

全国大学生数学建模

——优秀获奖论文点评

竞赛
指南

郝琳 陈春梅
房茂燕 吴聪伟
编著



西安电子科技大学出版社
<http://www.xduph.com>

全国大学生数学建模竞赛指南

——优秀获奖论文点评

郝琳 陈春梅 编著
房茂燕 吴聪伟

西安电子科技大学出版社

内 容 简 介

本书共十章,分别对应2010年至2014年全国大学生数学建模竞赛(CUMCM)本科组的10道赛题,每道赛题都选配了当年的优秀获奖论文,并由指导老师进行赛题解析和点评。在每章章末还配有赛题拓展阅读,以达到启发思想、拓展视野的目的。

本书适合初次参加数学建模竞赛的学生查阅,也可作为指导学生参加数学建模竞赛的辅导教材。

图书在版编目(CIP)数据

全国大学生数学建模竞赛指南:优秀获奖论文点评/郝琳等编著. —西安:

西安电子科技大学出版社,2016.8

ISBN 978 - 7 - 5606 - 4151 - 5

I. ①全… II. ①郝… III. ①数学模型—竞赛—高等学校—教学参考资料
IV. ①O141.4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 128847 号

策 划 刘小莉

责任编辑 马武装 闫柏睿

出版发行 西安电子科技大学出版社(西安市太白南路2号)

电 话 (029)88242885 88201467 邮 编 710071

网 址 www.xduph.com 电子邮箱 xdupfxb001@163.com

经 销 新华书店

印刷单位 虎彩印艺股份有限公司

版 次 2016年8月第1版 2016年8月第1次印刷

开 本 787毫米×1092毫米 1/16 印张 13

字 数 307千字

印 数 1~1000册

定 价 33.00元

ISBN 978 - 7 - 5606 - 4151 - 5/O

XDUP 4443001 - 1

如有印装问题可调换

前 言

全国大学生数学建模竞赛(CUMCM)为培养大学生的数学应用能力提供了一个很好的实战平台。本书收录了2010年至2014年CUMCM本科组的部分参赛获奖论文,每一篇都由指导老师进行综合点评并进行了详细的解析,解析中注重数学建模的过程性、整体性与思想性,深度揭示了赛题的总体思路和各子问题之间的顺次递进关系,并注意从学生的角度去理解和认识问题。

作者编写本书的目的是为今后的数学建模参赛队员提供参考经验,吸取精华,改进不足,从而做到扬长避短。值得一提的是,在每道赛题之后都附有赛题拓展阅读,这些阅读材料从横向、纵向等不同角度对赛题进行了延伸拓展。其中,横向延伸指的是针对历年CUMCM,归纳梳理赛题类型,并阐述这类赛题的分析求解思路;纵向拓展则是针对当年赛题或获奖论文中涉及的某种模型或方法,介绍其思想和分析思路。由于篇幅的限制,在拓展阅读中不可能对这些理论方法展开完全深入的研究。我们所做的主要是提纲挈领地、从整体思路对其进行介绍,希望能达到启发学生思想、拓展其视野的目的。

本书第1、3、10章由郝琳编写,第2、8、9章由陈春梅编写,第4、6章由房茂燕编写,第5、7章由吴聪伟编写,郝琳完成了本书的总体框架设计和统稿工作,并编写了每一章的赛题拓展阅读。本书在编写出版过程中得到了西安电子科技大学出版社的大力支持,刘小莉编辑对书稿的完善提出了很多宝贵意见,在此特表示感谢!

由于水平所限,书中难免有疏漏之处,敬请各位读者不吝赐教。

作 者

2016年5月

目 录

第 1 章 储油罐的变位识别与罐容表标定(2010A)	001
1.1 储油罐的变位识别与罐容表标定	001
1.2 问题分析与建模思路概述	003
1.3 获奖论文	004
1.4 论文点评	017
1.5 赛题拓展阅读	017
第 2 章 2010 年上海世博会影响力的定量评估(2010B)	018
2.1 2010 年上海世博会影响力的定量评估	018
2.2 问题分析与建模思路概述	018
2.3 获奖论文	021
2.4 论文点评	042
2.5 赛题拓展阅读	043
第 3 章 城市表层土壤重金属污染分析(2011A)	044
3.1 城市表层土壤重金属污染分析	044
3.2 问题分析与建模思路概述	044
3.3 获奖论文	045
3.4 论文点评	061
3.5 赛题拓展阅读	062
第 4 章 交巡警服务平台的设置与调度(2011B)	065
4.1 2011 年交巡警服务平台的设置与调度	065
4.2 问题分析与建模思路概述	065
4.3 获奖论文	066
4.4 论文点评	082
4.5 赛题拓展阅读	083
第 5 章 葡萄酒的评价(2012A)	088
5.1 葡萄酒的评价	088
5.2 问题分析与建模思路概述	088

