与 $ABQP$ 均是平行四边形,所以

$$CQ=PD,\quad BQ=PA,\quad PQ=AB.$$



在四边形 $PBQC$ 中由 Ptolemy 不等式有

$$BQ\cdot PC+PB\cdot CQ\geqslant PQ\cdot BC,$$

图 2-5

即 $$PA\cdot PC+PB\cdot PD\geqslant AB\cdot BC,$$

等号成立当且仅当 P、B、Q、C 四点共圆,即 $\angle CPB+\angle CQB=\pi$,而 $\angle CQB=\angle APD$,所以式 ① 等号成立的条件为

$$\angle APD+\angle CPB=\pi. \square$$

例 5 在 $\triangle ABC$ 中,$\angle A=60^\circ$,P 为 $\triangle ABC$ 所在平面上一点,且使得 $PA=6$, $PB=7$, $PC=10$,求 $\triangle ABC$ 面积的最大值.

解法 1 先证引理.

引理 在凸四边形 $XYZU$ 中,对角线 XZ 和 YU 交于点 O, $\angle XOY=$

θ,则

$$YZ^2 + UX^2 - XY^2 - ZU^2 = 2XZ \cdot YU \cdot \cos\theta.$$

证明 如图 2-6,在$\triangle OYZ$、$\triangle OUX$、$\triangle OXY$及$\triangle OZU$中分别应用余弦定理可得

$$YZ^2 = OY^2 + OZ^2 + 2OY \cdot OZ \cdot \cos\theta,$$
$$UX^2 = OU^2 + OX^2 + 2OU \cdot OX \cdot \cos\theta,$$
$$XY^2 = OX^2 + OY^2 - 2OX \cdot OY \cdot \cos\theta,$$
$$ZU^2 = OZ^2 + OU^2 - 2OZ \cdot OU \cdot \cos\theta,$$

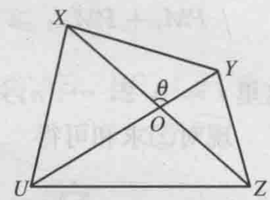


图 2-6

由这四个等式相加便可立得引理中的等式.

下面求解原问题.

如图 2-7,在$\triangle ABC$中,过P作AB的平行线,过A作PB的平行线,两条直线交于D. 设PD交AC于E,则$\angle CEP = 60^\circ$.

设$AC = x$, $AB = PD = y$, $CD = t$. 对四边形$APCD$应用引理可得

$$t^2 + 6^2 - 10^2 - 7^2 = 2\cos 60^\circ \cdot xy,$$

即 $$xy = t^2 - 113. \quad ①$$

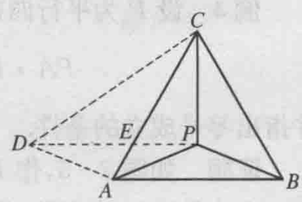


图 2-7

另一方面,对四边形$APCD$应用 Ptolemy 不等式可得

$$xy \leqslant 6t + 70. \quad ②$$

由①、②有 $$t^2 - 6t - 183 \leqslant 0,$$

所以 $$0 \leqslant t \leqslant 3 + 8\sqrt{3}. \quad ③$$

将③代入②可得$xy \leqslant 88 + 48\sqrt{3}$,故

$$S_{\triangle ABC} = \frac{\sqrt{3}}{4}xy \leqslant 36 + 22\sqrt{3},$$

等号成立当且仅当D、A、P、C四点共圆,即$\angle PBA = \angle PCA$. 故$S_{\triangle ABC}$的最大值为$36 + 22\sqrt{3}$. □

解法 2 先证引理.

试读结束:需要全本请在线购买: www.ertongbook.com