5.3	获奖论文	089
5.4	论文点评	103
5.5	赛题拓展阅读	104
第6章	太阳能小屋的设计(2012B)	106
6.1	太阳能小屋的设计	106
6.2	问题分析与建模思路概述	107
6.3	获奖论文	107
6.4	论文点评	123
6.5	赛题拓展阅读	124
第7章	车道被占用对城市道路通行能力的影响(2013A)	126
7.1	车道被占用对城市道路通行能力的影响	126
7.2	问题分析与建模思路概述	126
7.3	获奖论文	127
7.4	论文点评	141
7.5	赛题拓展阅读	142
第8章	碎纸片的拼接复原(2013B)	143
8.1	碎纸片的拼接复原	143
8.2	问题分析与建模思路概述	144
8.3	获奖论文	145
8.4	论文点评	157
8.5	赛题拓展阅读	158
第9章	嫦娥三号软着陆轨道设计与控制策略(2014A)	160
9.1	嫦娥三号软着陆轨道设计与控制策略	160
9.2	问题分析与建模思路概述	160
9.3	获奖论文	162
9.4	论文点评	180
9.5	赛题拓展阅读	180
第10章	创意平板折叠桌(2014B)	182
10.1	创意平板折叠桌	182
10.2	问题分析与建模思路概述	183
10.3	获奖论文	185
10.4	论文点评	199
10.5	赛题拓展阅读	200
参考文献		202

第1章 储油罐的变位识别与罐容表标定(2010A)

1.1 储油罐的变位识别与罐容表标定

通常加油站都有若干个储存燃油的地下储油罐,并且一般都有与之配套的“油位计量管理系统”,该系统采用流量计和油位计来测量进/出油量与罐内油位高度等数据,通过预先标定的罐容表(即罐内油位高度与储油量的对应关系)进行实时计算,以得到罐内油位高度和储油量的变化情况。

许多储油罐在使用一段时间后,由于地基变形等原因,罐体的位置会发生纵向倾斜、横向偏转等变化(以下称为变位),从而导致罐容表发生改变。按照有关规定,需要定期对罐容表进行重新标定。图1-1所示是一种典型的储油罐尺寸及形状,其主体为圆柱体,两端为球冠体。图1-2是其罐体纵向倾斜变位的示意图,图1-3是罐体横向偏转变位的截面示意图。

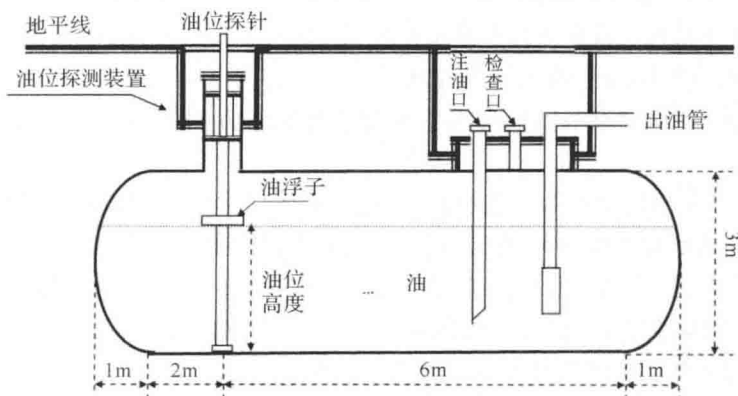


图1-1 一种典型的储油罐尺寸及形状示意图

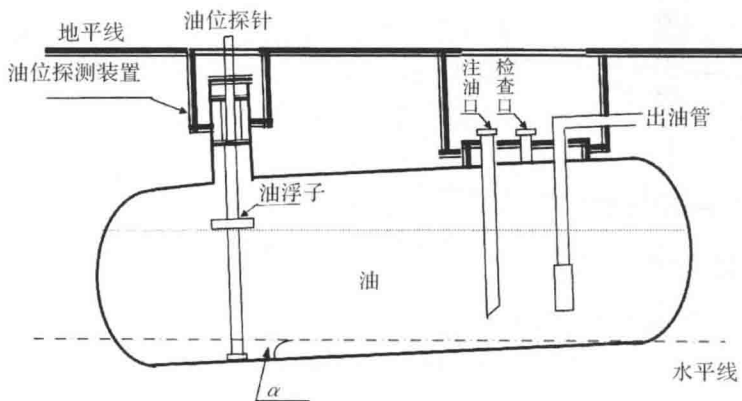


图1-2 储油罐纵向倾斜变位示意图

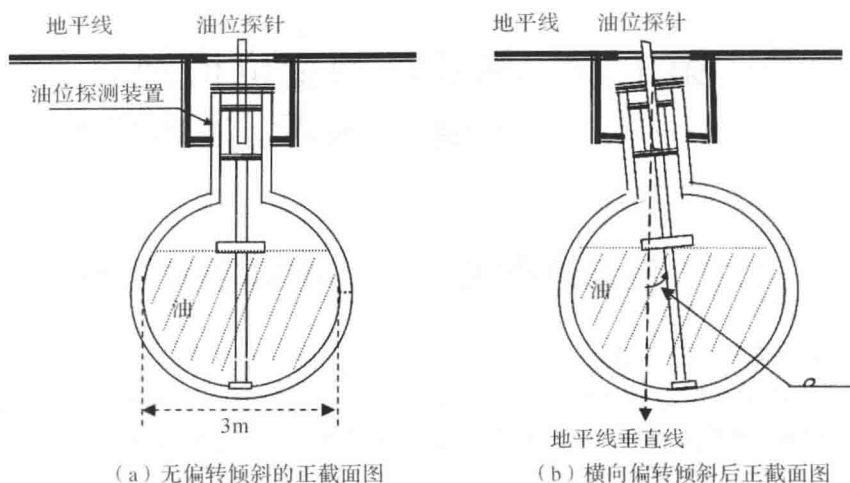


图 1-3 储油罐横向偏转变位截面示意图

请用数学建模方法研究解决储油罐的变位识别与罐容表标定的问题。

(1) 为了掌握罐体变位后对罐容表的影响, 利用如图 1-4 所示的小椭圆型储油罐(两端平头的椭圆柱体), 分别对罐体无变位和倾斜角 $\alpha=4.10$ 的纵向变位两种情况做了实验, 实验数据如附件 1 所示。请建立数学模型研究罐体变位后对罐容表的影响, 并给出罐体变位后油位高度间隔为 1 cm 的罐容表标定值。

注: 本章的附件均可至全国大学生数学建模竞赛官方网站 <http://www.mcm.edu.cn> 下载。

(2) 对于图 1-1 所示的实际储油罐, 试建立罐体变位后标定罐容表的数学模型, 即罐内储油量与油位高度及变位参数(纵向倾斜角度 α 和横向偏转角度 β)之间的一般关系。请利用罐体变位后在进/出油过程中的实际检测数据(附件 2), 根据所建立的数学模型确定变位参数, 并给出罐体变位后油位高度间隔为 10 cm 的罐容表标定值。进一步利用附件 2 中的实际检测数据来分析检验模型的正确性与方法的可靠性。

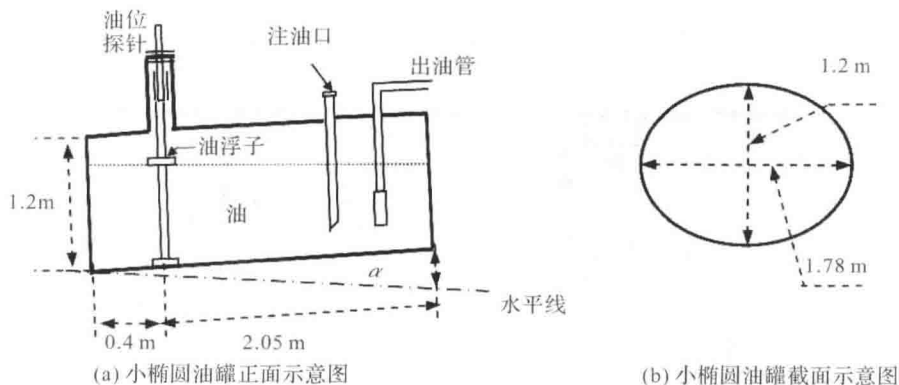


图 1-4 小椭圆型油罐形状及尺寸示意图

1.2 问题分析与建模思路概述

1.2.1 问题分析

本问题是来自于加油站设备研究与生产企业的实际课题,问题由两大部分组成:

(1) 为了观察检验罐体变位对罐容表的影响,在已知变位参数的情况下,检测出油位高度和油量的对应数值,建模分析罐容表的变化规律,并给出修正的罐容表,属于“正问题”求解。

(2) 根据实际检测数据,正确识别罐体是如何变位的,具体变了多少,同时要给出罐容表的修正标定方法和结果,属于“反问题”求解。

1.2.2 建模思路概述

一、小椭圆型储油罐的有关问题

(1) 要明确给出小椭圆型油罐正常体位(无变位)的不同油位高度与储油量的计算模型和公式,这样才能与变位后的情况进行比较,进而说明变位对罐容表的影响。可以利用几何、微积分等方法进行计算,例如利用积分计算:

$$V = 2L \int_0^h dy \int_0^a \sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}} dx$$

其中: a, b, L 分别为罐体截面椭圆的长半轴、短半轴和罐体长度, h 为罐内的油位高度。通过代入几何参数计算得到正常(即标准)的罐容表对应值。

(2) 讨论罐体变位的影响,要求给出纵向倾斜变位后的修正模型,用不同方法可能有不同的表达形式,但需要分别考虑罐体两端有油、无油的不同情况,或者按照油位的高度分成如图1-5所示的三种情况考虑。

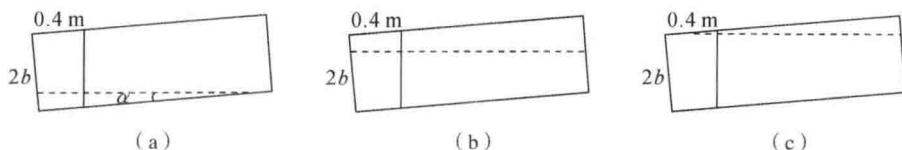


图1-5 罐体油位高度示意图

将变位参数代入模型,计算出修正后的罐容表标定值,并与正常的标定值进行比较,分析罐体变位的影响。实际上,纵向倾斜变位受到的影响明显,最大误差在257 L以上,平均误差达到190 L以上,平均相对误差达30%以上。

二、实际大储油罐的有关问题

(一) 实际储油罐的罐容表标定模型

根据储油罐纵向的变位方向,对于不同的油位高度,分别考虑油罐两端有油和一端有油的情况并建模分析,可以得到罐内实际储油量 V 与纵向倾斜变位参数 α 、横向偏转变位参数 β 和油位高度 h 的关系模型,即 $V=F(\alpha, \beta, h)$ 。详细的解析模型表述形式比较复杂,重在分析过程,注意油罐两端含油的不同情况。

当然,也可以通过实际数据,采用数值方法、工程方法或几何方法等近似方法解决此问题,但应关注引入变位参数的方法和表示形式的合理性。

(二) 变位参数的识别问题

相比罐容表标定问题,变位参数的识别可以称为“反问题”,即根据实际检测数据和 $V=F(\alpha, \beta, h)$, 反演估计出变位参数 α, β 。解决此问题可以利用最小二乘法的思想,找出一组变位参数 $\hat{\alpha}, \hat{\beta}$, 使得 $V'_i=F(\hat{\alpha}, \hat{\beta}, h_i)$ 与实际检测数据偏差最小。

需要强调的是,实际检测数据本身是不准确的,因为油量是按照不准确(需要重新修正)的罐容表计算的,所以不能以 $\min S(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^n (V_i - V'_i)^2$ 作为变位参数的辨识准则。虽然罐体变位后的油量和油位高度数据不准确,但是进出的油量是准确值。所以可以利用油量的改变量 ΔV_i 与 $\Delta V'_i$ 的偏差最小作为辨识准则,即

$$\min S(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^n (\Delta V_i - \Delta V'_i)^2$$

或者以油量相对于油位高度的变化率的偏差最小作为辨识准则,即

$$\min S(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\Delta V_i}{\Delta h_i} - \frac{\Delta V'_i}{\Delta h_i} \right)^2$$

利用附件 2 中的部分数据(如前半部分),借助工具软件或各种数值方法求解得到参数估计值 $\hat{\alpha}, \hat{\beta}$ 。其具体的数值用不同的方法会有差别,但结果应是纵向倾斜变位角 $\hat{\alpha}$ 略大于 2° , 横向偏转变位角影响不敏感。

(三) 模型和结果的可靠性分析

可以利用已给出的一部分数据做计算,另一部分数据用来做检验和可靠性分析。例如在本问题中,可以利用附件 2 的前半部分数据来反演估计 $\hat{\alpha}, \hat{\beta}$, 用后半部分数据来分析检验模型的正确性与方法的可靠性。

1.3 获奖论文

作者: 方浩, 李泽鹏, 盖建斌

指导教师: 郝琳

摘要:

加油站储存燃油的地下储油罐在使用一段时间后,由于地基变形等原因,罐体会发生变位,导致罐容表发生改变,从而使实际测得的储油量存在较大误差。因此,建立一个高效、可靠的模型,对储油罐的罐容表进行重新标定,对于解决储油量的测量问题具有重要意义。

针对问题(1),首先分析罐体变位后对罐容表的影响,利用微元法分别得到无变位时储油量 v 与油位高度 h 的函数关系式,以及纵向倾斜变位角为 $\alpha(\alpha \neq 0)$ 时,储油量 v 与油位高度 h 的函数关系式。然后,用正态分布密度函数曲线对倾角为 α 时理论计算值和实验数据之间的误差进行拟合,并给出罐体变位后油位高度间隔为 1 cm 的罐容表标定值。

针对问题(2),首先给定显著性水平 $\chi=0.05$,利用假设检验的方法,研究了储油罐的

变位识别问题；其次采用近似计算的方法求出罐内储油量 v 与油位高度 h 及变位参数(纵向倾斜角度 α 和横向偏转角度 β)之间的函数表达式；针对变位参数，建立了优化模型，并利用附件2中的数据进行步长逐步减少的局部搜索，计算出变位参数 $\alpha=1.2^\circ$ ， $\beta=7.7^\circ$ ；在此基础上给出了罐体变位后油位高度间隔为10 cm的罐容表标定值。最后，将出油前后理论计算的油量容积之差与出油量的比值作为样本，利用假设检验判定模型的正确性，并给出检验方法正确性的标准。

关键词 变位识别 罐容表 微元法 假设检验 局部搜索

1.3.1 问题重述

问题内容如1.1节所述，此处不再重复。

1.3.2 模型假设

经过对上述问题的分析，提出以下六点假设：

- (1) 忽略浮子的倾斜对读数的影响；
- (2) 忽略油位探针、注油口、出油管等对储油量读数的影响；
- (3) 假设油位探测装置在测量过程中不会出现故障；
- (4) 假设油罐体形状规则，没有发生变形；
- (5) 假设当油罐倾斜时油面不会低于油位探针的最底端，即油位探针示数始终在0以上；
- (6) 假设当油罐倾斜时油面的高度不会超过油位探针的最顶端。

1.3.3 符号说明

文中使用的符号说明如表1-1所示。

表1-1 符号说明表

符 号	符号说明
h	油位高度(即油位探针示数)
v	油罐内的储油量
α	纵向倾斜角度
β	横向偏转角度
s	油体的截面积

1.3.4 模型的建立与求解

一、问题(1)的分析与建模

(一) 油罐倾斜对罐容表的影响分析

罐体未发生变位时，油罐内的油体为一规则的柱体。此时，只需要计算出油体的截面积，然后利用柱体的体积公式，计算储油量即可。

罐体发生变位时，油罐内的油体形状不规则，可以利用微元法进行求解。考虑到变位

后油罐中的油液位高度存在三种情况，罐体的正视图如图 1-6 所示。

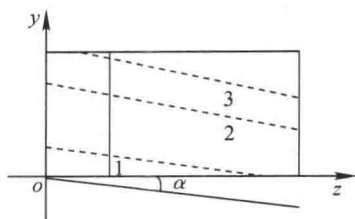


图 1-6 罐体正视图

情况 1：油位高度在油位探针最底端与右侧椭圆最底端之间；

情况 2：油位高度在右侧椭圆最底端与左侧椭圆最顶端之间；

情况 3：油位高度在左侧椭圆最顶端与油位探针最顶端之间。

(二) 油面高度与体积关系模型

油面高度与体积的关系可根据图 1-6 中 α 的不同分两种情形加以讨论。

1. $\alpha=0$ 时

当罐体无变位时，罐体内的油料形态不发生变化，为一规则柱体。建立二维坐标系，罐体的左视图如图 1-7 所示。

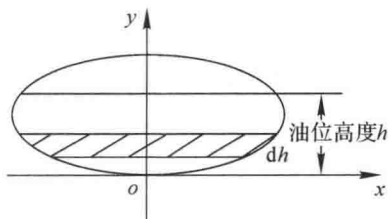


图 1-7 罐体左视图

油体的截面积为

$$s = \int_0^h 1.78 \sqrt{1 - \left(\frac{y-0.6}{0.6}\right)^2} dy \quad (1-1)$$

则储油量为

$$v = s \times 2.45 = 4.361 \int_0^h \sqrt{1 - \left(\frac{y-0.6}{0.6}\right)^2} dy \quad (1-2)$$

2. $\alpha \neq 0$ (假设左倾) 时

依据油面高度，用微元法对高度与体积的函数关系分三步求解：

(1) 当 $0 \leq h \leq 14$ cm 时。

过点 $(0, 0, z)$ 且垂直于 Z 轴的截面积为

$$s = \int_0^{(0.4-z)\tan\alpha+h} 1.78 \sqrt{1 - \left(\frac{y-0.6}{0.6}\right)^2} dy \quad (1-3)$$

取 z 为积分变量，它的变化区间为 $\left[0, 0.4 + \frac{h}{\tan\alpha}\right]$ ，则储油量为

$$v = \int_0^{0.4 + \frac{h}{\tan\alpha}} s dz \quad (1-4)$$

(2) 当 $15 \leq h \leq 117$ cm 时。

过点 $(0, 0, z)$ 且垂直于 Z 轴的截面积为

$$s = \int_0^{h_2 + (0.4 - z) \tan \alpha} 1.78 \sqrt{1 - \left(\frac{y - 0.6}{0.6}\right)^2} dy \quad (1-5)$$

取 z 为积分变量, 它的变化区间为 $[0, 2.45]$, 则体积元素 $dv_2 = sdz$, 因此油体的体积关于角度 α 的一般公式, 即储油量为

$$v = 1.78 \int_0^{2.45} \int_0^{h_2 + (0.4 - z) \tan \alpha} \sqrt{1 - \left(\frac{y - 0.6}{0.6}\right)^2} dy dz \quad (\alpha \neq 0) \quad (1-6)$$

(3) 当 $117 \leq h \leq 120$ cm 时。

用总体积减去空余部分体积即得储油量空余部分体积 $v_{\text{空}}$, 即

$$s = \int_0^{(2.05 - z) \tan \alpha + h} 1.78 \sqrt{1 - \left(\frac{y - 0.6}{0.6}\right)^2} dy \quad (1-7)$$

$$v_{\text{空}} = \int_0^{2.05 + \frac{h}{\tan \alpha}} sdz \quad (1-8)$$

储油量: $v = v_{\text{总}} - v_{\text{空}}$, $v_{\text{总}} = 4110.1$ 。

(三) 误差分析与处理

1. 无变位时, 数据处理与误差分析模型

对公式(1-1)、(1-2)和实验数据分别进行编程处理, 得到无变位进油时油位高度 h_1 与储油量 v_1 的关系曲线图(见图 1-8), 以及公式计算数据和实验数据的误差曲线图(见图 1-9)。

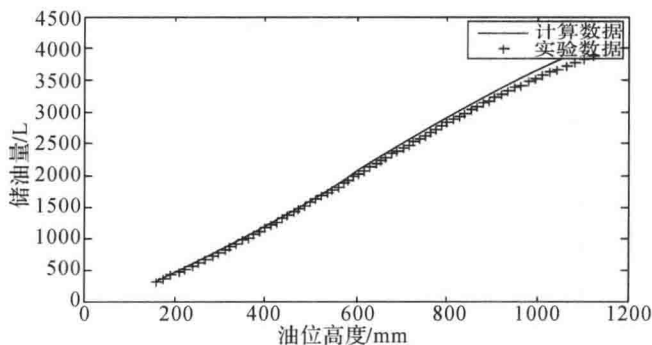


图 1-8 无变位进油储油量与油高关系图

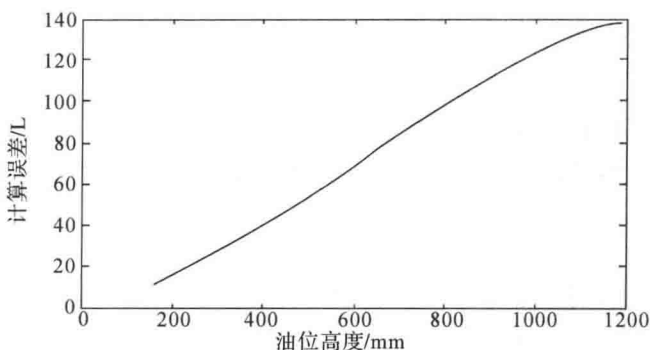


图 1-9 无变位进油储油量误差与油高关系图

分析进油量曲线图(见图 1-8)可看出,实验得到的数据和公式计算的数据之间的误差随着油位高度的增加逐渐变大。由进油量误差曲线图(见图 1-9)可直观地看出误差曲线近似为一条直线,即误差呈累加的趋势。这主要是由于系统误差引起的,比如流量计的测量误差(流量计的设计是依据流体的某一特定状态进行的,如输送管道内径、流体的温度、压力、密度、介质的种类、状态、输送流速等,在实际使用过程中,这其中任何一个条件的变化都会使设计状态发生偏离,使流量计的测量产生误差)造成每次注入油罐的油量少于 50 L,逐渐累加使误差越来越大,除此之外,还有油面波动造成的误差等。

2. 倾斜角 $\alpha=4.1^\circ$ 时,数据处理与误差分析模型

用上述公式(1-3)至(1-8)和实验数据进行编程处理,得到倾斜角为 $\alpha=4.1^\circ$ 时进油油位高度 h_2 与储油量 v_2 的关系曲线图(见图 1-10),以及公式计算数据和实验测得数据的误差曲线图(见图 1-11)。

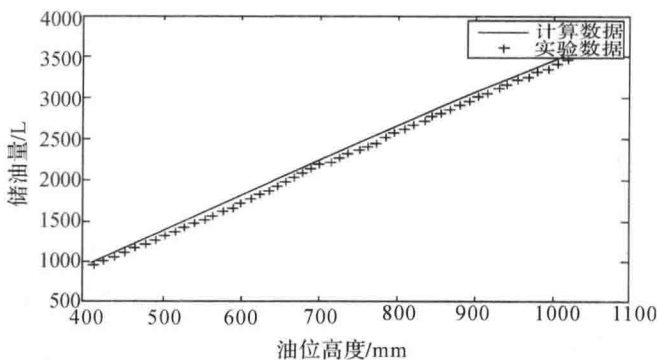


图 1-10 $\alpha=4.1^\circ$ 储油量与油高关系图

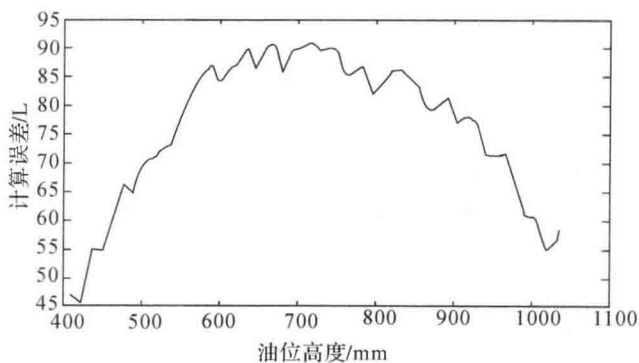


图 1-11 $\alpha=4.1^\circ$ 储油量误差与油高关系图

分析误差图 1-11 可得出,误差集中在 45~90 L 之间,误差比较大,而且误差近似服从正态分布,故可以假设误差为以高度为自变量的类似正态分布的函数

$$\Delta v(h) = \left[A - \frac{(h - u_1)^2}{c_1} \right] \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} e^{-\frac{(h-u_1)^2}{2c_2}} \quad (1-9)$$

其中: u_1 为图 1-11 中油位高度的平均值; σ_1^2 为图 1-11 中油位高度的方差; A 由 $(u_1, \Delta v(u_1))$ 调整确定; c_1 根据 $(h - u_1)^2$ 的范围确定搜索区间为 $[5, 10]$; c_2 取值远大于 σ_1^2 。

计算误差图中油位高度以及误差值的均值和方差,再随机搜索,确定各参数: $u_1 =$

727.927 2、 $\sigma_1^2=34\ 004$ 、 $A=41\ 364$ 、 $c_1=7$ 、 $c_2=644\ 004$ ，得到拟合该图的最优函数，拟合效果如图 1-12 所示，由拟合图可以看出，得到的正态分布曲线对误差曲线的拟合效果比较好。

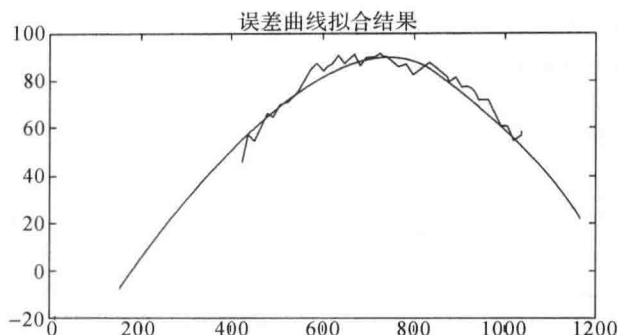


图 1-12 误差曲线拟合效果图

再以此函数去减原体积公式(1-6)，得到修正的体积公式

$$v'_2 = v_2 - \Delta v(h) \quad (1-10)$$

用修正的体积公式得到修正后的进油量图(见图 1-13)以及修正后的进油量误差图(见图 1-14)。由图 1-14 可看出，经修正后的误差基本保持在 $-8 \sim +6$ L 之间，相对误差比较小，拟合效果比较好，但两端绝对误差较大。

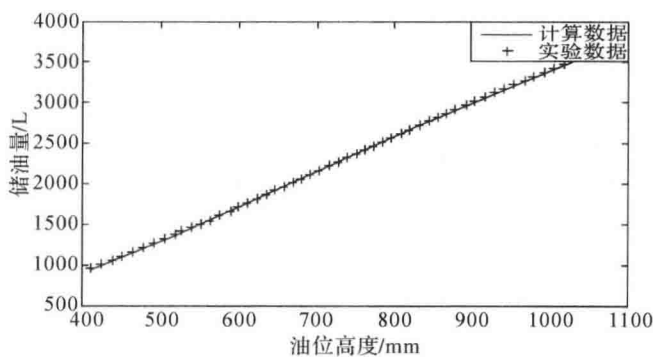


图 1-13 误差修正后储油量与油高关系图

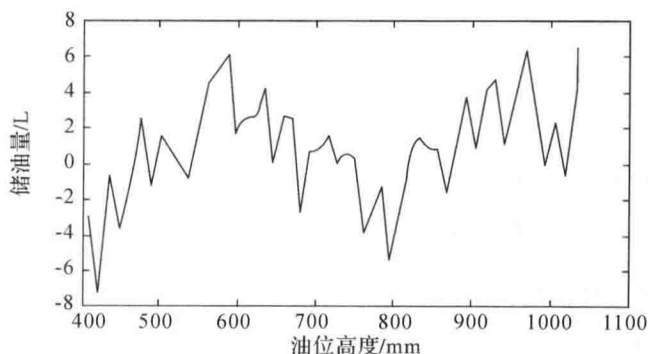


图 1-14 修正后的储油量误差与高度关系图

然后利用修正的体积公式(1-10)，对倾斜后的罐容表进行标定，最终给出了罐容表的标定表(见表 1-2)。

表 1-2 倾斜的小椭圆型储油罐罐容表标定表

油位高度 /cm	储油量 /L	油位高度 /cm	储油量 /L	油位高度 /cm	储油量 /L	油位高度 /cm	储油量 /L
0	1.7	30	570.4936	60	1716.2121	90	2995.7002
1	3.531	31	603.0742	61	1758.4271	91	3036.7337
2	6.2635	32	636.1882	62	1800.7826	92	3077.4948
3	9.9748	33	669.8152	63	1843.2676	93	3117.9643
4	14.7563	34	703.936	64	1885.8713	94	3158.1225
5	20.6908	35	738.5321	65	1928.5827	95	3197.949
6	27.8542	36	773.5862	66	1971.3906	96	3237.4227
7	36.3163	37	809.0815	67	2014.2839	97	3276.5218
8	46.1424	38	845.0021	68	2057.251	98	3315.2239
9	57.3935	39	881.3328	69	2100.2806	99	3353.5055
10	70.127	40	918.0587	70	2143.3609	100	3391.3423
11	84.3968	41	955.1658	71	2186.4801	101	3428.7088
12	100.2541	42	992.6403	72	2229.6261	102	3465.5786
13	117.7475	43	1030.4689	73	2272.7867	103	3501.9239
14	136.923	44	1068.6387	74	2315.9495	104	3537.7155
15	165.9973	45	1107.1372	75	2359.1018	105	3572.9225
16	186.4387	46	1145.9521	76	2402.2307	106	3607.5125
17	208.1421	47	1185.0714	77	2445.3231	107	3641.4506
18	230.9767	48	1224.4835	78	2488.3656	108	3674.6997
19	254.8489	49	1264.1769	79	2531.3445	109	3707.2198
20	279.6842	50	1304.1401	80	2574.2459	110	3738.9672
21	305.4205	51	1344.3621	81	2617.0556	111	3769.8944
22	332.0048	52	1384.8318	82	2659.7589	112	3799.9482
23	359.3905	53	1425.5383	83	2702.3411	113	3829.0689
24	387.5361	54	1466.4707	84	2744.787	114	3857.1875
25	416.4044	55	1507.6185	85	2787.0809	115	3884.2217
26	445.9616	56	1548.9708	86	2829.207	116	3910.0681
27	476.1766	57	1590.5169	87	2871.149	117	3934.5806
28	507.021	58	1632.2463	88	2912.89	118	3976.6
29	538.4682	59	1674.1483	89	2954.413	119	3995.5
						120	4012.7

二、问题(2)的分析与建模

(一) 储油罐的变位识别模型

在实际中,对储油罐进行重新标定之前,首先要判定储油罐是否发生倾斜,即储油罐的变位识别问题。若储油罐未发生变位,则在出油前后储油罐油量体积之差与出油量在误差范围内应近似相等。可运用假设检验的方法建立变位识别模型。

设样本 X 为每次出油前后储油罐油量体积之差与出油量的比值,样本 X 应服从正态

分布 $N(1, \sigma^2)$ 。

原假设 $H_0: \mu = \mu_0 = 1 \rightarrow$ 被择假设 $H_1: \mu \neq 1$ 。

统计量 $T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}} \sim t(n-1)$, 给定显著性水平 $\chi = 0.05$, 由 $P\left\{\left|\frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}}\right| > t_{\frac{\chi}{2}}(n-1)\right\} = \chi$, 查

t 分布表得 $t_{0.025}(n-1) = 2.0227$, 则拒绝域为

$$\left|\frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}}\right| \geq 2.0227$$

在附件 2 取 40 组数据得到统计值 $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$, $s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$, 代入 $\left|\frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}}\right| \geq$

2.0227 发现不等式不成立, 说明原假设不成立, 油罐发生变位。

(二) 纵向倾角为 α 、横向旋转角为 β 时, 储油量与油位高度关系模型

首先考虑纵向倾斜角 α 对 h 的影响, 在任意点 $(0, 0, z)$ 处, 油位高度 $h_1 = h + (2-z) \tan \alpha$, 如图 1-15 所示。

其次, 考虑横向旋转角 β 对 h 的影响。由于油位探针是固定的, 因此当油罐发生纵向偏转时, 测定的油位高度会发生变化。如图 1-16 所示, 假定探针长度为 3 m, 不管油罐如何纵向偏转, 探针始终过油罐竖截面的圆心。因此, 可求得偏转后油位高度 $h_2 = 1.5 + (h_1 - 1.5) \cos \beta$ 。

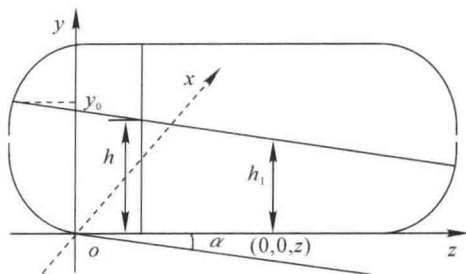


图 1-15 油位高度示意图

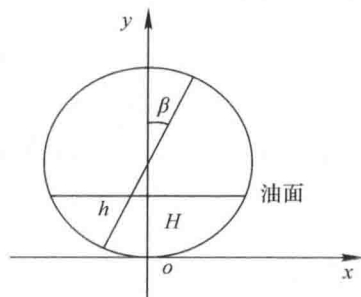


图 1-16 油罐纵向偏转时探针示意图

综合考虑纵向倾斜角 α 和横向旋转角 β 对 h 的影响, 则油面高度 h 在变位后的液面高度

$$H = 1.5 + [h + (2-z) \tan \alpha - 1.5] \cos \beta \quad (1-11)$$

考虑到直接进行几何求解比较复杂, 因此, 可以对其进行近似计算。

首先将储油罐内的油体分为两部分, 即球冠内油体与圆柱体内油体。过圆柱体内油体液面的中点做一平行于水平面的平面, 将该平面左上侧的油体填补平面右下侧的空余部分。由于 α, β 较小, 因此可认为实际油体体积与分割填补后的油体体积相等。

与问题一中的小椭圆型储油罐类似, 当该典型的储油罐发生倾斜后, 油位高度也可划分为三种情况:

(1) 油量较少, 油体的液面在油位探针最底端与右球冠最底端之间, 如图 1-17 所示。